

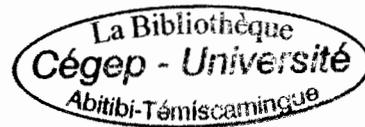
**UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE**

**MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE**

**PAR  
MEHDI EL IDRISSE ESSERHROUCHNI**

**MODÉLISATION DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE STRUCTURE  
ÉOLIENNE EN MODE NON ROTATIF ET SON EFFET SUR UNE STRUCTURE  
ÉLASTIQUE AVOISINANTE**

**MAI 2010**





# BIBLIOTHÈQUE

Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue  
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

## Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

**CE MÉMOIRE A ÉTÉ RÉALISÉ  
À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE  
DANS LE CADRE DU PROGRAMME  
DE MAÎTRISE EN INGÉNIERIE  
DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
OFFERT PAR EXTENTION À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-  
TÉMISCAMINGUE**

## RÉSUMÉ

Cette mémoire porte sur l'utilisation d'une formulation variationnelle par équations intégrales pour étudier le rayonnement acoustique d'une structure de type éolienne et son effet sur une structure avoisinante. Le problème d'interaction entre la pression acoustique générée par l'éolienne et la structure est considéré découplé. Le fluide est supposé être barotrope (parfait) et la structure élastique, homogène et isotrope. La formulation offre des avantages par rapport à la méthode des éléments finis et évite le calcul de la partie singulière associée à la méthode des collocations. Aussi, la formulation fournit, après discrétisation, par la méthode des éléments finis de frontière, un système algébrique symétrique. Deux éoliennes sont considérées (à axe vertical et à axe horizontal) dans ce travail.

## REMERCIEMENTS

Il me fait plaisir d'adresser mes remerciements à:

Mon directeur de Maîtrise, le Professeur M.Fouad Erchiqui pour son encadrement, son aide précieuse, sa disponibilité, ses nombreux conseils et son soutien constant tout au long de ma maîtrise. Sa grande disponibilité et son aide à tout moment m'ont permis de mener à bien cette étude et la rédaction de ce mémoire.

M. Hassan Ezzaidi de l'UQAC et M. Fouad Hssnaoui-Slaoui de l'UQAT, mes co-directeurs; pour leurs apports appréciés et disponibilités.

Mme. Ahlem Alia pour son assistance et ses suggestions éclairées qu'elle m'a apportée.

Les professeurs du département des sciences appliquées de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) qui ont intervenu dans cette maîtrise en ingénierie; pour la qualité de leur enseignement.

Mes collègues de la maîtrise pour leur amitié et leur soutien matériel.

Tous ceux ou celles qui de près ou de loin m'ont soutenu durant ma formation.

Ma famille au Maroc; pour leur patience, leur soutien et leurs encouragements tout au long de cette période. Qu'elle trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude et de toute ma reconnaissance.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>I</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>2</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES.....</b>	<b>3</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>6</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>8</b>
<b>LISTE DES ANNEXES.....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE .....</b>	<b>10</b>
<b>CHAPITRE I.....</b>	<b>17</b>
<b>MISE EN ÉQUATION DE COUPLAGE FLUIDE STRUCTURE.....</b>	<b>17</b>
I.1. MISE EN ÉQUATION GÉNÉRALES.....	17
I.1.1 Tenseurs des déformations .....	17
I.1.2 Lois de comportements.....	18
I.1.3 Équations de la conservation de la quantité de mouvement.....	19
I.1.4 Équation de conservation de la masse .....	20
I.1.5 Conditions aux limites .....	20
I.1.6 Conditions initiales.....	21
I.2. LINÉARISATION DES ÉQUATIONS .....	22
I.2.1 Équation d'onde : équation d'Alembert .....	26
I.2.2 Structure élastique soumise à des charges en pression.....	28
I.2.3. Récapitulation des équations qui gouvernent le couplage fluide structure .....	29
I.3 PROBLÈMES HARMONIQUES ET COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE.....	31
I.3.1 Fluide parfait .....	32
I.3.2 Structure élastique mince et isotrope.....	33
I.3.3 Conditions aux limites .....	34
<b>CHAPITRE II .....</b>	<b>36</b>
<b>FORMULATION VARIATIONNELLE PAR ÉQUATION INTÉGRALE DU PROBLÈME DE COUPLAGE INDIRECTE FLUIDE-STRUCTURE.....</b>	<b>36</b>
II.1 FONCTIONNELLE DE FLUIDE .....	36
II.1.1 Formulation par équations intégrales directe .....	36

II.1.1.1	Solution fondamentale de Green dans $R^3$ .....	37
II.1.1.2	Représentation intégrale de la pression .....	38
II.1.1.2.a	Problème externe .....	38
II.1.1.2.b	Problème interne .....	41
II.1.2	Formulation par équations intégrales indirecte .....	43
II.1.3	Condition aux limites de type Neumann .....	46
II.1.3.1	Évaluation de la densité de double couche .....	47
II.1.4	Formulation variationnelle indirecte .....	48
II.2.	FONCTIONNELLE DE LA STRUCTURE .....	51
II.3	STRATÉGIE DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DÉCOUPLÉ FLUIDE-STRUCTURE .....	53
<b>CHAPITRE III</b>	<b>.....</b>	<b>54</b>
<b>RÉSOLUTION NUMÉRIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS</b>	<b>.....</b>	<b>54</b>
III.1	INTRODUCTION .....	54
III.2	FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS DE LA FONCTIONNELLE DE LA STRUCTURE .....	54
III.2.1	Matrice de rigidité .....	57
III.2.2	Matrice de masse .....	60
III.3	FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS DE FRONTIERE DE LA FONCTIONNELLE DE FLUIDE .....	62
III.4	TRAITEMENT NUMERIQUE DES INTEGRALES .....	65
III.5	VALIDATION DES CALCULS : CAS DE LA STRUCTURE .....	67
III.5.1	Plaque rectangulaire mince soumise à une charge concentrée .....	68
III.5.2	Modes de vibration d'une plaque mince .....	70
III.6	VALIDATION DES CALCULS : CAS DE FLUIDE (SANS COUPLAGE) .....	75
III.6.1	Validation des intégrales singulières .....	75
III.6.2	Rayonnement d'une sphère pulsante .....	77
III.6.3	Rayonnement d'un disque vibrant : oscillation transversale .....	79
<b>CHAPITRE 4</b>	<b>.....</b>	<b>82</b>
<b>APPLICATION : RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DES ÉOLIENNES</b>	<b>.....</b>	<b>82</b>
IV.	INTRODUCTION .....	82
IV.1	DESCRIPTION GEOMETRIQUE ET MAILLAGE PAR ELEMENTS FINIS .....	83
IV.2	EFFET DU RAFFINEMENT DU MAILLAGE SUR LE RAYONNEMENT ACOUSTIQUE: EOLIENNE A AXE VERTICAL .....	86
IV.3	EFFET DE LA VITESSE NORMALE SUR LE RAYONNEMENT ACOUSTIQUE : EOLIENNE A AXE VERTICAL .....	87
IV.4	EFFET DE LA FREQUENCE SUR LE RAYONNEMENT ACOUSTIQUE : EOLIENNE A AXE HORIZONTAL .....	90
IV.5	EFFET DE LA PRESSION RAYONNEE SUR LE COMPORTEMENT D'UNE STRUCTURE ELASTIQUE HOMOGENE MINCE ET PLANE .....	91

<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>93</b>
<b>RÉFÉRENCES.....</b>	<b>96</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>101</b>

## LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Répartition du domaine $\Gamma$ .....	21
Figure 2 : Définition du domaine acoustique pour le problème extérieur.....	38
Figure 3 : Définition du domaine acoustique pour le problème extérieur.....	42
Figure 4 : Définition du domaine acoustique pour la méthode indirecte.....	44
Figure 5 : Élément de plaque pour la structure.....	57
Figure 6 : Élément triangulaire pour le fluide.....	62
Figure 7 : Application d'un moment sur une plaque mince rectangulaire.....	68
Figure 8 : Flèche en fonction de la longueur de la plaque rectangulaire.....	69
Figure 9 : Application d'une force à une plaque mince rectangulaire.....	69
Figure 10 : Flèche en fonction de la longueur de la plaque.....	70
Figure 11: Maillage de la plaque utilisé pour le modèle numérique.....	72
Figure 12 : Schéma de la sphère pulsante.....	77
Figure 13 : Modèle du maillage de la sphère pulsante.....	78
Figure 14 : Pression rayonnée par la sphère pulsante (458, nœuds, 776 triangles).....	79
Figure 15 : Modèle du maillage d'un disque (1015 nœuds, 1976 triangles).....	80
Figure 16 : Modèle du maillage d'un disque (1015 nœuds, 1976 triangles).....	81
Figure 17 : Détail géométrique du modèle de l'éolienne a axe verticale.....	83
Figure 18 : Détail géométrique du modèle de l'éolienne a axe horizontale.....	84

Figure 19 : Maillage triangulaire raffiné du modèle de l'éolienne à axe horizontal (2500 nœuds).....	85
Figure 20 : Maillage triangulaire du modèle de l'éolienne à axe horizontal (1400 nœuds).....	85
Figure 21 : Maillage triangulaire du modèle verticale de l'éolienne (1399 triangles) .....	86
Figure 22 : Effet de raffinement du maillage sur le rayonnement acoustique .....	87
Figure 23 : Effet de la vitesse normale sur le rayonnement acoustique .....	88
Figure 24 : Effet de la vitesse normale sur la pression rayonnée : éolienne à axe verticale.....	88
Figure 25 : Effet de la fréquence sur le rayonnement acoustique : éolienne à axe verticale ....	89
Figure 26 : Effet de la fréquence sur la pression rayonnée : éolienne à axe verticale.....	89
Figure 27 : Effet de la fréquence sur le rayonnement acoustique.....	90
Figure 28 : Effet de la fréquence sur la pression rayonnée.....	91
Figure 29: Effet de la pression rayonnée sur une structure placée à 10 m .....	92

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Caractéristiques de la plaque et du milieu fluides .....	71
Tableau 2 : Fréquences propres de la plaque pour une épaisseur $h = 0.00185$ m.....	72
Tableau 3 : Fréquences propres de la plaque pour une épaisseur $h = 0.00270$ m.....	73
Tableau 4 : Fréquences propres de la plaque pour une épaisseur $h = 0.00480$ m.....	74
Tableau 5 : Intégration numérique sur des triangles de référence. ....	76
Tableau 6: Disposition des triangles en intégration double.....	76

## LISTE DES ANNEXES

Annexe 1 : Transformation de la fonctionnelle $J(q, q')$ .....	102
Annexe 2 : Matrice d'influence d'un élément sur un autre .....	108

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

De nos jours, le nombre de secteurs intéressés par les problèmes multiphysiques ne cesse d'augmenter. Dans les domaines de génie mécanique, de génie civil, de l'environnement ce sont les problèmes d'interaction fluide-structure qui sont visés. Dans le domaine de l'environnement sonore, ce sont les problèmes associés au bruit qui deviennent très préoccupants. À titre d'exemple, dans le secteur des éoliennes, de l'aéronautique et de l'automobile, le champ de pression rayonné vers l'extérieur par les structures vibrantes est intense et, par le fait même, nuisible à l'homme.

Dans le cas de rayonnement acoustique des structures vibrantes complexes (voiture, moteur, audio, etc.), la résolution se fait par des méthodes numériques et généralement applicables en moyenne et basse fréquence. Parmi ces méthodes, on trouve celle des différences finies, des éléments finis et des éléments finis de frontière.

Dans le cas des travaux classiques abordés par la méthode des différences finies en acoustique, on trouve ceux de (Harumi et al, 1979) sur le rayonnement ultrasonore et sa réflexion par une fissure, ceux de (Bond, 1979) et (Georgiou et Bond, 1987) sur la modélisation numérique des champs ultrasonores réfléchis par des coins à différents angles et ceux de (Ilan et Weight, 1990), (Alia et al, 2004) et (Bouaoua et al, 2003) sur la diffraction des ondes sonores, etc. Cette méthode fait encore l'objet de travaux en

rayonnement d'ondes acoustiques mais beaucoup moins que la méthode des éléments finis. Cette dernière s'adapte bien à des domaines de géométries quelconques.

Concernant la méthode des éléments finis (MEF), elle a connu, depuis le début des années 60, un grand succès pour des applications en physique mécanique. Toutefois, pour les problèmes acoustiques et la propagation d'ondes, la MEF s'adapte mal à la résolution de ces problèmes dans un milieu non borné. Ceci est dû essentiellement à l'absence de la prise en compte de la condition de rayonnement de Sommerfeld. Il s'ensuit donc un choix arbitraire de troncature du domaine. Contrairement aux problèmes externes, les problèmes internes trouvent plusieurs applications. À titre d'exemple, soulignons les travaux qui utilisent des analyses directes ou nodales pour déterminer la réponse des cavités (Craggs, 1972) et (Morand et Ohayon, 1995). Dans le cas de problèmes externes, l'utilisation d'une frontière virtuelle, pour délimiter le domaine infini du fluide, induit des réflexions artificielles. Pour contourner ce problème, plusieurs méthodes sont développées dont la méthode des conditions absorbantes (Clayton et Engquist, 1977). L'inconvénient de cette méthode est le temps de calcul (Thompson, 2006). Soulignons qu'une bibliographie riche est fournie dans (Thompson, 2006) sur l'utilisation de la méthode des éléments finis en acoustique.

Finalement, soulignons que la méthode des éléments finis de frontière (BEM : *Boundary Element Method*) a connu un grand succès, depuis son apparition au début des années 1970, par son utilisation pour plusieurs problèmes de la physique. Cette méthode permet l'accès aux inconnues en un point du domaine physique relativement à la connaissance des

solutions à la frontière du milieu. Dans cette méthode, la discrétisation se fait sur la frontière du milieu physique et non sur le domaine physique, comme c'est le cas pour la méthode des éléments finis. Toutefois, pour les problèmes harmoniques qui caractérisent le rayonnement acoustique pour des problèmes intérieurs, la méthode présente un spectre de fréquences irrégulières et l'unicité de la solution n'est possible que pour certaines valeurs du nombre d'onde  $k$ . Ce problème, qui apparaît lorsque l'on étudie les structures fermées, a été étudié en 1968 par Schneck (Schneck, 1968), par Jones (Jones, 1979) ainsi que par (Amin et Harris, 1990).

Concevoir des systèmes qui ne génèrent pas beaucoup de décibels n'est pas la seule préoccupation de l'ingénieur. Celui-ci s'intéresse également à l'action de l'air sur les structures. En effet, la présence d'un milieu physique (gaz ou liquide) bouleverse complètement les caractéristiques de résonance des structures.

Le traitement analytique des problèmes de couplages fluide-structure n'est possible que pour des géométries simples, omniprésentes dans les cas académiques et rarement observées dans la réalité, telles que les carrés (Nakayama, Nakamuta, Takeuchi, 1981), les cylindres (Mazouzi, Lonville et Vittecoq, 1990), les sphères (Felippa et Geers, 1980), etc. En effet, pour ces géométries, la résolution se fait habituellement à partir de familles de fonctions sphériques ou cylindriques. À titre d'exemple, nous mentionnons les travaux de Felippa et Geers (Felippa et Geers, 1980), dans le cas de vibrations d'une structure axisymétrique en interaction avec un fluide-parfait, où la solution se fait par une décomposition en série de polynômes de Legendre de chacune des variables associée à la

structure et l'utilisation des fonctions de Bessel. Ensuite, en relation avec les conditions de continuités à l'interface fluide-structure, on obtient une formulation algébrique dont la solution permet d'accéder aux variables physiques. Pour ces problèmes, on trouve deux types de classement :

- a) Couplage intérieur tels les vibrations de réservoirs, de conduites, des turbines, etc. sous l'effet d'un liquide ou d'un gaz;
- b) Couplages extérieurs des submersibles immergés dans un fluide occupant un domaine infini (avion, sous-marins, etc.)

La résolution numérique de ces problèmes se fait généralement à l'aide de deux familles d'approches numériques; une basée sur la méthode des éléments finis (Zienkiewicz et Newton, 1969) et l'autre basée sur la méthode des équations intégrales (Sayhi, 1979).

Malgré le compromis entre le temps de calcul et la précision, la méthode des éléments finis reste fort concevable pour les domaines finis. Lorsque la structure est immergée dans un milieu fluide infini, la méthode des éléments finis, devient aléatoire (choix de la frontière qui borne le domaine) et la solution approximée est obtenue généralement avec des temps de calculs élevés. Par contre, la méthode des équations intégrales évite la discrétisation du domaine de fluide et réduit considérablement le temps de calcul. Toutefois, la mise en œuvre informatique est complexe et le formalisme associé fait intervenir des intégrales singulières et nécessite une attention particulière (Erchiqui et Gakwaya, 1991; Erchiqui et Gakwaya, 1990).

Soulignons que la formulation par équation intégrale pour le problème intérieur de Helmholtz présente un spectre de fréquences irrégulières et la formulation par équation intégrale du problème de couplage élasto-acoustique, en termes de saut de pression, est exemptée de ce problème et cela pour toutes les fréquences (Mariem, 1984). Par contre, la formulation du problème intérieur ou extérieur pris séparément en terme de saut de pression interne ou externe, de part et d'autre de la surface mouillée, présente un spectre de fréquences irrégulier (Jean, 1985). Cette dernière approche, dite formulation variationnelle, est considéré dans ce travail pour établir la fonctionnelle de fluide. Ensuite, pour le problème harmonique, une analyse est effectuée pour étudier la pression acoustique induite par des éoliennes à axes vertical et à axe horizontal (sous les conditions aux limites de type Neuman). Aussi, leurs effets sur une structure élastique mince homogène et isotrope.

L'objectif de ce mémoire est la modélisation du rayonnement acoustique d'une structure éolienne en mode non rotatif et son effet sur une structure élastique avoisinante. Le fluide et la structure sont supposés être découplés.

La méthodologie utilisée dans ce mémoire est la suivante :

Le premier chapitre est consacré à un rappel sur les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le milieu fluide (supposé parfait) et le milieu solide (supposé élastique homogène et isotrope) ainsi que les équations qui régissent les conditions initiales et aux limites. Pour l'écriture théorique des équations qui gouvernent le problème découplé en vibroacoustique, on considère un régime harmonique et toutes les grandeurs physique et géométrique qui caractérisent le système fluide-structure sont linearisées.

Le second chapitre est consacré à l'établissement des formulations intégrales et variationnelles à partir des équations aux dérivées partielles établies dans le chapitre 1. Dans un premier temps, pour le fluide, la pression est écrite sous forme intégrale pour les problèmes externes et internes séparément. Ensuite, une formulation intégrale indirecte est déduite des formulations externe et interne. Finalement, on établit une formulation variationnelle pour le fluide en terme de saut de pression (densité de double couche). Dans le cas de la structure, on établit la fonctionnelle associée.

Le chapitre 3 est dédié à l'application de la méthode des éléments finis (géométrie et choix des approximations physique et géométrique). Ceci nous permet d'avoir une forme discrète de chacun des deux fonctionnelles : fluide et structure. Ensuite, nous abordons le problème du traitement numérique des intégrales singulières et non singulières qui interviennent dans le fluide. Des tests de validations sont effectués pour le fluide (intégrales singulières, sphère pulsante, disque plan oscillant) et la structure (plaque rectangulaire mince soumise à une charge concentrée, modes de vibration d'une plaque mince horizontale dans l'air).

L'avant dernier chapitre est consacré à l'application de la formulation établie dans le chapitre 3 pour étudier le rayonnement acoustique généré par deux types d'éoliennes : une à axe vertical et l'autre à axe horizontal, sous les conditions aux limites de type Neumann (vitesse normale). Le champ de pression induit par l'éolienne à axe horizontal est utilisé pour étudier le comportement d'une structure élastique homogène et isotrope avoisinante.

Enfin le dernier chapitre (conclusion) présente sommairement une rétrospective ainsi que des recommandations pour des travaux futurs.

## CHAPITRE I

### MISE EN ÉQUATION DE COUPLAGE FLUIDE STRUCTURE

#### I.1. Mise en équation générales

Considérons une structure élastique, de volume  $\Omega_s$  et de frontière  $\Gamma_s$ , immergée dans un fluide occupant un domaine  $\Omega_f$ . Pour la formulation mathématique du problème découplé fluide et structure, nous adoptons une description eulérienne.

##### I.1.1 Tenseurs des déformations

Considérons l'hypothèse des petites perturbations. Le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}^s$  dans la structure est lié au vecteur déplacement  $u_i^s$  par la relation suivante :

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2} (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s) \quad (I.1)$$

et dans le fluide, le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}^f$  est lié au vecteur déplacement  $u_i^f$  par :

$$\varepsilon_{ij}^f = \frac{1}{2} (u_{i,j}^f + u_{j,i}^f) \quad (I.2)$$

En terme des vitesses  $v_i^s$ , dans le structure, et  $v_i^f$ , dans le fluide, les tenseurs de taux des déformations  $E_{ij}^s$  et  $E_{ij}^f$  sont donnés respectivement dans ces deux milieux par les expressions suivantes:

$$E_{ij}^s = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^s}{\partial t} = \frac{\mathbf{1}}{2} (v_{i,j}^s + v_{j,i}^s) \quad (\text{I.3})$$

$$E_{ij}^f = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^f}{\partial t} = \frac{\mathbf{1}}{2} (v_{i,j}^f + v_{j,i}^f) \quad (\text{I.4})$$

### I.1.2 Lois de comportements

Dans le cas d'une structure élastique homogène et anisotrope, le comportement du matériau constituant la structure est décrite par la loi de Hooke généralisée. Cette loi exprime le tenseur des contraintes de Cauchy ( $\sigma_{ij}^s$ ) en fonction du tenseur des déformations ( $\varepsilon_{ij}^s$ ) selon la relation suivante:

$$\sigma_{ij}^s = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^s \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{I.5})$$

$C_{ijkl}$  est le tenseur des modules d'élasticité d'ordre 4 et possède les propriétés suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} \quad (\text{I.6})$$

Le nombre total de coefficients élastiques formant le tenseur  $C_{ijkl}$  dépend de la symétrie du cristal formant le matériau élastique.

Dans le cas d'un matériau élastique homogène et isotrope, la loi de Hooke, formule (I.5), se simplifie et devient :

$$\sigma_{ij}^s = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_{ij}^s + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk}^s \delta_{ij} \right) \quad (I.7)$$

où  $\nu$  et  $E$  sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de Young.  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker et  $\varepsilon_{kk}^s$  est une notation abrégée de la trace du tenseur des déformations (somme des termes diagonaux du tenseur).

Dans ce travail, le fluide est considéré parfait, compressible et barotrope. Dans ces conditions, le tenseur des contraintes est défini par la relation :

$$\sigma_{ij}^f = -p\delta_{ij} \quad \text{dans } \Omega_f \quad (I.8)$$

$p$  est la pression eulérienne régnant dans le fluide. Dans le cas d'un milieu barotrope, la pression  $p$  n'est fonction que de la densité  $\rho$  ( $p=p(\rho)$ ).

### I.1.3 Équations de la conservation de la quantité de mouvement

Les deux équations qui décrivent la conservation de la quantité de mouvement dans les milieux solide et fluide, en absence de force de volume et en négligeant l'effet de la pesanteur, sont données respectivement par les formules suivantes:

$$\sigma_{ij,j}^s - \rho_s \frac{dv_i^s}{dt} = 0, \quad \text{dans } \Omega_s \quad (I.9)$$

$$\sigma_{ij,j}^f - \rho_f \frac{dv_i^f}{dt} = 0, \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I.10})$$

$\rho_s$  et  $\rho_f$  désignent respectivement les masses volumiques de chaque milieu solide et fluide.

#### I.1.4 Équation de conservation de la masse

Les deux équations qui décrivent la conservation de la masse respectivement dans les milieux solide et fluide sont données par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (\rho_s v_i^s)_{,i} = 0 \quad (\text{I.11})$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (\rho_f v_i^f)_{,i} = 0 \quad (\text{I.12})$$

#### I.1.5 Conditions aux limites

Dans ce travail, nous supposons qu'une partie de la frontière de la structure est encastree ou rigide ( $\bar{\Gamma}$ ) et l'autre partie est libre ( $\underline{\Gamma}$ ). Dans ce cas, les équations qui traduisent les conditions aux limites sont de type déplacement et force (voir Figure 1).

Sur la partie rigide, on a la condition en déplacement suivante :

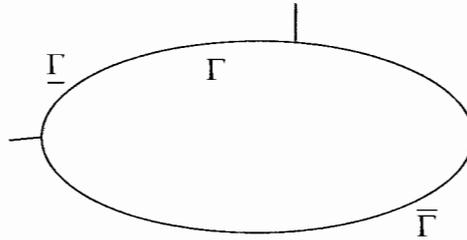
$$u_i|_{\bar{\Gamma}} = 0 \quad (\text{I.13})$$

Sur la partie de la frontière  $\underline{\Gamma} (= \Gamma - \bar{\Gamma})$ , on retrouve les conditions d'interface fluide-solide. Comme le fluide est parfait, donc non visqueux et n'adhère pas aux parois de la structure, seules les continuités de la vitesse normale et de la contrainte normale sont assurées. Ceci se traduit par les formules suivantes:

$$v_i^s \cdot n_i - v_i^f \cdot n_i \Big|_{\underline{\Gamma}_s} = 0 \quad (\text{I.14})$$

$$\sigma_{ij}^s \cdot n_j - \sigma_{ij}^f \cdot n_j \Big|_{\underline{\Gamma}_s} = 0 \quad (\text{I.15})$$

où  $n_j$  sont les composantes du vecteur normal extérieur,  $\mathbf{n}$ , à l'interface fluide-structure.



**Figure 1** : Répartition du domaine  $\Gamma$

### I.1.6 Conditions initiales

Pour compléter le problème, nous devons introduire les conditions initiales. Pour cela, on suppose qu'à l'instant initial, la structure et le fluide sont au repos. Ceci se traduit par les conditions mathématiques suivantes :

$$v_i^s \Big|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{I.16})$$

$$v_i^f \Big|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I.17})$$

## I.2. Linéarisation des équations

La linéarisation des équations qui gouvernent le milieu physique (fluide ou solide), permet d'assimiler les variables physiques et géométriques caractérisant le milieu à des petites perturbations autour de leurs états d'équilibre. Conséquemment, toutes les grandeurs physique et géométrique (vitesse, densité, pression, etc.) sont développables autour de leurs valeurs à l'état d'équilibre:

$$u_i^s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} + \alpha U_i^s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.1})$$

$$u_i^f(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} + \alpha U_i^f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.2})$$

$$v_i^s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} + \alpha V_i^s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.3})$$

$$v_i^f(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} + \alpha V_i^f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.4})$$

$$\rho_f(\mathbf{r}, t) = \rho_0^f + \alpha \bar{\rho}_f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.5})$$

$$\rho_s(\mathbf{r}, t) = \rho_0^s + \alpha \bar{\rho}_s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.6})$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p^0 + \alpha P(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.7})$$

$$\sigma_{ij}^s(\mathbf{r}, t) = \sigma_{ij}^0(\mathbf{r}, t) + \alpha \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.8})$$

$$\sigma_{ij}^f(\mathbf{r}, t) = -(p^0 + \alpha P) \delta_{ij} \quad (\text{I.18.9})$$

$$\varepsilon_{ij}^s(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}, t) + \alpha \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.10})$$

$$\Omega_s(\mathbf{r}, t) = \Omega_0^s + \alpha \bar{\Omega}_s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.11})$$

$$\Omega_f(\mathbf{r}, t) = \Omega_0^f + \alpha \bar{\Omega}_f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.12})$$

$$\Gamma_s(\mathbf{r}, t) = \Gamma_0^s + \alpha \bar{\Gamma}_s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.13})$$

$$\Gamma_f(\mathbf{r}, t) = \Gamma_0^f + \alpha \bar{\Gamma}_f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.18.13})$$

où  $\alpha$  est un nombre infiniment petit devant l'unité et qui est nul à l'instant initial.

Substituons les expressions des variables  $\sigma_{ij}^s$ ,  $\rho_s$ ,  $v_i^s$ ,  $p$ ,  $\rho_f$  et  $v_i^f$ , données par les formules ci-dessus, dans les équations de la conservation de la quantité de mouvement (I.9) et (I.10). Nous obtenons alors pour les milieux solide et fluide les équations suivantes :

$$\left( \sigma_{ij}^0 + \alpha \bar{\sigma}_{ij} \right)_{,j} - \left( \rho_0^s + \alpha \bar{\rho}_s \right) \frac{\partial (\alpha V_i^s)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.19})$$

$$\left[ - (p^0 + \alpha P) \delta_{ij} \right]_{,j} - \left( \rho_0^f + \alpha \bar{\rho}_f \right) \frac{\partial (\alpha V_i^f)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.20})$$

qui s'écrivent encore :

$$\alpha \bar{\sigma}_{ij,j} - \alpha \rho_0^s \frac{\partial V_i^s}{\partial t} - \alpha^2 \bar{\rho}_s \frac{\partial V_i^s}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.21})$$

$$- \alpha P_{,j} \delta_{ij} - \alpha \rho_0^f \frac{\partial V_i^f}{\partial t} - \alpha^2 \bar{\rho}_f \frac{\partial V_i^f}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.22})$$

Ainsi, en négligeant les termes d'ordre  $\alpha^2$ , les équations (I.21) et (I.22) se simplifient et deviennent :

$$\bar{\sigma}_{ij,j} - \rho_0^s \frac{\partial V_i^s}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.23})$$

$$P_{,j} \delta_{ij} + \rho_0^f \frac{\partial V_i^f}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.24})$$

À l'état initial, les masses volumiques des milieux solides et fluides sont supposées être constantes. En conséquence, par substitution des expressions (I.18.3)-(I.18.6) dans les équations de conservation de la masse (I.11) et (I.12), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0^s + \alpha \bar{\rho}_s) + [(\rho_0^s + \alpha \bar{\rho}_s)(\alpha V_i^s)]_{,i} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_{s,j}^0 \quad (\text{I.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0^f + \alpha \bar{\rho}_f) + [(\rho_0^f + \alpha \bar{\rho}_f)(\alpha V_i^f)]_{,i} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_{f,j}^0 \quad (\text{I.26})$$

Soient encore :

$$\alpha \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial t} + [\alpha^2 \bar{\rho}_s V_i^s + \alpha \rho_0^s V_i^s]_{,i} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.27})$$

$$\alpha \frac{\partial \bar{p}_f}{\partial t} + [\alpha^2 \bar{\rho}_f V_i^f + \alpha \rho_0^f V_i^f]_{,i} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.28})$$

En négligeant les termes d'ordre  $\alpha^2$ , les équations (I.27) et (I.28) deviennent:

$$\frac{\partial \bar{p}_s}{\partial t} + \rho_0^s V_{i,i}^s = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.29})$$

$$\frac{\partial \bar{p}_f}{\partial t} + \rho_0^f V_{i,i}^f = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.30})$$

Pour compléter le problème, il faut aussi linéariser les conditions aux limites et initiales.

Dans ces conditions, les conditions aux limites de type déplacement (I.13)-(I.14) et de force (I.15) deviennent respectivement à l'ordre 1 :

$$U_i^s \Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{0} \quad (\text{I.31})$$

$$U_i^s \cdot n_i^0 - U_i^f \cdot n_i^0 \Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{0} \quad (\text{I.32})$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^s \cdot n_i^0 - P \delta_{ij} \cdot n_i^0 \Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{0} \quad (\text{I.33})$$

Et les conditions initiales (I.16) et (I.17) s'écrivent :

$$V_i^s \Big|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.34})$$

$$V_i^f \Big|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.35})$$

Du point de vue cinématique, le mouvement du fluide peut être décomposé d'un mouvement non rotationnel et rotationnel dépendant du temps. Or, l'opérateur rotationnel associé à l'équation de mouvement de fluide linéarisée étant :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{V}_f] = cte, \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.36})$$

En conséquence de (I.36), le vecteur tourbillon dans le fluide est indépendant du temps :

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{V}_f] = cte, \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.37})$$

Et puisque le fluide est initialement au repos alors le vecteur tourbillon est nul à tout moment dans le fluide.

### **I.2.1 Équation d'onde : équation d'Alembert**

Dans ce travail, le fluide est supposé être barotrope. Ce qui se traduit en développant la pression au voisinage de l'état d'équilibre par la formule suivante :

$$(p - p_0) = \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho_f} \right]^0 (\rho^f - \rho_0) \quad (\text{I.38})$$

avec :

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial \rho_f} \right]^0 = c_0^2 \quad (\text{I.39})$$

$c_0$  représente la vitesse du son dans le fluide au repos. Et selon (I.18.5) et (I.18.7) on a :

$$(\rho^f - \rho_0^f) = \alpha \bar{\rho}_f(r, t) \quad (\text{I.40})$$

$$(p - p_0) = \alpha P(r, t) \quad (\text{I.41})$$

En substituant (I.39)-(I.41) dans (I.38), nous obtenons :

$$P(r, t) = c_0^2 \bar{\rho}_f(r, t) \quad (\text{I.42})$$

qui est équivalente à :

$$\bar{\rho}_f(r, t) = \frac{P(r, t)}{c_0^2} \quad (\text{I.43})$$

L'utilisation de la formule (I.43) dans l'équation de conservation de la masse (I.30) permet d'obtenir :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) + \rho_0^f V_{i,i}^f = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_0^f \quad (\text{I.44})$$

Et une dérivation par rapport au temps de (I.44) conduit :

$$\frac{\mathbf{1}}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\mathbf{r}, t) + \rho_0^f \frac{\partial V_{i,j}^f}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_0^f \quad (\text{I.45})$$

De même, une dérivation dans l'espace de l'équation de la quantité de mouvement (I.24)

donne :

$$P_{,ii} + \rho_0^f \frac{\partial V_{i,i}^f}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (\text{I.46})$$

Finalement en éliminant le terme  $\rho_0^f (\partial V_{i,i}^f / \partial t)$  des équations (I.45) et (I.46), nous déduisons l'équation d'onde, dite équation d'Alembert :

$$P_{,ii} - \frac{\mathbf{1}}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_0^f \quad (\text{I.47})$$

Dans notre étude de couplage fluide-structure, l'équation (I.47) sera considérée au lieu de l'équation de mouvement (I.24).

## **I.2.2 Structure élastique soumise à des charges en pression**

Dans cette étude, nous considérons un problème découplé d'interaction fluide-structure. Pour la modélisation de la charge en pression acoustique sur une structure élastique placée arbitrairement dans l'espace, on a selon l'équation de mouvement (I.23), les conditions aux limites (I.31) et (I.33) le problème suivant à résoudre :

$$\overline{\sigma}_{ij,j} - \rho_0^s \frac{\partial V_i^s}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.48})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$U_i^s \Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{0} \quad (\text{I.49})$$

$$\overline{\sigma}_{ij}^s \cdot n_i^0 - P \delta_{ij} \cdot n_i^0 \Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{0} \quad (\text{I.50})$$

### **I.2.3. Récapitulation des équations qui gouvernent le couplage fluide structure**

Le comportement du système fluide-structure est considéré découplé autour de son état d'équilibre. Ce problème est décomposé en deux parties : i) le problème de rayonnement acoustique d'un corps vibrant dans un milieu acoustique linéaire qui s'étend à l'infini et ii) le problème de vibration dynamique d'une structure élastique, homogène et isotrope. La résolution du premier problème de rayonnement de la structure, qui est régi par les équations (I.46)-(I.47), permet de déterminer le champs de pression acoustique  $P(r,t)$  à partir de la connaissance du champ de vitesse normale  $V_n(r,t)$  (conditions aux limites de type de Neumann). Ensuite, en considérant le champ de pression acoustique  $P(r,t)$  comme charge mécanique sur la structure, nous calculons, via les équations (I.48) et (I.50), le champ de déplacement induit par une structure placée arbitrairement dans l'espace englobant la structure rayonnante.

Énoncé du Problème (P')

*Dans la structure*

$$\bar{\sigma}_{ij,j} = \rho_0^s \frac{\partial V_i^s}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.51})$$

Avec :

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad \text{dans } \Omega_0^s \quad (\text{I.52})$$

*Dans le fluide*

$$P_{,ii} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r,t) \quad (\text{I.53})$$

$$P_{,ii} + \rho_0^f \frac{\partial V_{i,i}^f}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.54})$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \bar{V}_f] = 0 \quad (\text{I.55})$$

*Conditions aux limites*

$$U_i^s \Big|_{\Gamma_0} = 0 \quad (\text{I.56})$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^s \cdot \mathbf{n}_i^0 - P \delta_{ij} \cdot \mathbf{n}_i^0 \Big|_{\Gamma_0} = 0 \quad (\text{I.57})$$

*Conditions initiales*

$$V_i^s \Big|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (I.58)$$

$$V_i^f \Big|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_f^0 \quad (I.59)$$

### **I.3 Problèmes harmoniques et couplage fluide-structure**

En vue de résoudre le problème découplé fluide et structure, nous allons, dans un premier temps, établir les équations différentielles qui gouvernent le rayonnement acoustique d'une structure vibrante immergée dans un fluide parfait et compressible en termes de pression et de vitesse. Pour cela, considérons un état de vibrations entretenues de la structure pour une pulsation  $\omega$  donnée. La dépendance est alors harmonique en termes de pression et de vitesse dans le fluide :

$$P(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( \mathbf{P}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right) \quad (I.60)$$

$$V_0^s(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( V^s(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right) \quad (I.61)$$

L'écriture ci-dessus relie les valeurs complexes de la pression et de la vitesse dans le fluide à leurs valeurs réelles correspondantes. Re désigne la partie réelle.

### I.3.1 Fluide parfait

Pour obtenir l'expression de l'équation de mouvement en harmonique dans le fluide, substituons dans l'équation d'onde (I.53) l'expression harmonique de la pression donnée par (I.60), nous obtenons alors :

$$\Delta P(r) + k^2 P(r) = 0 \quad (\text{I.62})$$

L'équation (I.62) représente l'équation classique de Helmholtz qui régit le rayonnement acoustique du fluide.  $k = \frac{\omega}{c^0}$  représente le nombre d'onde acoustique.

Pour compléter la description, exprimons la relation qui lie la pression acoustique à la vitesse. Ainsi, selon la formule vectorielle de (I.54) :

$$\frac{\partial \vec{V}_f(r,t)}{\partial t} = - \frac{\vec{\nabla} p(r,t)}{\rho_0^f} \quad (\text{I.63})$$

Nous obtenons, dans le cas d'un problème harmonique :

$$\vec{\nabla} p(r) = +j\omega\rho_0^f \vec{V}_f(r) \quad (\text{I.64})$$

Cette relation exprime la condition en vitesse (condition aux limites de Neumann) qui va être utilisée dans ce travail pour calculer le champ de pression acoustique induit par une structure vibrante.

Soulignons que le passage au problème harmonique entraîne une carence d'information sur le temps d'où la nécessité d'ajouter la condition de Sommerfeld sur le champ de pression dans le fluide acoustique (Sommerfeld, 1949) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial P}{\partial r} - jkP \right| = 0 \quad (\text{I.65})$$

Cette condition fixe le comportement de la solution de l'équation de Helmholtz à l'infini et assure en même temps son unicité.

En conclusion, le problème harmonique régi par l'équation de Helmholtz est un problème bien posé qui admet une solution unique (Sommerfeld, 1949).

### **I.3.2 Structure élastique mince et isotrope**

Pour obtenir l'expression du mouvement de la structure dans le cas harmonique, il suffit simplement de substituer (I.61) dans (I.51) :

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \omega^2 \rho_0^s U^s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.66})$$

Et en considérant (I.52), l'équation ci-dessus devienne :

$$C_{ijkl} U_{k,lj}^s + \omega^2 \rho_0^s U_j^s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.67})$$

### I.3.3 Conditions aux limites

Pour évaluer l'effet de la pression acoustique, générée par une structure vibrante, sur une structure placée arbitrairement dans l'espace fluide, les conditions d'interface suivante doivent être considérées :

$$C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot n_j^0 + p \delta_{ij} \cdot n_j^0 \Big|_{\Gamma_0^s} = \mathbf{0} \quad (\text{I.68})$$

$$U_k^s \Big|_{\Gamma_0^s} = \mathbf{0} \quad (\text{I.69})$$

En définitive, le problème ( $P^2$ ) qu'on s'attache à résoudre s'écrit:

#### Enoncé du Problème ( $P^2$ )

*Équation de Helmholtz pour le fluide*

$$\Delta P(\mathbf{r}) + k^2 P(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_0^f \quad (\text{I.70})$$

*Équation de la structure :*

$$C_{ijkl} U_{kl,j}^s + \omega^2 \rho_0^s U_j^s = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s^0 \quad (\text{I.71})$$

*Avec*

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad \text{dans } \Omega_0^s \quad (\text{I.72})$$

*Condition limite (encastrement et homogène) pour la structure :*

$$U_k^s \Big|_{\Gamma_0^s} = \mathbf{0} \quad (\text{I.73})$$

*Condition limite de type Newman (I.64)*

$$\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} + j\omega\rho_0^f V_n(\mathbf{r}) \quad (\text{I.74})$$

*Condition de couplage fluide -structure: continuité de la contrainte normale*

$$C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot n_j^0 + P \delta_{ij} \cdot n_j \Big|_{\Gamma_0^s} = \mathbf{0} \quad (\text{I.75})$$

*Condition de rayonnement de Sommerfeld :*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial P}{\partial r} - jkP \right| = \mathbf{0} \quad (\text{I.76})$$

À partir de ce problème nous allons passer à une formulation variationnelle afin d'étudier le problème de rayonnement acoustique d'une structure éolienne à axe horizontal et analyser son effet en pression sur une structure avoisinante.

## **CHAPITRE II**

### **FORMULATION VARIATIONNELLE PAR ÉQUATION INTÉGRALE DU PROBLÈME DE COUPLAGE INDIRECTE FLUIDE-STRUCTURE**

#### **II.1 Fonctionnelle de fluide**

Afin d'éviter les difficultés associées à la résolution du problème de rayonnement acoustique par la méthode des équations intégrales (Sayhi, 1979), nous allons associer une formulation variationnelle pour le fluide. L'utilisation d'une telle formulation a été proposée dans (Nedelec et Kupradze, 1963) et permet, après certaines transformations mathématiques, d'avoir des noyaux réguliers.

##### **II.1.1 Formulation par équations intégrales directe**

Cette formulation est basée sur la représentation intégrale de l'équation de Helmholtz en fonction des variables physique (pression et/ou vitesse acoustique). Cette méthode peut être appliquée autant à un problème acoustique externe qu'interne (Alia, 2004).

### II.1.1.1 Solution fondamentale de Green dans $\mathbb{R}^3$

Considérons le rayonnement en champ libre d'une source ponctuelle située à la position ' $x \in \mathbb{R}^3$ ' du domaine fluide et son effet en un point ' $y \in \mathbb{R}^3$ '. Selon la mécanique des ondes, le champ acoustique rayonné par la source obéit à l'équation de Helmholtz inhomogène suivante :

$$\Delta_y G(x, y) + k^2 G(x, y) = -\delta(x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{II.1})$$

où  $G(x, y)$  est la solution fondamentale de l'équation différentielle (II.1) et qui vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld.  $\delta$  représente la mesure de Dirac et possédant la propriété suivante pour tout fonction régulière  $f(y)$ :

$$\int_{\Omega} f(y) \delta(x - y) d\Omega = f(x) \quad (\text{II.2})$$

La solution fondamentale de l'équation de Helmholtz est unique est donnée en 3D par :

$$G(x, y) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \quad (\text{II.3})$$

avec :

$$R = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \quad (\text{II.4})$$

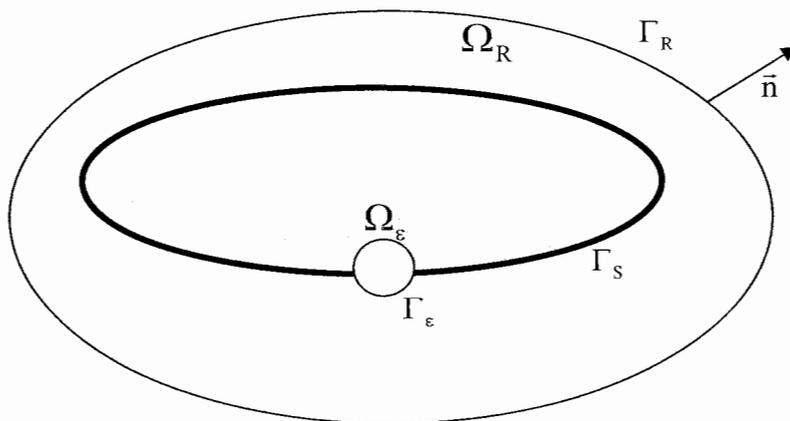
Physiquement  $G(x, y)$  représente le potentiel créé en un point ' $y$ ' de coordonnées  $(y_1, y_2, y_3)$  par une source sphérique unitaire située au point ' $x$ ' de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ .

**Remarque :** si on considère  $\delta(x-y)$  comme mesure, dans l'équation inhomogène de Helmholtz (II.1), au lieu de  $(-\delta(x-y))$ , la solution fondamentale est alors identique à (II.3) mais de signe opposé.

## II.1.1.2 Représentation intégrale de la pression

### II.1.1.2.a Problème externe

Pour établir la formulation intégrale pour le problème extérieur, considérons un grand domaine sphérique  $\Omega_R$  délimité par une surface sphérique  $\Gamma_R$  de rayon  $R$  centré à l'origine d'un repère cartésien. À l'intérieur du domaine  $\Omega_R$  considérons une structure vibrante de volume  $\Omega_S$  et de surface  $\Gamma_S$ . Pour appliquer le théorème de Green, considérons un petit volume sphérique  $\Omega_\varepsilon$  de rayon  $\varepsilon$ , centré sur un point 'y' de la structure vibrante, et de surface  $\Gamma_\varepsilon$ .



**Figure 2 :** Définition du domaine acoustique pour le problème extérieur

Multiplions l'équation de Helmholtz par la solution élémentaire  $G(x,y)$  et intégrons sur le domaine fluide intérieur à la sphère. On obtient :

$$\int_{\Omega_R} G(x,y)(\Delta_y + k^2)P_y d\Omega_R = 0 \quad (II.5)$$

Soit encore :

$$\int_{\Omega_R} G(x,y)\Delta_y P_y d\Omega_R + \int_{\Omega_R} G(x,y)k^2 P_y d\Omega_R = 0 \quad (II.6)$$

Appliquons l'intégration par partie sur le premier terme droite de (II.6), nous obtenons alors pour :

$$\int_{\Gamma_s \cup \Gamma_R} G(x,y)\vec{\nabla}_y P_y \cdot \vec{n} d\Gamma_y - \int_{\Omega_R} \vec{\nabla}_y G(x,y) \cdot \vec{\nabla}_y P_y d\Omega_R + \int_{\Omega_R} G(x,y)k^2 P_y d\Omega_R = 0 \quad (II.7)$$

Appliquons encore l'intégration par partie sur le deuxième terme du membre de droite de (II.7), nous obtenons alors :

$$\int_{\Gamma_R \cup \Gamma_S} G(x,y)\vec{\nabla}_y P_y \cdot \vec{n}_y d\Gamma_y - \int_{\Gamma_R \cup \Gamma_S} P_y \vec{\nabla}_y G(x,y) \cdot \vec{n}_y d\Gamma_y + \int_{\Omega_R} P_y \Delta_y G(x,y) d\Omega_R + \int_{\Omega_R} G(x,y)k^2 P_y d\Omega_R = 0 \quad (II.8)$$

Soit encore :

$$\int_{\Gamma_R \cup \Gamma_S} \left[ G(x,y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y + \int_{\Omega_R} P_y [\Delta + k^2] \cdot G(x,y) d\Omega_R = 0 \quad (II.9)$$

Comme le noyau  $G(x,y)$  vérifie l'équation de Helmholtz inhomogène (II.1), nous déduisons :

$$\int_{\Omega_R} P_y \delta(x) d\Omega_R = \int_{\Gamma_R \cup \Gamma_S} \left[ G(x,y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \quad (\text{II.10})$$

Et en tenant compte de la propriété de la fonction Dirac (II.2) et de la condition de rayonnement en champ libre de Sommerfeld (I.75) (intégrale sur  $\Gamma_R$  est nulle) nous obtenons :

$$P(x) = \int_{\Gamma_S} \left[ G(x,y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y, \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{II.11})$$

**Remarque :** En faisant tendre le point «  $x \in \Omega$  » vers un point «  $x_0 \in \Gamma_s$  » on a pour la formulation établie ci-dessus l'expression suivante (Alia, 2004)

$$C_0(x_0)P(x) = \int_{\Gamma_S} \left[ G(x_0,y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x_0,y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \quad (\text{II.12})$$

$C(x)$  est un coefficient qui dépend de  $G$  et de la géométrie du domaine considéré:

### II.1.1.2.b Problème interne

Pour établir la formulation intégrale directe, pour le problème interne, considérons un volume  $\Omega_S$  délimité par une surface sphérique  $\Gamma_S$  (voir figure 3). En un point ' $x_0$ ' appartenant à la surface interne de  $\Gamma_S$ , la fonction fondamentale  $G$  est discontinue et non différentiable. Afin de contourner cette singularité en ' $x_0$ ', construisons une sphère infinitésimale de volume  $\Omega_\varepsilon$ , de surface  $\Gamma_\varepsilon$  et de rayon  $\varepsilon$  centré sur le point  $x_0$ . Un raisonnement similaire au problème externe conduit à la forme intégrale suivante :

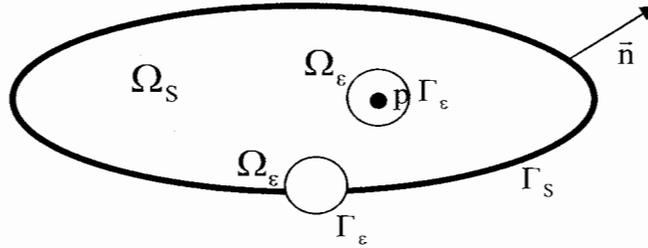
$$\int_{\Gamma_S \cup \Gamma_\varepsilon} \left[ G(x, y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y + \int_{\Omega_S - \Omega_\varepsilon} P_y [\Delta + k^2] \cdot G(x, y) d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{II.14})$$

Comme le noyau  $G(x, y)$  vérifie l'équation de Helmholtz inhomogène (II.1), nous obtenons alors :

$$\int_{\Omega_S - \Omega_\varepsilon} P_y \delta(x) d\Omega_R = \int_{\Gamma_S \cup \Gamma_\varepsilon} \left[ G(x, y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \quad (\text{II.15})$$

Et en tenant compte de la propriété de la fonction Dirac (II.2) et en remplaçant l'élément différentiel de surface  $d\Gamma_\varepsilon$  par son expression en coordonnées sphérique et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro nous obtenons alors :

$$P(x) = \int_{\Gamma_s} \left[ G(x, y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \quad (\text{II.16})$$



**Figure 3 :** Définition du domaine acoustique pour le problème extérieur

**Remarque :** lorsque 'x<sub>0</sub>' est un point de la surface, le volume  $\Omega_\epsilon$  n'est pas nécessairement une sphère. Dans ce cas, la formulation (II.16) établi ci-dessous devient dans le cas général :

$$C_0(x_0)P(x) = \int_{\Gamma_s} \left[ G(x_0, y) \frac{\partial P_y}{\partial n_y} - P_y \frac{\partial G(x_0, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$C_0(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in \Omega_s \\ - \int_{\Gamma_s} \partial G / \partial n d\Gamma & \text{si } x_0 \in \Omega_s \\ 1 & \text{si } x_0 \notin (\Omega_s \cup \Gamma_s) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

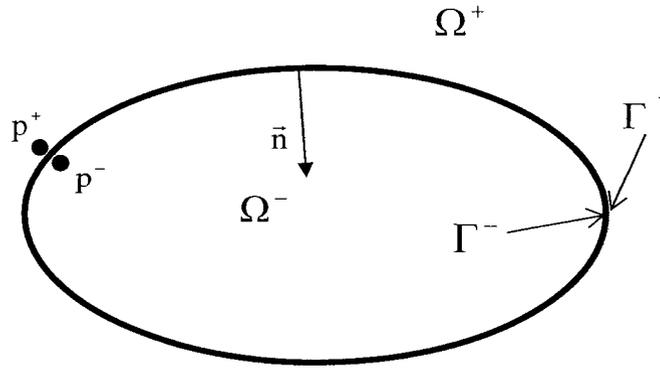
### II.1.2 Formulation par équations intégrales indirecte

Pour établir la formulation intégrale indirecte, il suffit de substituer les variables ‘ $p$ ’ et ‘ $\partial p/\partial n$ ’ qui interviennent dans la formulation intégrale directe (II.16) par des variables axillaires telles que les sauts de pression (potentiel de double couche, désigné par  $q$ ) et de sa dérivée selon une direction normale (potentiel de simple couche, désigné par  $q^*$ ). À cet effet, considérons un point ‘ $y$ ’, appartenant à l’interface  $\Gamma_0$  qui sépare le milieu fluide  $\Omega_0$  en deux régions : domaine externe  $\Omega^+$  de frontière  $\Gamma^+$  et domaine interne  $\Omega^-$  de frontière  $\Gamma^-$  (voir figure 4). On définit alors les sauts ‘ $q$ ’ et ‘ $q^*$ ’ par les formules suivantes :

$$q(y) = \llbracket P(y) \rrbracket = P^+(y^+) - P^-(y^-), \quad y^+ \in \Gamma^+, y^- \in \Gamma^-, y \in \Gamma \quad (\text{II.19})$$

$$q^*(y) = \left[ \left[ \frac{\partial P(y)}{\partial n_y} \right] \right] = \frac{\partial P^+(y^+)}{\partial n_y^+} - \frac{\partial P^-(y^-)}{\partial n_y^-}, \quad y^+ \in \Gamma^+, y^- \in \Gamma^-, y \in \Gamma \quad (\text{II.20})$$

où  $y^+$  et  $y^-$  sont deux points appartenant respectivement aux surfaces externe  $\Gamma^+$  et interne  $\Gamma^-$  et sur lesquelles les pressions externe ‘ $p^+$ ’ et interne ‘ $p^-$ ’ sont définies.



**Figure 4 :** Définition du domaine acoustique pour la méthode indirecte

Ainsi, en un point  $x$  appartenant au milieu fluide externe  $\Omega^+$ , on a, selon l'équation (II.17), la forme intégrale suivante:

$$C^+(x)p(x) = \int_{\Gamma^+} \left[ G(x, y^+) \frac{\partial p^+(y^+)}{\partial n_y^+} - p^+(y^+) \frac{\partial G(x, y^+)}{\partial n_y^+} \right] d\Gamma_y, \quad x \in \Omega^+, y^+ \in \Gamma^+ \quad (\text{II.21})$$

et pour un point  $x$  appartenant au milieu fluide interne  $\Omega^-$ , on a la forme intégrale suivante :

$$C^-(x)p(x) = \int_{\Gamma^-} \left[ G(x, y^-) \frac{\partial p^-(y^-)}{\partial n_y^-} - p^-(y^-) \frac{\partial G(x, y^-)}{\partial n_y^-} \right] d\Gamma_y \quad x \in \Omega^-, y^- \in \Gamma^- \quad (\text{II.22})$$

$n^+$  et  $n^-$  sont respectivement des vecteurs normaux extérieurs définis sur les frontières  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ .

Pour établir la formulation intégrale indirecte, considérant les propriétés suivantes sur l'interface  $\Gamma$ , supposée suffisamment régulière (Alia, 2004):

$$C^+(x) + C^-(x) = \mathbf{1} \quad (\text{II.23.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y^+} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y^-} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \quad (\text{II.23.2})$$

$$\begin{cases} y^+ \in \Gamma^+ \\ y^- \in \Gamma^- \end{cases} \rightarrow y \in \Gamma \quad (\text{II.23.3})$$

On déduit alors, par sommation des équations intégrales (II.21) et (II.22), l'expression de la pression acoustique en tout point du milieu fluide (Alia, 2004) :

$$p(x) = \int_{\Gamma_y} \left[ G(x, y) q^*(y) - q(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right] d\Gamma_y \quad x \in \Omega, y \in \Gamma \quad (\text{II.24})$$

Pour les problèmes externe et interne, séparément, en terme des densités de double couche 'q' et de simple couche 'q\*', on démontre aisément que les pressions externe  $p^+$  et interne  $p^-$  sont définies en tout point x, appartenant respectivement aux domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ , par les expressions suivantes (Alia, 2004):

$$p_x^+ = C_x^+ q_x + \int_{\Gamma_y^+} \left[ G(x^+, y^+) q^*(y^+) - q(y^+) \frac{\partial G(x^+, y^+)}{\partial \mathbf{n}_y^+} \right] d\Gamma_y, \quad x^+ \in \Omega^+, y^+ \in \Gamma^+ \quad (\text{II.25.1})$$

$$p_x^- = -C_x^- q_x^- + \int_{\Gamma_y^+} \left[ G(x^-, y^-) q^*(y^-) - q(y^-) \frac{\partial G(x^-, y^-)}{\partial n_y^-} \right] d\Gamma_y, \quad x^- \in \Omega^-, y^- \in \Gamma^- \quad (\text{II.25.2})$$

### II.1.3 Condition aux limites de type Neumann

Dans le cas d'un problème défini par les conditions aux limites de type Neumann, la vitesse est imposée sur la surface frontière et par conséquent le potentiel de simple couche est nul :

$$q^*(y) = \left[ \frac{\partial P(y)}{\partial n_y} \right] = -j\omega \vec{V}_y \cdot \vec{n}_y + j\omega \vec{V}_y \cdot \vec{n}_y = \mathbf{0} \quad (\text{II.26})$$

Dans ces conditions, l'équation (II.24) se simplifie et devient:

$$p(x) = - \int_{\Gamma_y} \left[ q(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y, \quad x \in \Omega, y \in \Gamma \quad (\text{II.27})$$

Ainsi, en connaissant la densité de double couche 'q' on peut évaluer le champ de pression en tout point « x » du domaine  $\Omega$  via l'équation intégrale (II.27).

Pour les problèmes externes et internes respectivement, on déduit des équations (II.25.1) et (II.25.2) les formules intégrales suivantes :

$$p_x^+ = C_x^+ q_x - \int_{\Gamma_y^+} \left[ q(y^+) \frac{\partial G(x^+, y^+)}{\partial n_y^+} \right] d\Gamma_y, \quad x^+ \in \Omega^+, y^+ \in \Gamma^+ \quad (\text{II.28.1})$$

$$p_x^- = -C_x^- q_x^- - \int_{\Gamma_y^+} \left[ q(y^-) \frac{\partial G(x^-, y^-)}{\partial n_y^-} \right] d\Gamma_y, \quad x^- \in \Omega^-, y^- \in \Gamma^- \quad (\text{II.28.2})$$

### II.1.3.1 Évaluation de la densité de double couche

L'introduction de la condition cinématique en terme de vitesse (conditions aux limites de type Neumann), permet l'évaluation de la densité de double couche  $q$ . À cet effet, faisant tendre un point 'x' appartenant au milieu fluide  $\Omega_f$  vers un point «  $x_0$  » appartenant à l'interface  $\Gamma$ . Dans ce cas, l'équation (II.27) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{x \rightarrow x_0} = \bar{n}_x \cdot \nabla_x p_x \Big|_{x \rightarrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \bar{n}_x \cdot \nabla_x \int_{\Gamma_y} \left[ q(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \right), \quad x \in \Omega_f \text{ et } x_0 \in \Gamma \quad (\text{II.29})$$

Considérons maintenant les conditions en terme de vitesse (I.64):

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{x \rightarrow x_0} = +j\rho_0 \omega V_n(x_0) \quad (\text{II.30})$$

Dans ce cas, l'équation intégrale (II.29) devient :

$$j\rho_0 \omega V_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \bar{n}_x \cdot \nabla_x \int_{\Gamma_y} \left[ q(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \right), \quad x \in \Omega_f \text{ et } (y, x_0) \in \Gamma \quad (\text{II.31})$$

De l'équation (II.31), on constate que si l'on dérive à l'intérieur du signe somme on obtient une intégrale divergente. En conséquence, il ne faut pas intégrer au sens classique mais prendre la partie finie associée à l'expression (II.31), (Erchiqui, 1995) :

$$j\rho_0\omega V_n(x) = \text{PF} \left( \int_{\Gamma_y} \left[ q(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x} \right] d\Gamma_y \right), \quad x, y \in \Gamma \quad (\text{II.32})$$

C'est une équation intégrale de type Fredholm de première espèce. L'évaluation de la partie finie de (II.32) est épineuse et nécessite des transformations mathématiques pour sa mise en œuvre informatique (Sayhi, 1979). Pour contourner ce problème, on va utiliser une formulation variationnelle par équation intégrale (Erchiqui, 1995).

#### II.1.4 Formulation variationnelle indirecte

Parmi les méthodes utilisées pour la résolution de l'équation (II.32) il y a la méthode des collocations (Filippi, 1977). Toutefois, cette technique rencontre des difficultés particulièrement dans l'évaluation de la partie finie de l'intégrale lorsque le point 'x' tends vers le point 'y'. En effet, dans cette situation, la distance  $r = \|x - y\|$  tends vers zéro et par conséquent  $G(x,y) \rightarrow C^{te}/0$ . Pour éviter ce calcul, nous allons transformer l'équation (II.32) en équation variationnelle équivalente. La formulation résultante permet d'éviter le calcul de la partie finie et conduit après discrétisation à un système algébrique symétrique (Erchiqui, 1995).

Désignons par  $q'$  une fonction arbitraire appartenant un espace de fonctions suffisamment dérivables. La pondération de l'équation (II.32) par  $q'$  permet l'obtention de l'équation variationnelle suivante :

$$J_f(q, q') + jw\rho_0 \int_{\Gamma_y} q' V_n d\Gamma_y = \mathbf{0} \quad (\text{II.33})$$

avec :

$$J_f(q, q') = \left( \int_{\Gamma_y} \left[ q(y) q'(x) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \right] d\Gamma_x d\Gamma_y \right), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (\text{II.34})$$

On constate de (II.34) facilement que la fonctionnelle  $J(q, q')$  est bilinéaire et symétrique :

$$J_f(q, q') = J_f(q', q) \quad (\text{II.35})$$

En conséquence, la solution de l'équation variationnelle (II.33), en terme de la densité de double couche 'q', est dictée par la stationnarité la fonctionnelle suivante (Erchiqui, 1995) :

$$F_f(q) = \frac{1}{2} J_f(q, q) + jw\rho_0 \int_{\Gamma_y} q V_n d\Gamma_y \quad (\text{II.36})$$

et la solution est alors donnée par la résolution de l'équation variationnelle suivante :

$$\delta F_f(q) = \delta \left[ \frac{1}{2} J(q, q) + j\omega\rho_0 \int_{\Gamma_y} q V_n d\Gamma_y \right] = \mathbf{0} \quad (\text{II.37})$$

Pour éviter le calcul explicite de la partie finie associée à la résolution de l'équation (II.37), il est nécessaire de transformer la fonctionnelle  $J(q, q')$  sous une forme régulière. Pour cela, nous utilisons l'approche proposée dans (Hamdi, 1988). Ainsi, après transformation de la forme bilinéaire (II.34), nous obtenons, dans le cas d'une interface suffisamment régulière, la forme suivante (Annexe A):

$$J_f(q, q') = - \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} \left[ G(x, y) \left[ k^2 (\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y) - (\vec{n}_x \times \nabla_x q'(x)) \cdot (\vec{n}_y \times \nabla_y q(y)) \right] \right] d\Gamma_x d\Gamma_y \quad (\text{II.38})$$

Finalement, en introduisant (II.38) dans l'équation variationnelle (II.36) et ensuite dans (II.37), nous obtenons l'expression de l'équation variationnelle à résoudre suivante:

$$\delta \left( - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} \left[ G(x, y) \left[ k^2 (\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y) q_x q_y - (\vec{n}_x \times \nabla_x q(x)) \cdot (\vec{n}_y \times \nabla_y q(y)) \right] \right] d\Gamma_x d\Gamma_y + j\omega\rho_0 \int_{\Gamma_x} V_n q d\Gamma_x \right) = \mathbf{0} \quad (\text{II.39})$$

La résolution de cette équation permet de déterminer le potentiel de double couche ( $q$ ) en tout point de la surface  $\Gamma$ .

En conclusion, la connaissance du champ des ( $q$ ) dans le cas des conditions aux limites de type Neumann, permet, d'une part, selon (II.27), d'évaluer le champ de la pression en tout point du milieu fluide et, d'autre part, selon (II.28.1) et (II.28.2), d'évaluer les pressions associées aux problèmes externe et interne séparément.

## II.2. Fonctionnelle de la structure

Dans la formulation intégrale des problèmes de la mécanique des structures, il existe une variété de formulations basées sur la méthode des résidus pondérés (Galerkin, Ritz, etc.) ainsi que sur le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie. Après discrétisation par éléments finis, ces formulations conduisent, généralement dans le cas des petites déformations à des résultats satisfaisants.

Dans ce travail on va utiliser l'approche basée sur le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie. À cet effet, considérons un vecteur arbitraire et régulier  $U_i^*$  sur  $\Omega_s^0$ . La pondération de l'équation (I.71) par  $U_i^*$  conduit à l'équation suivante :

$$\int_{\Omega_s^0} [C_{ijkl} \cdot U_{k,lj}^s \cdot U_i^* + \omega^2 \rho_0^s U_i^s \cdot U_i^*] d\Omega_s^0 = 0 \quad (\text{II.40})$$

L'application de l'intégrale par partie sur le premier terme de droite de (II.40) permet d'obtenir :

$$\int_{\Omega_s^0} [C_{ijkl} \cdot U_{k,lj}^s \cdot U_i^*] d\Omega_s^0 = - \int_{\Omega_s^0} [C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot U_{i,j}^*] d\Omega_s^0 + \int_{\Gamma_s^0} C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot n_j^0 \cdot U_i^* d\Gamma_s^0 \quad (\text{II.41})$$

La formule intégrale (II.40) devient alors :

$$\int_{\Omega_s^0} [C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot U_{i,j}^* - \omega^2 \rho_0^s U_i^s \cdot U_i^*] d\Omega_s^0 - \int_{\Gamma_s^0} C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot n_j^0 \cdot U_i^* d\Gamma_s^0 = 0 \quad (\text{II.42})$$

En tenant compte de (I.74), on déduit pour (II.42) la formulation suivante :

$$\int_{\Omega_s^0} [C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot U_{i,j}^* - \omega^2 \rho_0^s U_i^s \cdot U_i^*] d\Omega_s^0 = - \int_{\Gamma_s^0} P U_n^* d\Gamma_s^0 \quad (\text{II.43})$$

Cette équation se compose de la forme bilinéaire symétrique:

$$J_s(U_i^s, U_i^*) = \int_{\Omega_s^0} [C_{ijkl} \cdot U_{k,l}^s \cdot U_{i,j}^* - \omega^2 \rho_0^s U_i^s \cdot U_i^*] d\Omega_s^0 \quad (\text{II.44})$$

et de la forme linéaire:

$$L_s(U_i^*) = \int_{\Gamma_s^0} P U_n^* d\Gamma_s^0 \quad (\text{II.45})$$

La forme bilinéaire de  $J_s(U_i^s, U_i^*)$  est symétrique, il s'ensuit que la solution  $U_i$  de l'équation variationnelle (II.43) rend stationnaire la fonctionnelle suivante :

$$F_s(U) = \frac{1}{2} J_s(U_i^s, U_i^s) + L_s(U_i^s) \quad (\text{II.46})$$

c'est-à-dire :

$$\delta F_s(U) = \delta \left[ \frac{1}{2} J_s(U_i^s, U_i^s) + L_s(U_i^s) \right] = \mathbf{0} \quad (\text{II.47})$$

**Remarque :** le premier terme de droite de l'intégral (II.43) représente l'énergie interne associé à la déformation de la structure, le deuxième terme représente l'énergie cinétique et le dernier terme représente l'énergie potentielle acquise par la structure lors du chargement.

### II.3 Stratégie de résolution du problème découplé fluide-structure

La stratégie adoptée est la suivante :

- i) via les conditions aux limites de Newman (vitesse imposée), pour une fréquence donnée on calcule le saut de la pression 'q' sur des points formant la frontière du système vibrant, via l'équation variationnelle (II.36) :

$$\delta F_f(q) = \delta \left[ \frac{1}{2} J(q, q) + j\omega \rho_0 \int_{\Gamma_y} q V_n d\Gamma_y \right] = 0 \quad (\text{II.48})$$

- ii) Ensuite, on obtient la pression par l'introduction des valeurs obtenues de 'q' dans l'équation (II.27) :

$$p(x) = - \int_{\Gamma_y} \left[ q(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y, \quad x \in \Omega, y \in \Gamma$$

- iii) Finalement, on utilise le champ de pression (évalué ci-dessus) comme charge externe et on calcule le champ de déplacement via la stationnarité de la fonctionnelle de la structure (II.47) :

$$\delta F_s(U) = \delta \left[ \frac{1}{2} J_s(U_i^s, U_i^s) + \int_{\Gamma_s^0} P U_n d\Gamma_s^0 \right]$$

## CHAPITRE III

### RÉSOLUTION NUMÉRIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

#### III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a formulé les équations qui régissent le problème découplé fluide-structure sous forme variationnelle. Dans cette partie nous appliquons la méthode des éléments finis pour la discrétisation des formulations intégrales établis pour le rayonnement acoustique et pour la structure. À ce stade, il est important de distinguer le traitement numérique de la structure par rapport à celui associé au problème de rayonnement acoustique.

#### III.2 Formulation par éléments finis de la fonctionnelle de la structure

Une solution approchée de l'équation variationnelle (II.47) est obtenue en subdivisant le domaine de la structure en sous domaines élémentaires (éléments finis) :

$$\int_{\Omega_s} (*) d\Omega_s = \sum_{\text{Éléments } \Omega_s^e} \int_{\Omega_s^e} (*) d\Omega_s \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_s} (*) d\Gamma_s = \sum_{\text{Éléments } \Gamma_s^e} \int_{\Gamma_s^e} (*) d\Gamma_s \quad (\text{III.1})$$

Chaque élément fini est alors caractérisé par un ensemble de nœuds et à partir desquels on interpole les variables physiques ou mathématiques.

Choisissons comme variable, dans la structure, le vecteur déplacement  $\bar{U}^s$ . Sur un élément donné du maillage, on aura l'interpolation suivante sur le vecteur déplacement élémentaire  $\{U^s\}^{el}$  :

$$\{U^s\}^{el} = [N] \cdot \{U_s^n\}^{el} \quad (III.2)$$

$[N]$  est la matrice d'interpolation nodale (contenant les fonctions de forme) et  $\{U_s^n\}^{el}$  est le vecteur déplacement nodal élémentaire. La dimension de chacune de ces matrices dépend du nombre de nœuds formant l'élément fini.

En tenant compte des définitions (III.1) et (III.2), l'équation intégrale associée à la fonctionnelle (II.47) devient alors :

$$F_s(U_s^n) = \frac{1}{2} \{U_s^n\}^T \cdot ([K] + \omega^2 [M]) \cdot \{U_s^n\} - \{U_s^n\}^T \cdot \{F_s^n\} \quad (III.3)$$

où  $[K]$  est la matrice globale de rigidité,  $[M]$  est la matrice globale de masse,  $\{U_s^n\}$  est le vecteur global de déplacement nodal et  $\{F_s^n\}$  le vecteur global de charge nodal.

La matrice de rigidité élémentaire  $[K]^{el}$ , la matrice masse élémentaire de masse  $[M]^{el}$  et le vecteur charge élémentaire sont donnés respectivement par les formules suivantes :

$$[K]^{el} = \int_{\Omega_s^e} ([B]^T \cdot [D] \cdot [B]) d\Omega_s^e \quad (III.4)$$

$$[M]^{el} = \int_{\Omega_s^e} ([N]^T \cdot [N]) d\Omega_s^e \quad (III.5)$$

$$\{F\}^{el} = \int_{\Omega_s^e} (P \{N\}) d\Gamma_s^e \quad (III.6)$$

$[D]$  est une matrice contenant les propriétés élémentaire de l'élément élastique isotrope et homogène :

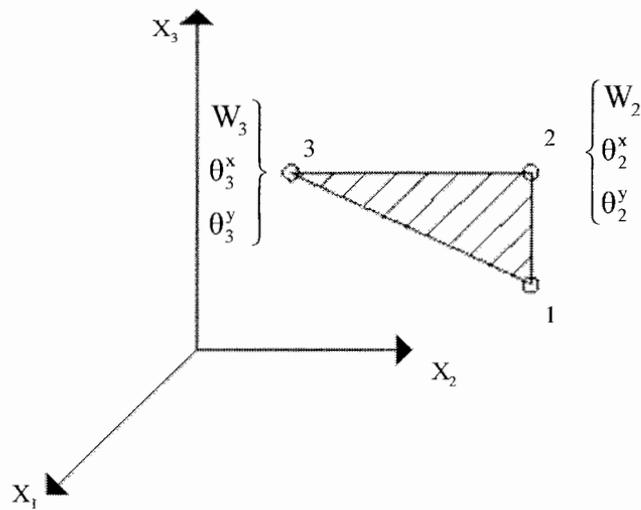
$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (III.7)$$

$[B]$  est une matrice de déformation élémentaire qui contient les dérivées des fonctions de formes.  $P$  est la charge élémentaire (pression) s'exerçant sur l'élément fini.  $E$  est le coefficient de Young et  $\nu$  est le coefficient de poisson.

Pour la discrétisation du domaine de la structure, on utilisera des éléments triangulaires de type DKT (*Discrete Kirtchoff Theory*) à trois nœuds aux sommets et à trois degrés de liberté par nœud (Batoz, 1982) : flèche  $W$  (déplacement normal) et les deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  par rapport aux axes respectifs  $x$  et  $y$  (Figure 5). Les neuf degrés de liberté de l'élément sont :

$$\{U_s^n\}^{el} = \langle W_1 \quad \theta_1^x \quad \theta_1^y \quad W_2 \quad \theta_2^x \quad \theta_2^y \quad W_3 \quad \theta_3^x \quad \theta_3^y \rangle^T \quad (III.8)$$

C'est un élément formulé pour les problèmes de flexion des plaques minces en négligeant l'effet de cisaillement.



**Figure 5** : Élément de plaque pour la structure

### III.2.1 Matrice de rigidité

Dans ce cas, la forme explicite de la matrice élémentaire de rigidité  $[K]^{el}$  est donnée par (Batoz, 1980) :

$$[K]^{el} = \frac{1}{2S} [\alpha]^T \cdot [D_L] \cdot [\alpha] \quad (III.9)$$

avec :

- S est l'air de l'élément triangulaire ;

- $[\alpha]$  est une matrice géométrique de dimension  $9 \times 9$  ;

$\alpha =$ 

$y_3 p_6$	0	$-4y_3$	$-y_3 p_6$	0	$-2y_3$	0	0	0
$-y_3 p_6$	0	$2y_3$	$y_3 p_6$	0	$4y_3$	0	0	0
$y_3 p_5$	$-y_3 q_5$	$y_3(2-r_5)$	$y_3 p_4$	$y_3 q_4$	$y_3(r_4-2)$	$-y_3(p_4-p_5)$	$y_3(q_4-q_5)$	$y_3(r_4-r_5)$
$-x_2 t_5$	$x_{23} + x_2 r_5$	$-x_2 q_5$	0	$x_3$	0	$x_2 t_5$	$x_2(r_5-1)$	$-x_2 q_5$
0	$x_{23}$	0	$x_2 t_4$	$x_3 + x_2 r_4$	$-x_2 q_4$	$-x_2 t_4$	$x_2(r_4-1)$	$-x_2 q_4$
$x_{23} t_5$	$x_{23}(1-r_5)$	$x_{23} q_5$	$-x_3 t_4$	$x_3(1-r_4)$	$x_3 q_4$	$-x_{23} t_5 + x_3 t_4$	$-x_{23} r_5$ $-x_3 r_4 - x_2$	$x_3 q_4 + x_{23} q_5$
$-x_3 p_6$ $-x_2 p_5$	$x_2 q_5 + y_3$	$-4x_{23}$ $+x_2 r_5$	$x_3 p_6$	$-y_3$	$2x_3$	$x_2 p_5$	$x_2 q_5$	$(r_5-2)x_2$
$-x_3 p_6$	$y_3$	$2x_{23}$	$x_{23} p_6$ $+x_2 p_4$	$-y_3$ $+x_2 q_4$	$-4x_3 + x_2 r_4$	$-x_2 p_4$	$x_2 q_4$	$(r_4-2)x_2$
$-x_{23} p_5$ $+y_3 t_5$	$-x_{23} q_5$ $+ (1-r_5)y_3$	$(2-r_5)x_{23}$ $+y_3 q_5$	$-x_3 p_4$ $+y_3 t_4$	$(r_4-1)y_3$ $-x_3 q_4$	$(2-r_4)x_3$ $-y_3 q_4$	$-x_{23} p_5 + x_3 p_4$ $-(t_4+t_5)y_3$	$-x_{23} q_5 - x_3 q_4$ $+(r_4-r_5)y_3$	$-x_{23} r_5$ $-x_3 r_4$ $+4x_2$ $+(q_5-q_4)y_3$

(III.10)

- $[D_L]$  est une matrice de comportement matériel d'ordre 9x9 contenant les propriétés élastiques de l'élément :

$$[D_L] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} E_1[R] & E_2[R] & 0 \\ E_2[R] & E_3[R] & 0 \\ 0 & 0 & E_4[R] \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

La matrice globale  $[K]$  et le vecteur charge globale  $\{F\}$  sont obtenus respectivement par sommation des matrices et des vecteurs élémentaires sur l'ensemble des triangles formant le maillage de la structure.

Soulignons que la matrice  $[K]$  est une matrice carrée symétrique.

### III.2.2 Matrice de masse

La matrice de masse  $[M]$  est obtenue par l'utilisation d'un élément cubique incomplet (dédit d'un élément triangulaire cubique complet de type Hermite par l'élimination de son nœud central) (Batoz, 1980). Les composantes de la matrice d'interpolation  $N$  en coordonnées de références local  $\xi$  et  $\eta$  sont données, pour ce type d'élément, par :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} \lambda^2(3-2\lambda)+2a \\ \xi\lambda^2 + \frac{1}{2}a \\ \eta\lambda^2 + \frac{1}{2}a \\ \xi^2(3-2\xi)+2a \\ \xi^2(-1+\xi)-a \\ \xi^2\eta + \frac{1}{2}a \\ \eta^2(3-2\eta)+2a \\ \xi\eta^2 + \frac{1}{2}a \\ \eta^2(-1+\eta)-a \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

La matrice élémentaire  $[M]^{\text{elm}}$  est obtenue par l'utilisation (III.5), ensuite, la matrice globale  $[M]$  est obtenue par sommation de l'ensemble des triangles formant la structure. Soulignons que la matrice  $[M]$  est une matrice carrée symétrique.

Finalement, la stationnarité de la fonctionnelle discrétisée (III.3) conduit alors au système algébrique suivant :

$$([K] + \omega^2[M]) \{U_s^n\} = \{F_s^n\} \quad (\text{III.13})$$

En connaissant le vecteur charge globale (pression agissant sur la structure), la résolution de système linéaire (III.13) permet de déterminer les déplacements de chaque nœud formant la structure.

### III.3 Formulation par éléments finis de frontière de la fonctionnelle de fluide

Pour la résolution de l'équation variationnelle (II.36), nous considérons la méthode des éléments finis de frontière. À cet effet, dans un premier temps, le domaine acoustique est subdivisé en sous domaines élémentaires de surface et, ensuite, après interpolation de la variable auxiliaire ( $q$ ) (densité de double couche) sur chacun de ces éléments, la fonctionnelle (II.36) est réécrit sur l'ensemble des éléments formant le domaine de la structure.

Pour le fluide, nous considérons un élément triangulaire à un degré de liberté par nœud qui est le saut de la pression ' $q$ ' à travers la surface moyenne de l'élément.

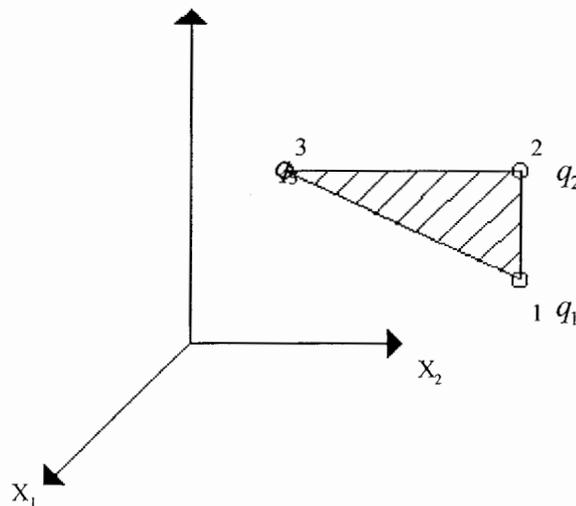


Figure 6 : Élément triangulaire pour le fluide

Les trois degrés de liberté sur l'élément triangulaire sont :

$$\{q\}^T = \langle q_1 \quad q_2 \quad q_3 \rangle \quad (\text{III.14})$$

En conséquence, la fonctionnelle (II.36) sous forme discrétisée en terme de l'inconnue nodale 'q' s'écrit :

$$F_f(q) = \frac{1}{2} \{q\}^T \cdot [A] \cdot \{q\} - \{q\}^T \cdot \{V\} \quad (\text{III.15})$$

où [A] est une matrice d'auto-influence. L'expression élémentaire de la matrice  $[A]^{el}$ , qui est définie sur deux triangle  $t_i$  et  $t_j$ , est donnée par la formule suivante (voir annexe 1) :

$$[A]^{el} = 4kS_iS_j (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j) [A_1]^{el} + [A_2]^{el} \quad (\text{III.16})$$

avec :

- $S_i, S_j$  : surfaces des éléments triangulaires  $t_i$  et  $t_j$  respectivement
- $\vec{n}_i = \langle n_1^i, n_2^i, n_3^i \rangle$  : vecteur normal à la surface de l'élément triangulaire 'i'
- $\vec{n}_j = \langle n_1^j, n_2^j, n_3^j \rangle$  : vecteur normal à la surface de l'élément triangulaire 'j'

$[A_1]^{el}$  représente une première matrice d'auto-influence donnée par (Annexe 2, équation (B.17)):

$$[A_1]^{el} = \iint_{t_i} \iint_{t_j} \{N^i\} \cdot \{N^j\}^T G(x, y) dt_i dt_j \quad (\text{III.17})$$

où  $N^i$  et  $N^j$  sont des fonctions de formes définies sur les triangles 'i' et 'j' :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1^i = \xi_1 \\ N_2^i = \xi_2 \\ N_3^i = \mathbf{1} - \xi_1 - \xi_2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1^j = \eta_1 \\ N_2^j = \eta_2 \\ N_3^j = \mathbf{1} - \eta_1 - \eta_2 \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

$[A_2]^{\text{el}}$  une deuxième matrice d'auto-influence donnée par (Annexe 2, équation (B.18)):

$$[A_2]^{\text{el}} = [R^i]^T \cdot [R^j] \iint_{t_i, t_j} G(x, y) dt_i dt_j \quad (\text{III.19})$$

$[R^i]$  et  $[R^j]$  sont les matrices de rotation associées aux triangles 'i' et 'j' données par les formules suivantes :

$$[R^i] = \begin{bmatrix} X_{12} - X_{13} & X_{13} - X_{11} & X_{11} - X_{12} \\ X_{22} - X_{23} & X_{23} - X_{21} & X_{21} - X_{22} \\ X_{32} - X_{33} & X_{33} - X_{31} & X_{31} - X_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20.1})$$

$$[R^j] = \begin{bmatrix} Y_{12} - Y_{13} & Y_{13} - Y_{11} & Y_{11} - Y_{12} \\ Y_{22} - Y_{23} & Y_{23} - Y_{21} & Y_{21} - Y_{22} \\ Y_{32} - Y_{33} & Y_{33} - Y_{31} & Y_{31} - Y_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20.2})$$

$X_{ij}$  ( $i, j=1, 3$ ) représentent les coordonnées nodales des trois nœuds formant l'élément triangulaire 'i'.  $Y_{ij}$  ( $i, j=1, 3$ ) représentent les coordonnées nodales des trois nœuds formant l'élément triangulaire 'j'. Le vecteur élémentaire  $\{V\}^{\text{el}}$  est donné, apparaissant dans (III.15), par :

$$\{V\}^{el} = j\rho\omega \int_{t_i} \{N\} V^n dt_i \quad (\text{III.21})$$

$\rho$  est la densité de fluide,  $\omega$  la pulsation de la structure vibrante et  $V^n$  la vitesse normale de l'élément triangulaire ( $t_i$ ).

La matrice globale  $[A]$  et le vecteur global  $\{V\}$  sont obtenus respectivement par sommation sur l'ensemble des paires de triangles ( $t_i, t_j$ ) et par sommation directe sur l'ensemble des triangles ( $t_i$ ) formant l'interface mouillée de la structure.

La stationnarité de la fonctionnelle discrétisée (III.15) conduit alors au système algébrique suivant :

$$[A] \cdot \{q\} = \{V\} \quad (\text{III.22})$$

Dans ce système la matrice  $[A]$  est une matrice carrée complexe et symétrique. La résolution de système linéaire permet l'accès aux inconnues nodales auxiliaires 'q' formant le maillage de la structure vibrante.

### III.4 Traitement numérique des intégrales

Pour le problème de rayonnement acoustique d'une structure vibrante on a besoin de deux types d'intégrations pour évaluer les termes élémentaires des vecteurs et des matrices :

$$I = \int_{t_1} \int_{t_2} G(x, y) dt_2 dt_1 \quad (\text{III.23})$$

$$J = \iint_{t_i t_j} \xi_i \eta_j G(x, y) dt_i dt_j \quad (\text{III.24})$$

$$K = \int_{t_2} F(x) dt_2 \quad (\text{III.25})$$

où  $F(x)$  est une fonction régulière sur son domaine d'intégration mais  $G(x, y)$  et  $\xi_i \eta_j G(x, y)$  ne le sont pas nécessairement. En effet, les intégrales associées aux fonctions  $G(x, y)$  et  $\xi_i \eta_j G(x, y)$  dépendent de l'inverse de la distance  $R^{-1}(x(\xi_i), y(\eta_j))$  qui est singulière lorsque  $x(\xi_i) = y(\eta_j)$  (les deux triangles sont confondus). Pour contourner ce problème d'intégration, il existe deux approches:

- i. la première méthode consiste à lever la singularité en intégrant analytiquement les parties singulières des intégrales I et J et, ensuite, une intégration numérique est effectuée sur les parties régulières qui en résultent à l'aide des techniques numériques classiques (F. Erchiqui, 2005);
- ii. La deuxième approche est celle développée récemment par Wang et al (Wang et Atalla, 1997) pour des éléments quadrilatères. Ensuite, extensionné à des éléments triangulaires par Alia (Alia, 2003).

Dans ce travail, nous ne considérons que la deuxième approche. À cet effet, et en faisant recours aux transformations faites (Alia, 2003), on ramène l'intégration sur des éléments triangulaires en intégration sur des éléments quadrilatéraux via la transformation suivante :

$$\int_{\xi_2} \int_{\eta_2} \int_{\xi_1} \int_{\eta_1} \frac{f(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{r} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 = \int \int \int \int_{-1}^1 \frac{f(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{r} \frac{\rho_i}{4} \frac{\rho_j}{4} dS_i dS_j \quad (\text{III.26})$$

où  $f$  est une fonction régulière sur son domaine. La forme discrète de (III.26) est alors obtenue par l'utilisation de la formule suivante (Wang et Atalla, 1997) :

$$\int \int \int \int_{-1}^1 \frac{f(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{R} dS_i dS_j = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q f(\xi_1^m, \eta_1^n, \xi_2^p, \eta_2^q) w_{mnpq} \quad (\text{III.27})$$

avec :

$$f(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \frac{R}{r} G(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \frac{\rho_i}{4} \frac{\rho_j}{4} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \quad (\text{III.28})$$

$\xi_1^m$ ,  $\eta_1^n$ ,  $\xi_2^p$  et  $\eta_2^q$  sont des points d'intégrations et les  $w_{mnpq}$  sont les poids numériques associés. Les entiers M, N, P et Q désignent les ordres d'intégration et  $\rho_i$  représente une coordonnée radiale associée au point 'i'. Dans le cas où les deux triangles sont disjoints, on peut utiliser les 'formules de Hammer' (Batoz, 1992).

### III.5 Validation des calculs : cas de la structure

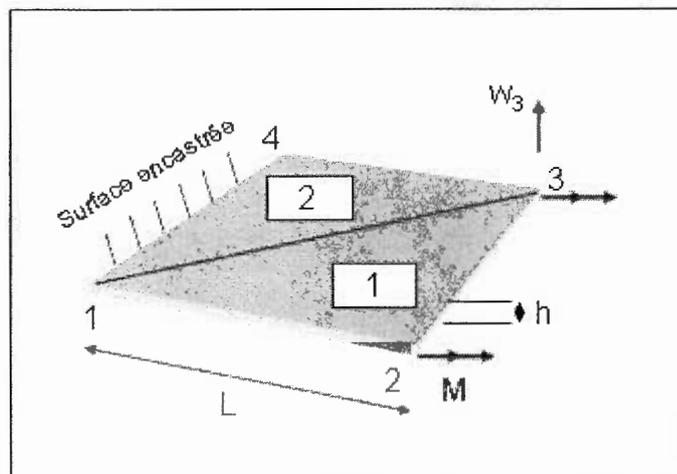
Pour la validation des résultats numériques vis-à-vis la littérature, nous avons considéré deux cas pour la structure cas : i) une structure rectangulaire élastique, mince homogène et isotrope soumise à une charge concentrée et ii) mode de vibration d'une structure rectangulaire.

### III.5.1 Plaque rectangulaire mince soumise à une charge concentrée

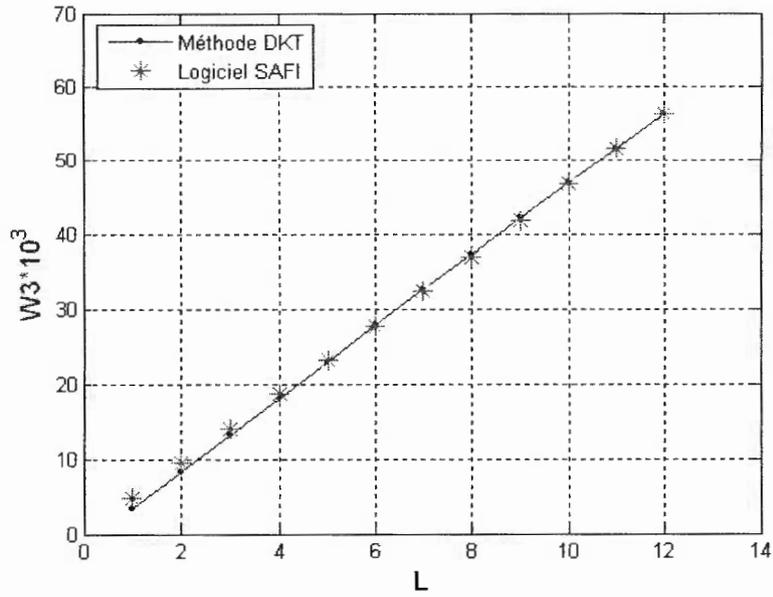
Dans ce cas, nous avons considéré une structure rectangulaire de longueur  $L$  (variable), de largeur  $1\text{ m}$  et d'épaisseur de  $0.005\text{ m}$ . La plaque, qui est encastrée sur l'un de ses cotés, est soumise à une charge concentrée qui induit un moment de flexion. Pour le maillage, nous avons considérés des éléments triangulaires de type DKT. Deux cas sont considérés :

- i) le calcul de la flèche en fonction de la longueur ' $L$ ' en appliquant un moment sur l'un des côtés de la plaque (figure 7) ;
- ii) le calcul de la flèche en fonction de la longueur ' $L$ ' en appliquant deux forces opposées sur l'extrémité de la plaque (figure 8).

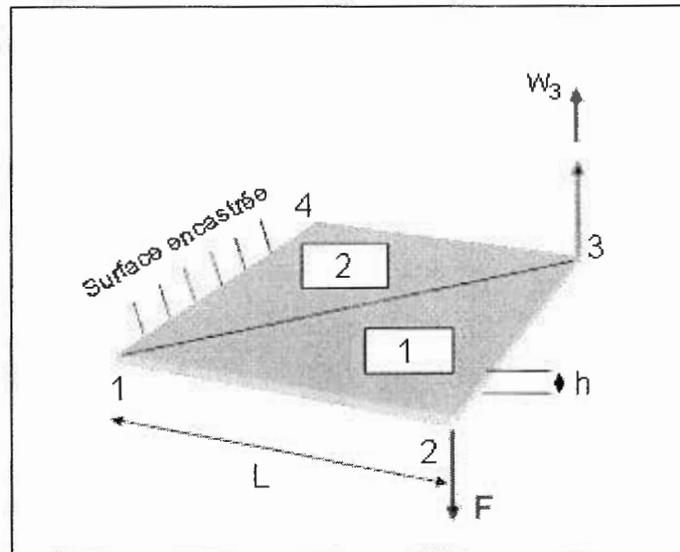
Pour la validation, nous avons confrontés nos résultats avec ceux obtenus par le code commercial SAFI (code commercial), en utilisant un même maillage et les mêmes propriétés que celles fournis dans (Batoz, 1980.)



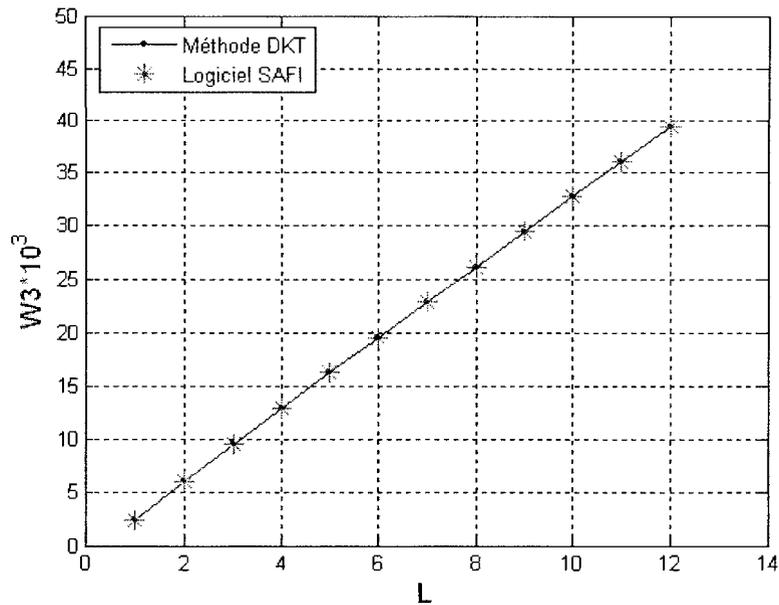
**Figure 7** : Application d'un moment sur une plaque mince rectangulaire



**Figure 8 :** Flèche en fonction de la longueur de la plaque rectangulaire



**Figure 9 :** Application d'une force à une plaque mince rectangulaire



**Figure 10** : Flèche en fonction de la longueur de la plaque

Les résultats obtenus reproduisent convenablement ceux de SAFI avec des erreurs qui n'excèdent pas 0.1%. Ce qui justifie l'utilisation de ce type d'éléments pour notre étude sur l'effet de la pression, induite par le rayonnement d'une structure vibrante, sur une structure élastique.

### III.5.2 Modes de vibration d'une plaque mince

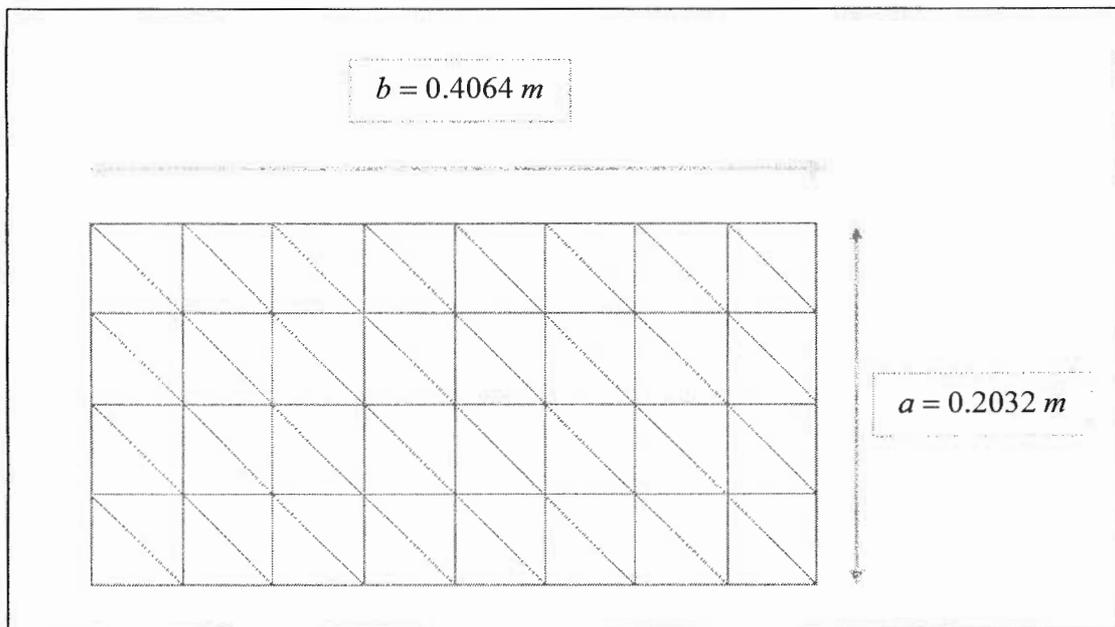
Dans cette partie, on a calculé numériquement par éléments finis les cinq premières fréquences propres *in vacuo* d'une plaque mince horizontale encadrée sur l'un de ses côtés (Figure 11) et pour trois épaisseurs différentes. Les résultats ont été confrontés à ceux obtenus expérimentalement (Ulric et *al*, 1965). Pour la modélisation, on a supposé que la

plaque vérifie la théorie de *Love-Kirchhoff* sur la flexion des plaques minces. La structure est discrétisée par 64 éléments triangulaires de type DKT.

Les propriétés physiques de la plaque sont données dans le tableau suivant :

**Tableau 1** : Caractéristiques de la plaque et du milieu fluide

Paramètres physiques et géométriques	Grandeurs
Largeur $a$	0.2032 $m$
Longueur $b$	0.4064 $m$
Épaisseur $l$	0.00185 $m$
Densité $\rho_s$ (Structure)	20.900 $Kg/m^2$
Densité $\rho_f$ (air)	1.300 $Kg/m^3$
Module de Young $E$	20.68 $10^{10} N/m^2$
Coefficient de Poisson $\nu$	0.30



**Figure 11:** Maillage de la plaque utilisé pour le modèle numérique

Les résultats obtenus se résument dans les tableaux ci-dessous :

**Tableau 2 :** Fréquences propres de la plaque pour une épaisseur  $h = 0.00185$  m

Modes	RÉSULTATS NUMÉRIQUES		
	Résultats expérimentaux selon (Ulric et <i>al</i> , 1965)	Sans condensation des rotations	Avec condensation des rotations
	VIDE	VIDE	VIDE
1	9.86	9.80	9.80
2	42.4	41.4	41.4

3	61.4	60.6	60.6
4	138	136	136
5	167	168	169

**Tableau 3 :** Fréquences propres de la plaque pour une épaisseur  $h = 0.00270$  m

Modes		RÉSULTATS NUMÉRIQUES	
	Résultats expérimentaux selon (Ulric et <i>al</i> , 1965)	Sans condensation des rotations	Avec condensation des rotations
	VIDE	VIDE	VIDE
1	13.8	13.7	13.7
2	59.3	57.8	57.8
3	85.9	84.9	84.9
4	194	191	191
5	234	235	236

**Tableau 4 :** Fréquences propres de la plaque pour une épaisseur  $h = 0.00480$  m

Modes		RÉSULTATS NUMÉRIQUES	
	Résultats expérimentaux selon (Ulric et <i>al</i> , 1965)	Sans condensation des rotations	Avec condensation des rotations
	VIDE	VIDE	VIDE
1	24.7	24.7	24.7
2	106	105	105
3	154	153	153
4	347	344	344
5	419	425	426

Dans le vide, l'erreur relative entre le calcul numérique et théorique est inférieure 1%. Cette erreur peut être réduite en raffinant le maillage de la structure, ce qui augmente en contre partie le temps de calcul.

L'effet de la condensation statique des rotations sur la précision des modes est sans importance sur les fréquences, puisque l'erreur relative entre le calcul numérique et celui qui tient compte de la condensation reste faible.

### III.6 Validation des calculs : cas de fluide (sans couplage)

Le premier cas est consacré à la validation de l'intégrale singulière qui intervienne dans la formulation intégrale associée au rayonnement acoustique. Ensuite, deux validations, vis-à-vis des solutions analytique et numériques sont effectuées: i) une sphère pulsante dans l'air et ii) un disque oscillant dans l'air.

#### III.6.1 Validation des intégrales singulières

Pour s'assurer de la précision des calculs, on a testé le calcul numérique de l'intégrale singulière suivant, en utilisant 12 points d'intégration:

$$I = \iint_{t_i, t_i} \frac{1}{r(\xi_i, \eta_i = \xi_i)} dt_i dt_i \quad (\text{III.29})$$

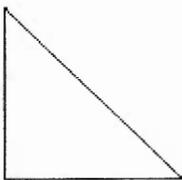
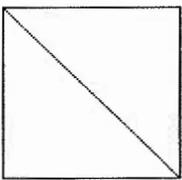
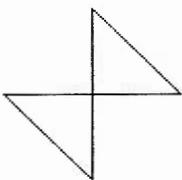
sur des triangles rectangles pour trois situations différentes et en utilisant la technique présenté dans (Wang et Atalla, 1997) (voir Tableau 6) :

- a. les deux triangles sont confondus ;
- b. les deux triangles ont un côté en commun ;
- c. les deux triangles ont un sommet en commun.

**Tableau 5 :** Intégration numérique sur des triangles de référence.

	Intégration exacte	Intégration numérique (Erchiqui, 1996)
Cas 1	1.0030	0.9853
Cas 2	0.4835	0.5041
Cas 3	0.26833	0.26838

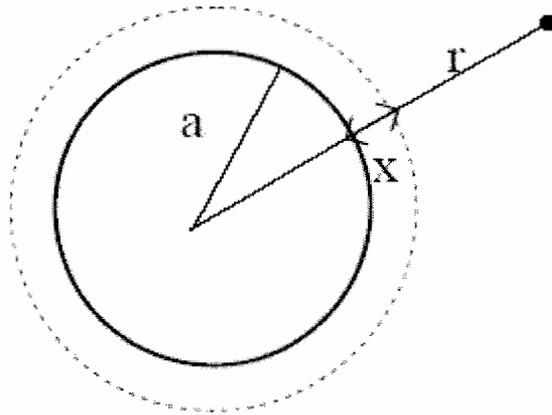
**Tableau 6:** Disposition des triangles en intégration double

Cas 1	Cas 2	Cas 3
		

Le tableau 5 résume les résultats obtenus pour (26) pour l'intégral (III.29) des cas mentionnés. On y trouve une bonne approximation de l'intégrale par rapport à la solution analytique. En effet, on constate que l'erreur relative est inférieure à 1.7% dans le premier cas, 4.26% dans le deuxième cas et 0% dans le troisième cas. Ce qui justifie l'utilisation de la technique de Wang pour notre problème sur le rayonnement acoustique.

### III.6.2 Rayonnement d'une sphère pulsante

Dans cette application, la sphère pulsante est considérée comme une sphère dont le volume varie au cours du temps, son rayonnement provient d'une succession de faibles contractions et dilatations. Le mouvement radial qui en découle est de même amplitude en tous points de la sphère (figure 12).



**Figure 12** : Schéma de la sphère pulsante

Dans le cas extérieur,  $r > a$ , l'expression analytique de la pression à une distance  $r$  à partir du centre de la sphère est donnée par :

$$P_{ext}(r) = \frac{a}{r} U_0 Z_0 \frac{-jka}{1-jka} \exp[jk(r-a)] \quad (\text{III.30})$$

avec

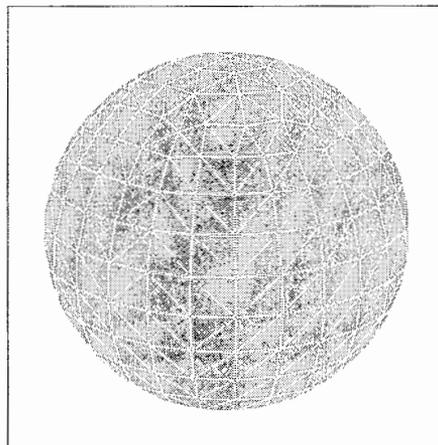
- $a$  est le rayon de la sphère
- $U_0$  est la vitesse unitaire

- $Z_0 = \rho_0 c$  est l'impédance acoustique de l'air
- $c$  est la vitesse du son
- $k = \omega / c$  est le nombre d'onde
- $\rho_0$  est la densité

Pour la validation, nous avons considérés les données suivantes :

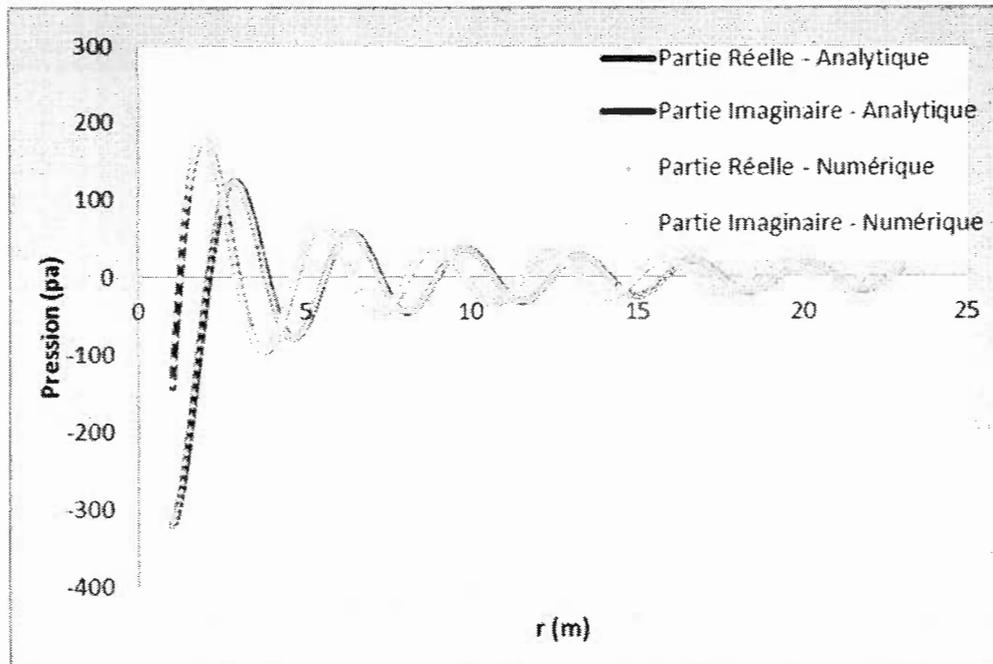
- $a = 1 \text{ m}$
- $U_0 = 1 \text{ m/s}$
- $c = 343 \text{ m/s}$
- $k = \omega / c$  est le nombre d'onde
- $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$

La sphère a été maillée à l'aide des éléments triangulaires (458 nœuds et 776 triangles), voir figure 13.



**Figure 13** : Modèle du maillage de la sphère pulsante (458 nœuds et 776 triangles)

La figure 14 illustre les résultats numériques obtenus par l'approche variationnelle vis-à-vis la solution analytique. L'erreur maximale est inférieure à 0.1%.



**Figure 14 :** Pression rayonnée par la sphère pulsante (458, nœuds, 776 triangles)

### III.6.3 Rayonnement d'un disque vibrant : oscillation transversale

Dans cette application, nous avons considérés un mouvement d'oscillation transversal d'un disque circulaire de rayon  $R$ . Le milieu entourant le disque est l'air.

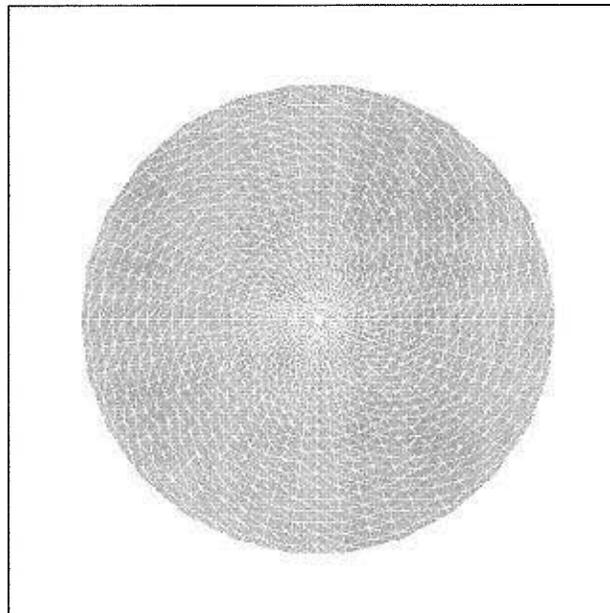
Les données considérées pour le rayonnement acoustique sont :

- $U_z = 1 \text{ m/s}$  (vitesse normale du disque);
- $R = 1 \text{ m}$  (rayon du disque);

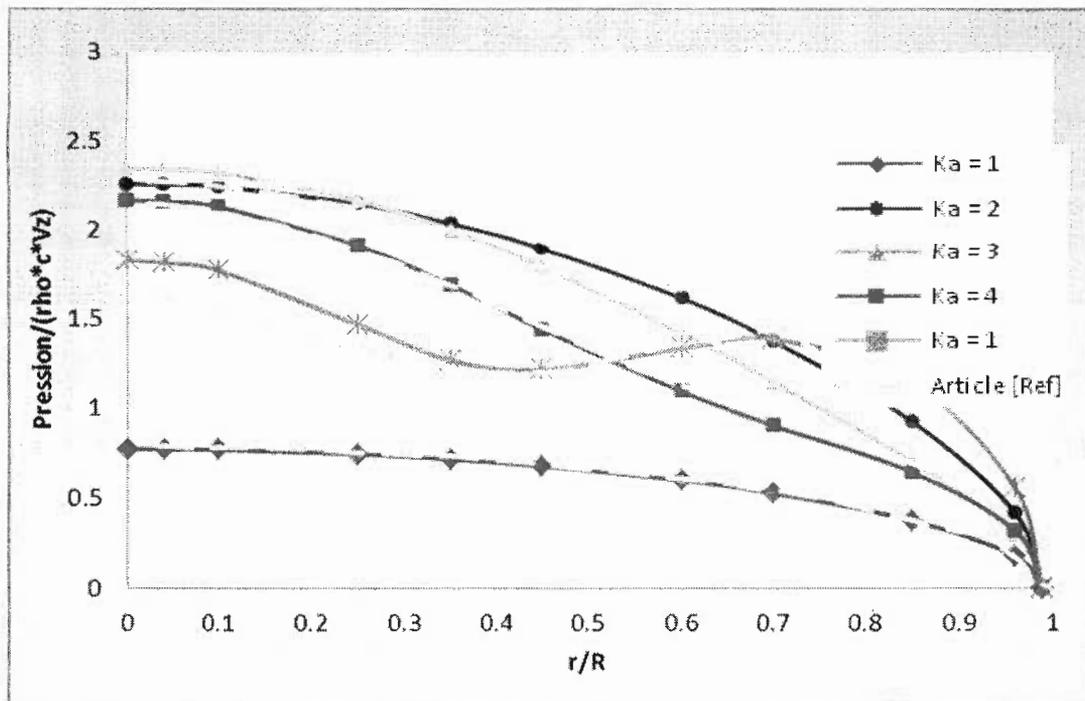
- $Z_0 = \rho_0 c = 415.03$  (impédance acoustique du milieu);
- $C=343$  m/s (vitesse du son dans l'air)
- $k$  est le nombre d'onde
- $\rho_0=1.21$  Kg/m<sup>3</sup> est la densité

Le disque a été maillé à l'aide des éléments triangulaires plans (1015 nœuds 1976 triangles), voir figure 15.

Les résultats de la pression adimensionnelle rayonnée par le disque oscillant vis-à-vis des solutions fournis dans (Wu, 1986) sont présentés sur la figure 16. Encore, une autre fois, on remarque la concordance des résultats entre le numérique (obtenus par la formulation variationnelle) et ceux fournis dans la référence citée ci-haut.



**Figure 15** : Modèle du maillage d'un disque (1015 nœuds, 1976 triangles)



**Figure 16 :** Modèle du maillage d'un disque (1015 nœuds et 1976 triangles)

## CHAPITRE 4

### APPLICATION : RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DES ÉOLIENNES

#### IV. Introduction

Sous contraintes politique et environnementale, plusieurs secteurs industriels sont soumis à des réglementations. Dans le cas du bruit généré par les structures vibrantes et ses conséquences sur l'homme. En effet, ce bruit résulte généralement des engrenages, de l'interaction du vent avec les pâles ainsi que du débalancement des axes de rotations. À cet effet, d'importants efforts ont été déployés par l'industrie des éoliennes pour réduire le niveau de décibels des émissions acoustiques, en améliorant l'aérodynamisme des pales et en développant de nouvelles techniques pour la mise en mouvement des engrenages.

Dans ce chapitre et dans le cadre des hypothèses utilisées dans ce mémoire, nous nous intéressons au rayonnement acoustique généré par le déplacement (débalancement) d'une structure éolienne, en supposant un jeu d'ensemble d'amplitude de 5mm entre l'axe de rotation vertical et la turbine (vibration transversale et sans rotation de l'éolienne). Pour cela, nous considérons deux types d'éoliennes : éolienne à axe horizontal et éolienne à axe vertical. Ensuite, nous étudions l'effet de la pression acoustique induite par l'éolienne à axe vertical sur une structure plane élastique, isotrope et homogène.

#### IV.1 Description géométrique et maillage par éléments finis

Les dimensions géométriques de l'éolienne à axe vertical sont illustrées sur la figure 17 et celles de l'éolienne à axe horizontal sur la figure 18. Pour la modélisation géométrique par éléments finis de l'éolienne à axe horizontal, on a utilisé deux maillages par éléments finis triangulaires plans: 2500 nœuds (figure 19) et 1400 nœuds (figure 20) respectivement. Pour l'éolienne à axe vertical un seul maillage de 1399 nœuds est considéré (figure 21)

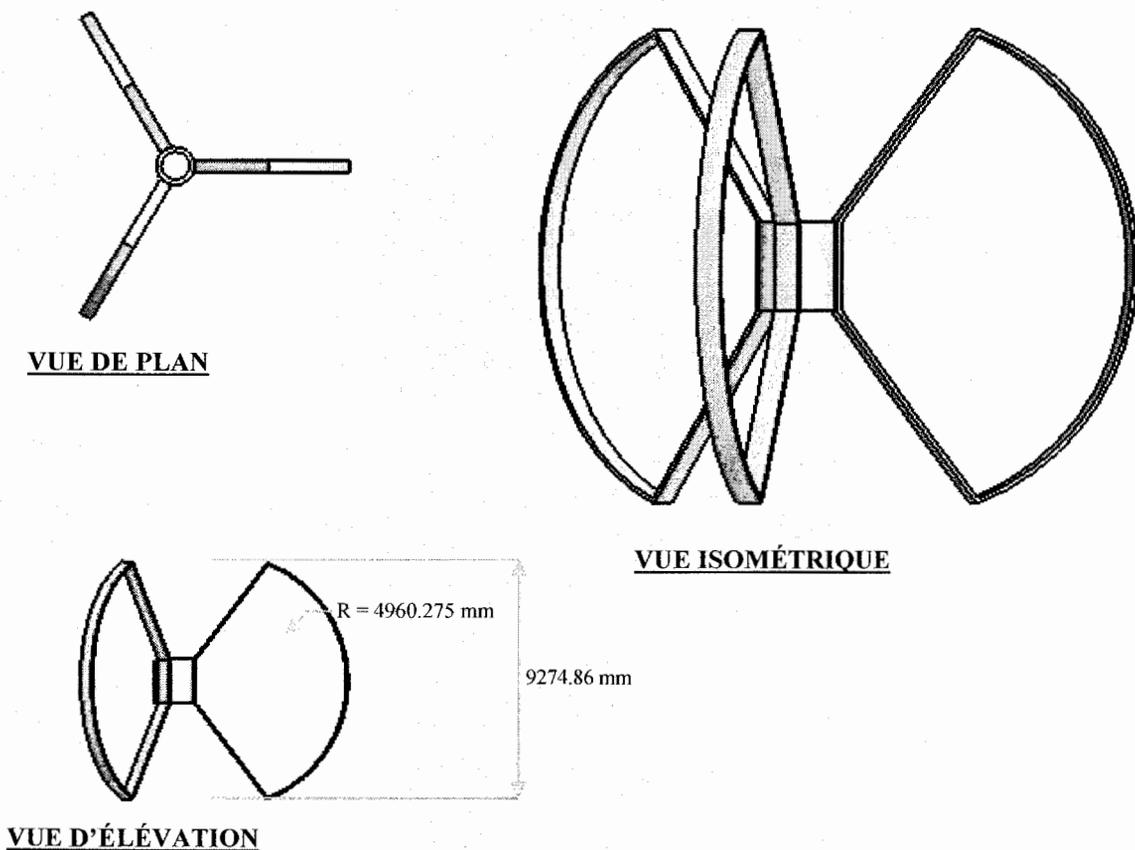


Figure 17 : Détail géométrique du modèle de l'éolienne à axe vertical

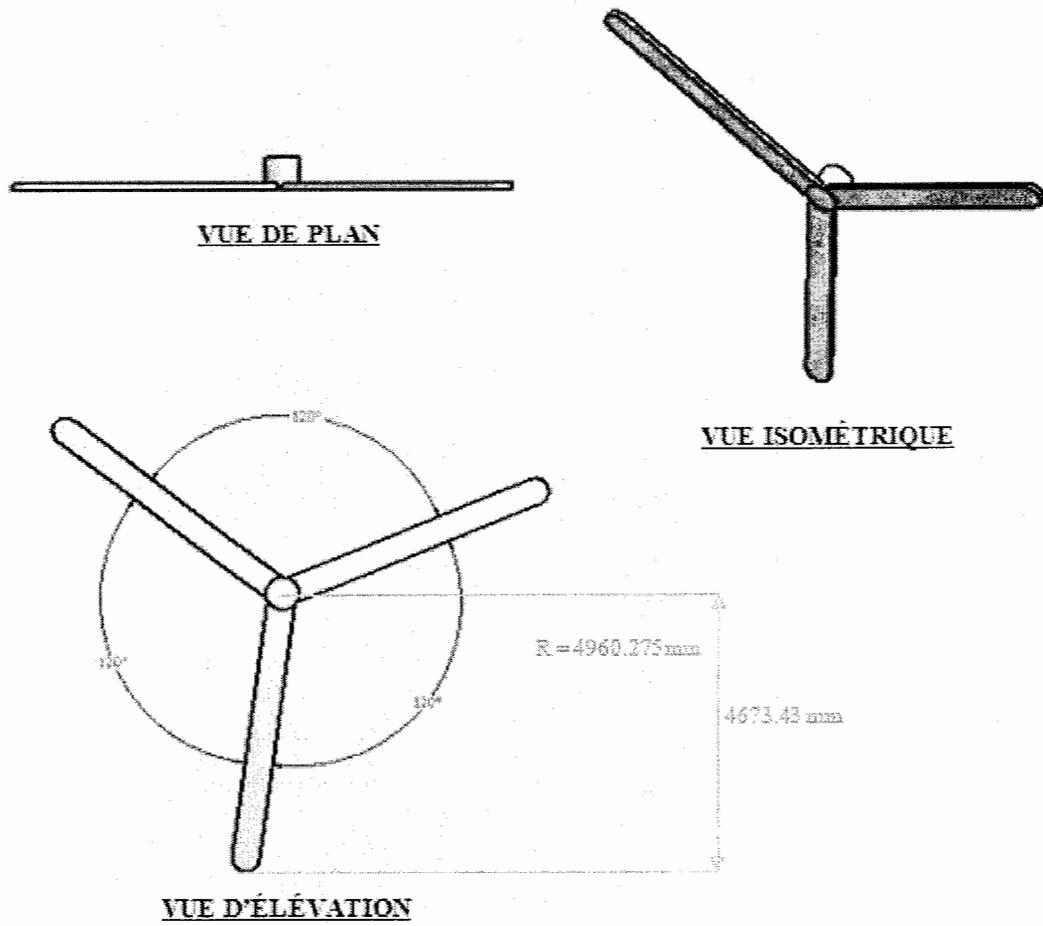
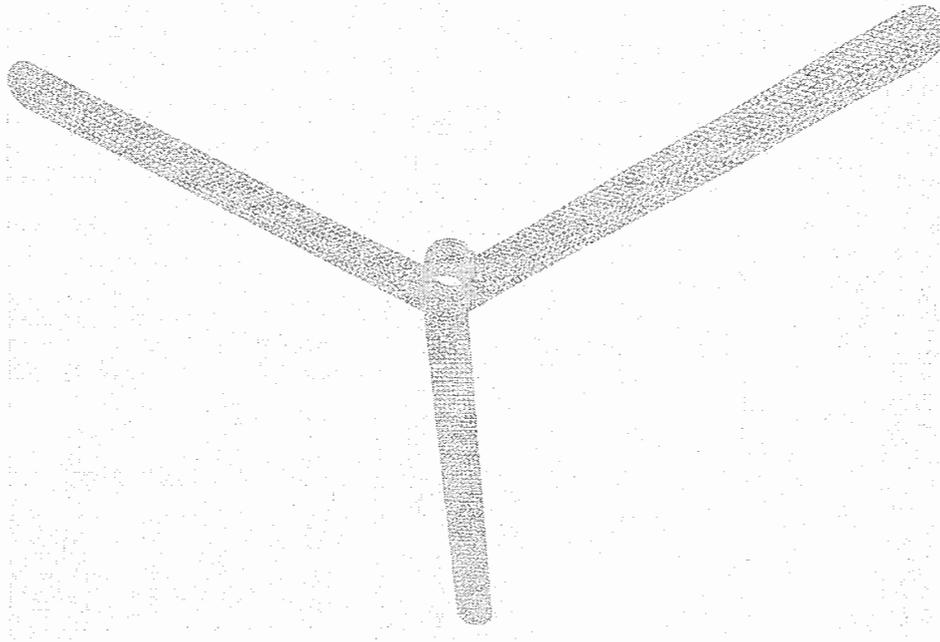
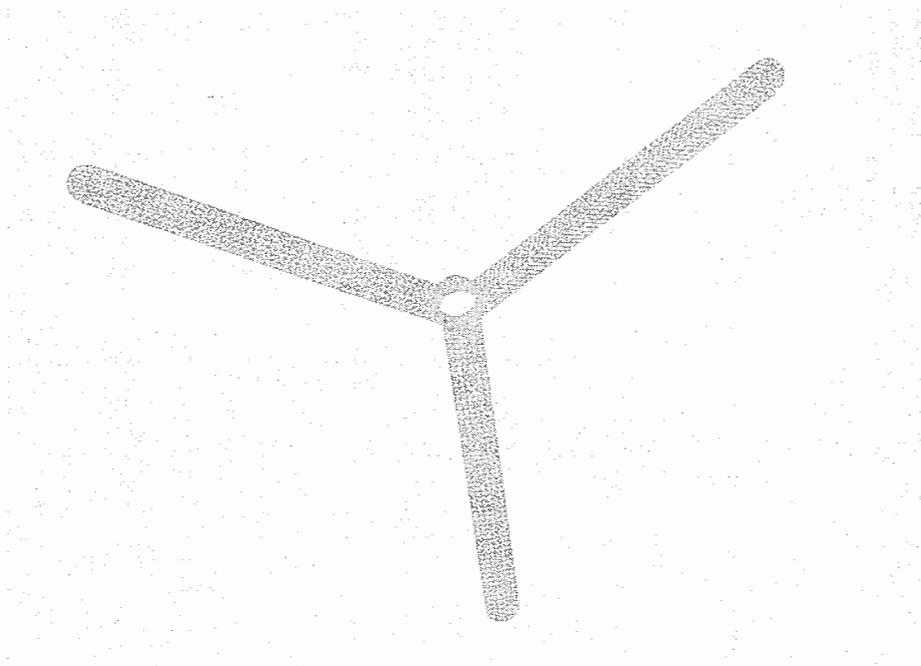


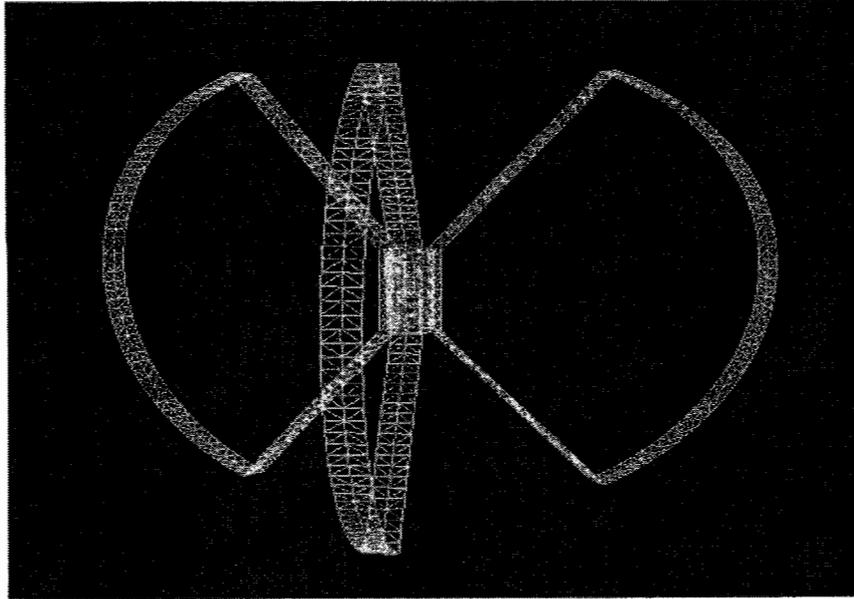
Figure 18 : Détail géométrique du modèle de l'éolienne à axe horizontal



**Figure 19** : Maillage 1 triangulaire raffiné du modèle de l'éolienne à axe horizontal (2500 nœuds)



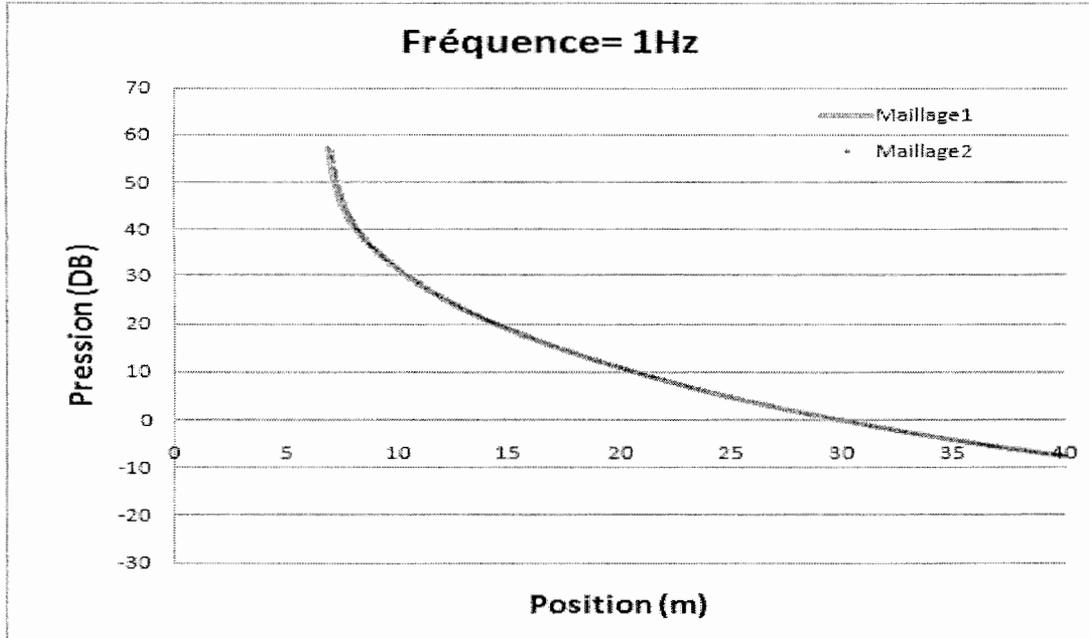
**Figure 20** : Maillage 2 triangulaire du modèle de l'éolienne à axe horizontal (1400 nœuds)



**Figure 21** : Maillage triangulaire du modèle vertical de l'éolienne (1399 triangles)

#### **IV.2 Effet du raffinement du maillage sur le rayonnement acoustique: éolienne à axe vertical**

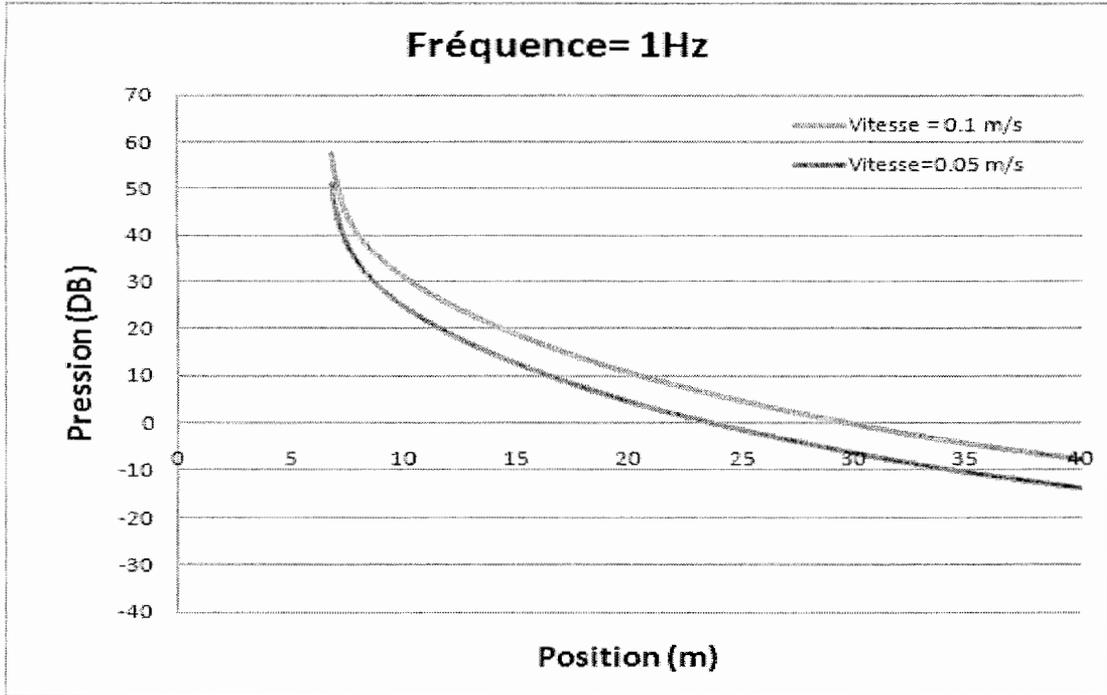
Dans cette partie, on s'intéresse à l'effet du raffinement du maillage sur les résultats obtenus. À cet effet, on a utilisé deux maillages différents (1400 nœuds et 2500 nœuds). Selon la figure 22, qui illustre les résultats obtenus (de la position centrale de l'axe cylindrique de rotation jusqu'à la position de 40 m), on remarque que les deux résultats sur la pression rayonnée coïncident. Ceci confirme la qualité des maillages utilisés.



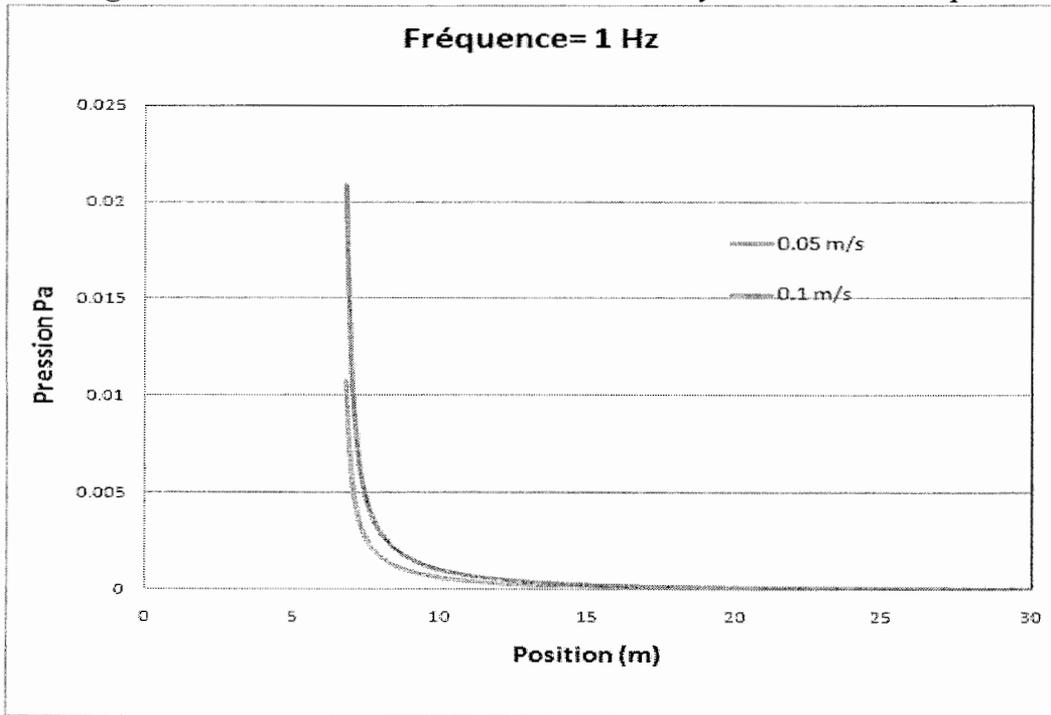
**Figure 22 :** Effet de raffinement du maillage sur le rayonnement acoustique

### **IV.3 Effet de la vitesse normale sur le rayonnement acoustique : éolienne à axe vertical**

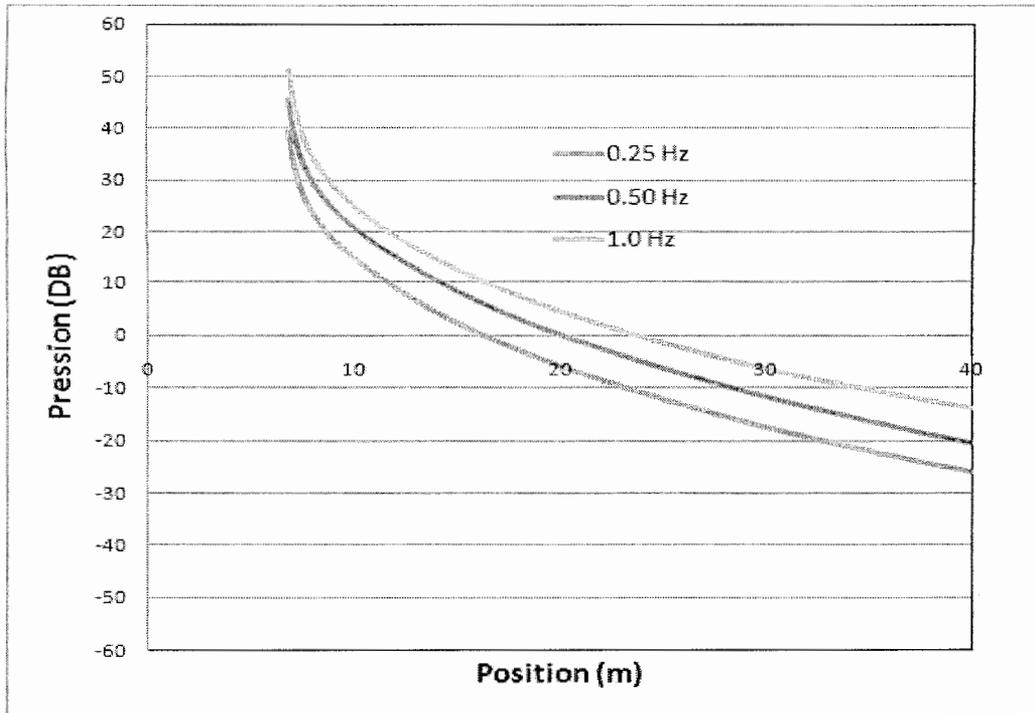
Dans cette partie on a analysé, pour une fréquence de 1Hz, l'effet de la vitesse normale de l'éolienne (à axe vertical) sur les champs de la pression acoustique (en DB) et de la pression absolue (en Pa). Dans ce cas, les vitesses sont considérées : 0.1 m/s et 0.05 m/s en fonction de la position centrale : de l'axe cylindrique de rotation jusqu'à la position de 40 m. La figure 23 illustre le premier cas tandis que la figure 24 illustre le deuxième cas, respectivement. On remarque que la pression rayonnée en fonction de la distance augmente avec la vitesse. Les figures 25-26 illustrent l'effet des fréquences (0.1 Hz, 0.25 Hz et 0.5Hz) sur les pressions rayonnées. Toutefois, les valeurs obtenues restent faibles.



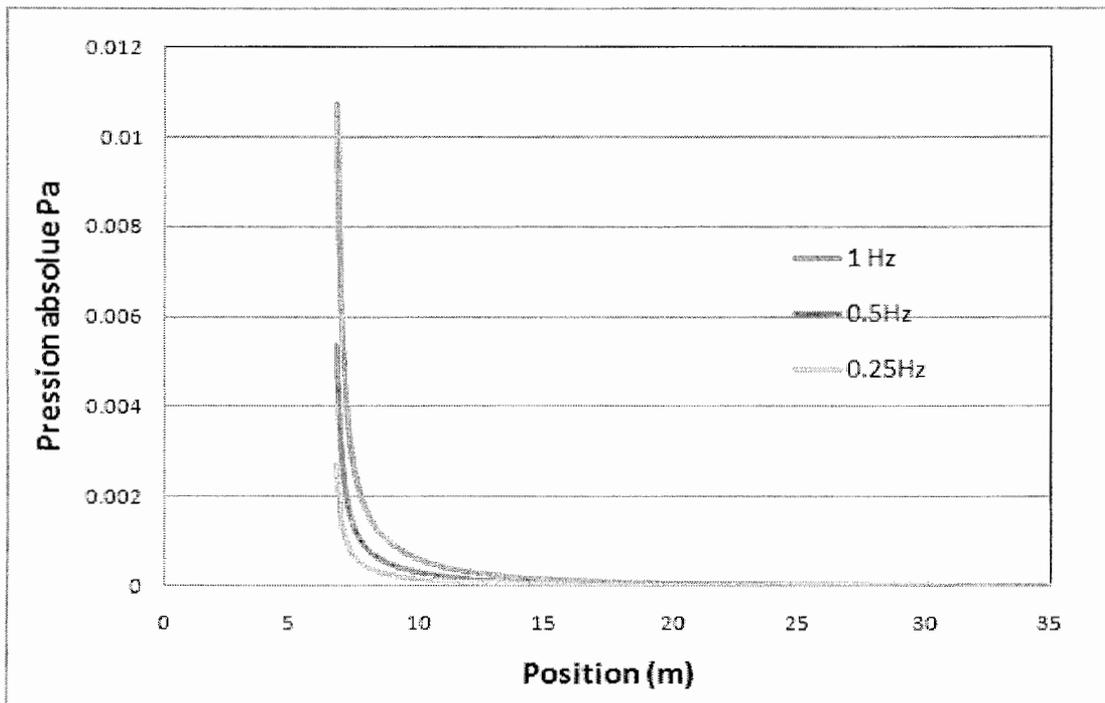
**Figure 23 :** Effet de la vitesse normale sur le rayonnement acoustique



**Figure 24 :** Effet de la vitesse normale sur la pression rayonnée : éolienne à axe vertical



**Figure 25 :** Effet de la fréquence sur le rayonnement acoustique : éolienne à axe vertical



**Figure 26 :** Effet de la fréquence sur la pression rayonnée : éolienne à axe vertical

#### IV.4 Effet de la fréquence sur le rayonnement acoustique : éolienne à axe horizontal

Dans cette partie on a analysé, dans le cas d'une amplitude en vitesse de 0.05 mm, l'effet des fréquences (0.1 Hz, 0.25 Hz, 0.5Hz et 1 Hz) sur la pression acoustique (en DB) et sur la pression absolue (en Pa). Les figures 27 et 28 illustrent ses deux situations. Même remarque que précédemment, on constate que les pressions augmentent avec les fréquences. Toutefois, les valeurs en pressions absolues restent très faibles.

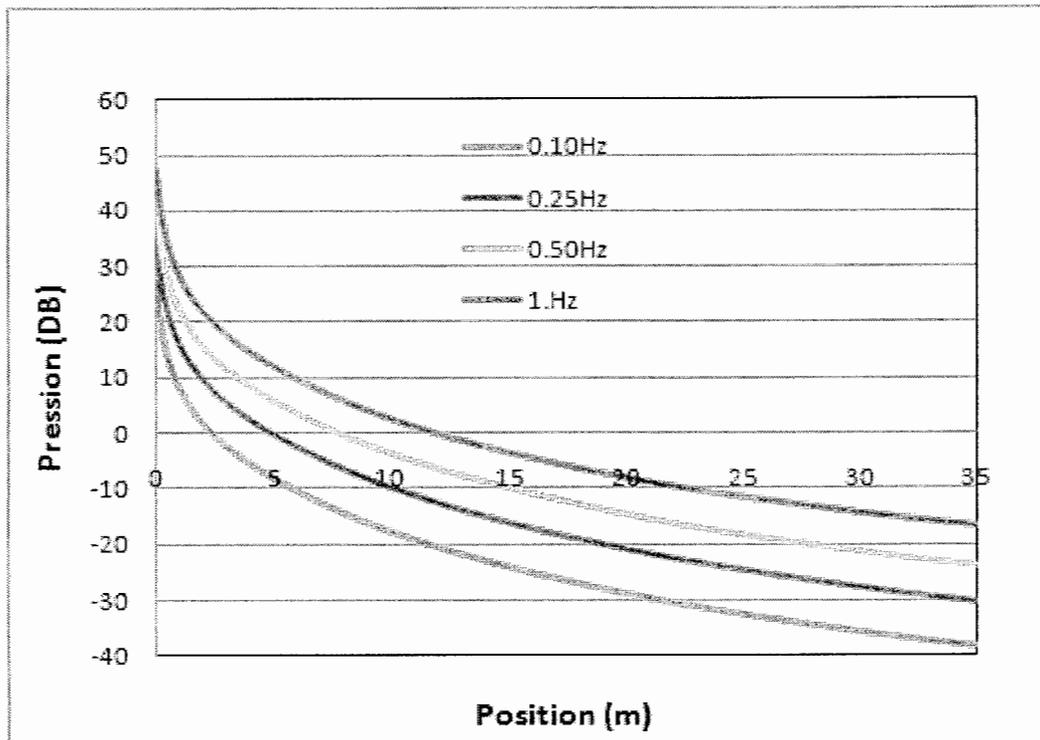
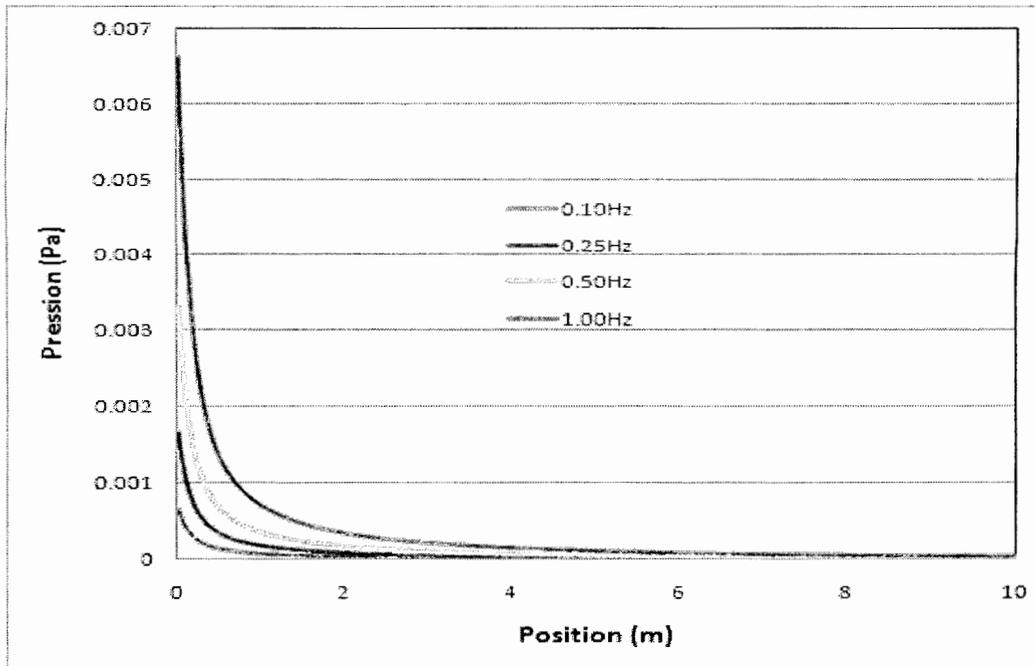


Figure 27 : Effet de la fréquence sur le rayonnement acoustique



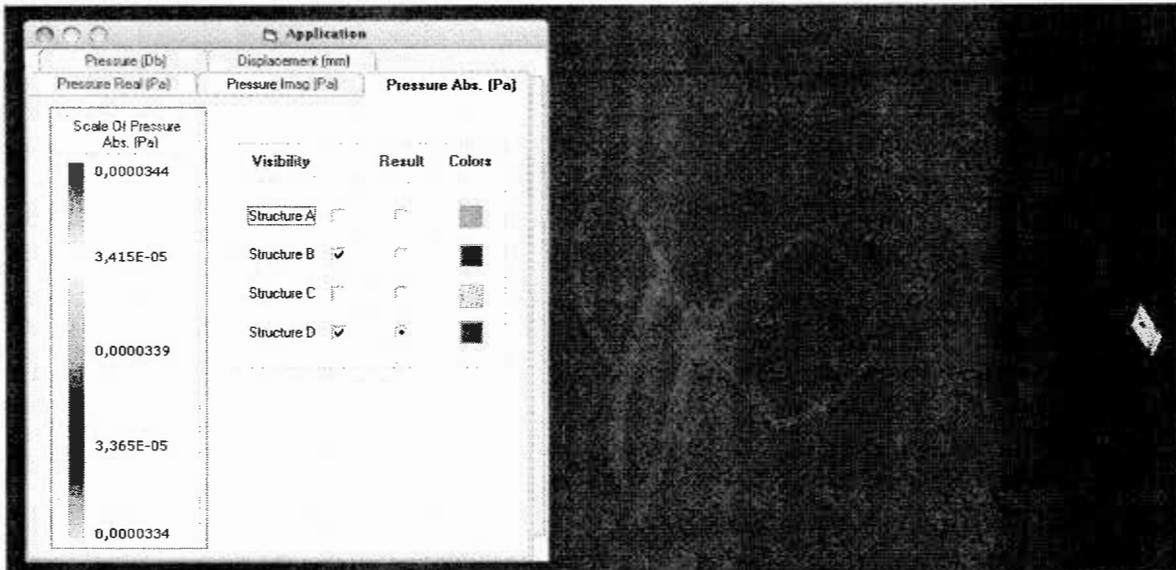
**Figure 28** : Effet de la fréquence sur la pression rayonnée

#### **IV.5 Effet de la pression rayonnée sur le comportement d'une structure élastique homogène mince et plane**

Dans cette partie, on s'intéresse à l'effet de la pression générée par l'éolienne (à axe vertical) sur le champ de déplacement d'une plaque élastique plane et rectangulaire placée en face de cette dernière et à une distance de 10 m. Pour la modélisation, on a supposé que la plaque vérifie la théorie de *Love-Kirchhoff* sur la flexion des plaques minces. La structure est discrétisée par 400 éléments triangulaires de type DKT (avec 231 nœuds). Les propriétés physiques de la plaque sont données dans la référence (Batoz, 1980).

La figure 29 illustre la distribution de la charge en pression sur la structure. Les résultats en déplacement sont très faibles et on peut considérer que les effets du champ de pression générée par l'éolienne est très faible sur la structure. En effet, ceci est dû essentiellement

aux hypothèses introduites dans ce mémoire telles que: pas de rotations des pâles, le fluide est parfait et pas d'écoulement de fluide.



**Figure 29:** Effet de la pression rayonnée sur une structure plane placée à 10 m

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous avons étudié le problème de rayonnement acoustique de deux structures éoliennes (une à axe vertical et l'autre à axe horizontal) sous les conditions aux limites de Neumann. Ensuite, nous avons étudié l'effet de la pression acoustique, induite par l'éolienne à axe horizontal, sur le comportement d'une structure avoisinante. La structure est supposée élastique, homogène et isotrope et le fluide barotrope. Pour le rayonnement acoustique, nous avons utilisé une formulation variationnelle indirecte, exprimée en termes de deux potentiels (simple et double couche). Pour la structure, nous avons utilisé le fonctionnel classique de l'énergie.

Dans le chapitre I, nous avons commencé par exposer les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le milieu fluide et la structure ainsi que les équations qui régissent les conditions initiales et aux limites (problème  $P_0$ ). Ensuite, en se situant dans le cadre des faibles perturbations des variables physiques autour de leur état d'équilibre, on a transformé le problème  $P_0$  en un problème  $P_1$ . Finalement, en régime harmonique, le problème  $P_1$  est remplacé par le problème  $P_2$ , pour lequel on a ajouté la condition de Sommerfeld. Cette dernière assure l'existence et l'unicité de la solution acoustique.

Dans le chapitre II, on a représenté la pression acoustique, associée au problème  $P_2$ , sous forme intégrale pour les problèmes externe et interne séparément. Ensuite, une formulation intégrale indirecte est déduite des formulations externe et interne. Ceci nous a permis

d'établir une formulation variationnelle pour le champ de pression acoustique. De même, on a établie pour la structure la fonctionnelle d'énergie associée.

Dans le chapitre III, nous avons élaboré un modèle discrétisé par éléments finis, pour l'analyse du problème découplé fluide – structure. Ensuite, nous avons validé la formulation pour les cas suivants :

- i) les modes de vibration d'une structure;
- ii) le comportement d'une plaque rectangulaire mince soumise à une charge concentrée ;
- iii) le rayonnement acoustique d'une sphère pulsante ;
- iv) le rayonnement d'un disque plan oscillant.

Le dernier chapitre a été consacré à l'étude de :

- i) rayonnement acoustique de deux types d'éoliennes : une à axe vertical et l'autre à axe horizontal, sous les conditions aux limites de type Neumann (vitesse normale) ;
- ii) l'effet de la pression acoustique sur une structure avoisinante

Suite à cette étude, nous avons remarqué que l'intensité du bruit émis par ses structures est non significative. Toutefois, l'éolienne à axe vertical émit un bruit plus élevé que celui à axe horizontal. Concernant, l'effet de la pression acoustique sur une structure à proximité de l'éolienne à axe horizontal, nous avons remarqué que la réponse en déplacement de la structure est très faible. À ce stade, il sera opportun, dans les travaux

futurs, d'induire les rotations des éoliennes dans l'analyse du rayonnement acoustique.  
Ensuite, un couplage fort fluide-structure en vibroacoustique sera souhaitable.

## RÉFÉRENCES

- K. Harumi, T. Saito, T. Fujimori. 1979. Motion picture of the computer simulation of elastic waves in a solid : reflection of the longitudinal wave by a crack, *Ultrasonics International*.
- J.L Bond. 1979. Ultrasonic pulse scattering by open slots, *Proceedings, Ultrasonics international 79, I.P.C. (Guildford), 188-193, Graz, Austria, Juillet*.
- G.A Georgiou, L.J. Bond. 1987. Quantitative studies in ultrasonic wave defect interaction, *Ultrasonics*, 25, 328-3343.
- A. Ilan, J.P. Weight. 1990. The propagation of short pulses of ultrasound from a circular source coupled to an isotropic solid, *J. Acoust. Soc, Am*, 88(2), 1142-1151.
- W. Wang and Atalla N. 1997. A numerical algorithm for double surface integrals over quadrilaterals with a  $1/r$  singularity. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13(11):885–890.
- A.Alia, H. Djelouah, N. Bouaoua. 2004. Finite difference modeling of the ultrasonic field radiated by circular transducers, *J. Comput. Acoust*, 12 (4), 475-499.
- N. Bouaoua, A. Alia, H. Djelouah. 2003. Simulation of the ultrasonic diffraction in viscous fluids, *ASME, Cleveland, USA, 20-24 Juillet*.

A.Craggs. 1972. The use of simple three dimensional acoustic finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex shaped enclosures, *J. Sound, Vib*, 23 (3), 331-339.

H.J.P. Morand, R.Ohayon. 1995. Fluid structure interaction : applied numerical methods, Wiley.

R. Clayton, B. Engquist. 1977. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *B. Seis. Soc. Am*, 67 (6), 1529-1540.

L.L. Thompson. 2006. A review of finite element methods for time harmonic acoustics, *J. Acoust. Soc. Am*, 119(3), 1315-1330.

H.A. Schneck. 1968. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *Jour. Acous. S.A.*, vol.44, Num.1,p.41-58.

D.S. Jones. 1974. Integral equation for the exterior acoustic problems. *Jour. Mech. App. Math.* Vol.27 (1), p129-142.

S. Amin et P.J Harris. 1990. Acomparaison between various boundary integral formulation of the exterior acoustic problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, V.84,p.59-75.

I.Nakayama, R. Nakamuta, R. Takeuchi. 1981. Sound insulation evaluated in radiation field of vibrating circular plate. *Acustica*, vol.47,p.89-96.

A.MaMouzi, A. Laneville and P. Vittecoq. 1990. On ovaling oscillations of cylindrical shells in cross-flow : an improved model. *Eur. Jour. Mech., A/Solids*, 9, N.3,p.233-251.

Carlos A. Felippa and Thomas L. Geers. 1980. Axisymmetric free vibration of submerged spherical shell. *Jour. Acous. Sc. America.* 67 (5), p.1427-1431.

O.C Zienkiewicz, R.E. Newton. 1969. Coupled vibration of structure submerged in a compressible fluid. *Int.sym. of Finite element tech.*, Stuttgart.

M.N. Sayhi. 1979. Résolution du problème de rayonnement par collocations des formulations intégrales directes et indirectes à l'aide de potentiel de simple et double couche. Thèse de docteur ingénieur, Université de technologie de Compiègne, France.

F. Erchiqui, A. Gakwaya. 1991. Boundary element formulation for variational structure-fluid interaction problems. *Ref. Boundary element method 13*, C.F Brebbia S. Gipson (ed), CMP/Elsevier, p.219-231.

Erchiqui F., Gakwaya A. 1990. A symmetric variational boundary element formulation for structure interaction problems. *Conférence Européenne sur les nouvelles avancées en calcul des structures*, Giens, France, pp 369-378.

J.B. Mariem. 1984. Étude de couplage élasto-acoustique par une méthode d'éléments finis de surface. Thèse de docteur Ingénieur. Université de Technologie de Compiègne, France.

P. Jean. 1985. Une méthode variationnelle par équation intégrales pour la résolution numérique de problèmes intérieurs et extérieurs de couplage élasto-acoustique. Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Technologie de Compiègne, France.

Sommerfeld. 1949. *Partial differential equations in physics.* Academic Press, Inc, New York.

J.C. Nedelec. 2001. Acoustic and Electromagnetic Equations, Integral Representation for harmonic Problems. Springer-Verlag.

A.Alia. 2003. Thèse de Doctorat en génie Civil. Titre : Simulation numérique en vibroacoustique et en interaction fluide structure en vibro-acoustique, Université de Lille 1, France.

P. Fillippi. 1977. Layer potentials and acoustic diffraction, Jour. Of Sound and Vibration 54 (4), p.473-500.

Batoz, Jean-Louis. 1980. An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. International journal for numerical methods in engineering, vol. 18, pp. 1077-1089.

M.A Hamdi. 1988. Méthodes de discrétisation par élément finis et éléments finis de frontière. Rayonnement acoustique des structures, p.269 :276, Edition Eyrolles.

Erchiqui, F. 1990. Modélisation des interactions fluide- structure par éléments finis et équations variationnelles. Rapport interne, Département de génie mécanique, U. Laval.

F. Erchiqui. 2005. Cours : Sujets spéciaux – Éléments finis de frontières.

F. M. White. 2002. Fluid Mechanics, Fifth Edition, McGaw-Hill.

L. Landau et E. Lifchitz. 1984 . Théorie de l'élasticité, Collection MIR, Moscou.

S. Ulric Lindholm, D. Daniel Kana. 1965. Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water, Journal of Ship Research, 11-22 p.

Batoz, Jean-Louis. 1982. A study of three-node triangular plate bending element. International journal for numerical methods in engineering, vol. 15, pp. 1771-1812.

Batoz, Jean-Louis et Dhatt, Gouri. 1990. Modélisation des structures par éléments finis, volume 2, Poutres et Plaques. Paris : Hermès, 483 p.

X. F.Wu, A. D. Pierce et J. H.Ginsberg.. 1987. Variational method for computing surfaceacoustic pressure on vibrating bodies, applied to transversely oscillating disks. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 12:412{418).

## **ANNEXES**

## Annexe 1 : Transformation de la fonctionnelle J(q,q')

Considérons l'intégrale :

$$J(q, q') = \left( \int_{\Gamma_x} \left[ q(y) q'(x) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \right] d\Gamma_x d\Gamma_y \right), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (1.A)$$

Avant de transformer cette intégrale, écrivons la dérivée seconde de la solution fondamentale G(x,y) (qui intervienne dans le noyau de J) sous une forme explicite.

**Transformation de**  $\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y}$

Désignons par  $\nabla_x$  et  $\nabla_y$  les opérateurs gradients relatifs aux deux points x et y respectivement, dans un même repère orthonormé. Il s'ensuit :

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} = (\overline{n_x}, \nabla_x) \cdot (\overline{n_y}, \nabla_y) \quad (2.A)$$

Considérons quatre vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  :  $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$  et  $\overline{W}$

$$\overline{Y} \wedge (\overline{Z} \wedge \overline{W}) = (\overline{Y}, \overline{W}) \overline{Z} - (\overline{Y}, \overline{Z}) \overline{W} \quad (3.A)$$

Le produit scalaire de  $\overline{X}$  avec les deux membres de (3.A) donne :

$$(\overline{X}, \overline{Y} \wedge (\overline{Z} \wedge \overline{W})) = (\overline{X}, \overline{Z}).(\overline{Y}, \overline{W}) - (\overline{X}, \overline{W}).(\overline{Y}, \overline{Z}) \quad (4.A)$$

Considérons l'identité suivante :

$$(\overline{X}, \overline{Y} \wedge (\overline{Z} \wedge \overline{W})) = (\overline{X} \wedge \overline{Y}).(\overline{Z} \wedge \overline{W}) \quad (5.A)$$

Les deux équations (4.A) et (5.A) conduisent à l'identité suivante :

$$(\overline{X}, \overline{Z}).(\overline{Y}, \overline{W}) = (\overline{X}, \overline{W}).(\overline{Y}, \overline{Z}) + (\overline{X} \wedge \overline{Y}).(\overline{Z} \wedge \overline{W}) \quad (6.A)$$

D'après (4.A) :

$$(\overline{Y}, \overline{W} \wedge (\overline{X} \wedge \overline{Z})) = (\overline{Y}, \overline{X}).(\overline{W}, \overline{Z}) - (\overline{Y}, \overline{Z}).(\overline{W}, \overline{X}) \quad (7.A)$$

En rajoutons (6.A) à (7.A), On obtient :

$$(\overline{X}, \overline{Z}).(\overline{Y}, \overline{W}) = (\overline{X}, \overline{Y}).(\overline{Z}, \overline{W}) + (\overline{X} \wedge \overline{Y}).(\overline{Z} \wedge \overline{W}) - (\overline{Y}, \overline{W} \wedge (\overline{X} \wedge \overline{Z})) \quad (8.A)$$

Utilisons l'application de l'équation (2.A) nous obtenons la formule :

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} = (\overline{n_x}, \overline{n_y})(\nabla_x \cdot \nabla_y) + (\overline{n_x} \wedge \overline{n_y})(\nabla_x \wedge \nabla_y) - (\overline{n_y} \cdot \nabla \wedge (\overline{n_x} \wedge \nabla_x)) \quad (9.A)$$

En tenant compte de la propriété suivante :

$$\nabla_x G(x, y) = -\nabla_y G(x, y) \quad (10.A)$$

L'application de l'opérateur (9.A) sur G(x,y) donne :

$$\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} = -(\overline{n_x}, \overline{n_y}) \Delta_x G(x, y) - (\overline{n_x}, \nabla_y \wedge (\overline{n_x} \wedge \nabla_x G(x, y))) \quad (11.A)$$

Soit encore :

$$\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} = (\overline{n_x}, \overline{n_y}) K^2 G(x, y) - (\overline{n_y}, \nabla_y \wedge (\overline{n_x} \wedge \nabla_x G(x, y))) \quad (12.A)$$

### Transformation de l'intégral J

En utilisant les deux termes de l'équation (11.A), on déduit pour (1.A) les deux termes suivants :

$$J_1 = \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} K^2 q(y) q'(x) (\overline{n_x}, \overline{n_y}) G(x, y) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \quad (13.A)$$

$$J_2 = \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} q(y) q'(x) (\overline{n_y}, \nabla_y \wedge (\overline{n_x} \wedge \nabla_x G(x, y))) d\Gamma(x) d\Gamma(y) \quad (14.A)$$

Avec  $J = J - J_2$

Soit la fonction vectorielle  $U(x, y)$  définie par :

$$U(x, y) = \overline{n_x} \wedge \nabla_x G(x, y) \quad (15.A)$$

En utilisant (15.A),  $J_2$  s'écrit alors :

$$J_2 = \int_{\Gamma_x} q'(x) \left[ \int_{\Gamma_y} q(y) (\overline{n_y}, \nabla_y \wedge U(x, y)) d\Gamma(y) \right] d\Gamma(x) \quad (16.A)$$

Comme :

$$q(y)\nabla_y \wedge U(x,y) = \nabla_y \wedge (q(y)U(x,y)) - \nabla_y U(y) \wedge U(x,y) \quad (17.A)$$

Et :

$$\int_{\Gamma} q(y)(n_y \cdot \nabla_y \wedge U(x,y))d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} (n_y \cdot \nabla_y \wedge (q(y)U(x,y)))d\Gamma(y) - \int_{\Gamma} (n_y \cdot \nabla_y q(y) \wedge U(x,y))d\Gamma(y) \quad (18.A)$$

La formule de Stokes permet de transformer la première intégrale en une intégrale sur le bord  $\partial\Gamma$  :  $\partial\Gamma (\equiv dl)$

$$\int_{\Gamma} (n_y \cdot \nabla_y \wedge (q(y)U(x,y)))d\Gamma(y) = \int_{\partial\Gamma} q(y)U(x,y)\partial\Gamma \quad (19.A)$$

L'équation (16.A) devient alors :

$$J_2 = \int_{\Gamma} q'(x) \left[ \int_{\partial\Gamma} q(y)U(x,y)dl(y) - \int_{\Gamma} (U(x,y)n_y \wedge \nabla_y q(y))d\Gamma(y) \right] d\Gamma(x) \quad (20.A)$$

En remplaçant  $U(x,y)$  par son expression donnée dans l'équation (15.A),  $J_2$  devient :

$$J_2 = \int_{\partial\Gamma} q(y) \left[ \int_{\Gamma} q'(x)(n_x \wedge \nabla_x G(x,y))d\Gamma \right] dl(y) - \int_{\Gamma} (n_y \wedge \nabla_y q(y)) \left[ \int_{\Gamma} q'(x)(n_x \wedge \nabla_x G(x,y))d\Gamma(x) \right] d\Gamma(y) \quad (21.A)$$

Or :

$$q'(x)\nabla_x G(x,y) = \nabla_x(q'(x)G) - G\nabla_x q'(x) \quad (22.A)$$

Donc le terme entre crochets de  $J_2$  s'écrit :

$$\int_{\Gamma} q'(x)(n_x \wedge \nabla_x G(x,y))d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} (n_x \wedge \nabla_x(q'(x)G))d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} (n_x \wedge \nabla_x q'(x)G)d\Gamma(x) \quad (23.A)$$

La seconde forme de la formule de Stokes permet aussi de transformer la première intégrale du membre droit en une intégrale sur le bord :

$$\int_{\Gamma} (n_x \wedge \nabla_x(q'(x)G))d\Gamma(x) = \int_{\partial\Gamma} q'(x)G(x,y)dl(x) \quad (24.A)$$

Finalement  $J_2$  devient :

$$\begin{aligned} J_2 = & \int_{\partial\Gamma\partial\Gamma} q(y)q'(x)G(x,y)dl(x)dl(y) - \int_{\partial\Gamma} [n_x \wedge \nabla_x q'(x)]q(y)G(x,y)dl(y)d\Gamma(x) \\ & - \int_{\Gamma} \int_{\partial\Gamma} [n_y \wedge \nabla_y q(y)]q'(x)G(x,y)dl(x)d\Gamma(y) \\ & + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} [n_y \wedge \nabla_y q(y)][n_x \wedge \nabla_x q'(x)]q(y) d\Gamma(x)d\Gamma(y) \end{aligned} \quad (25.A)$$

Finalement l'équation (1.A) devient :

$$\begin{aligned} J = J_1 - J_2 = & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k^2(n_x, n_y)q(y)q'(x)G(x,y)d\Gamma(x)d\Gamma(y) - \\ & \int_{\partial\Gamma\partial\Gamma} q(y)q'(x)G(x,y)dl(x)dl(y) + \int_{\partial\Gamma} [n_x \wedge \nabla_x q'(x)]q(y)G(x,y)dl(y)d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \int_{\partial\Gamma} [n_y \wedge \nabla_y q(y)]q'(x)G(x,y)dl(x)d\Gamma(y) \\ & - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} [n_y \wedge \nabla_y q(y)][n_x \wedge \nabla_x q'(x)]q(y) d\Gamma(x)d\Gamma(y) \end{aligned} \quad (26.A)$$

Pour des bords de la frontière  $\Gamma$  suffisamment réguliers, le champ de pression ne présente pas de saut le long de  $\partial\Gamma$  :

$$q|_{\partial\Gamma} = \mathbf{0} \quad (27.A)$$

D'où :

$$J(q, q') = \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} (G(x, y) [k^2 (\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y) q'(x) q(y) - (\vec{n}_x \times \nabla_x q'(x)) \cdot (\vec{n}_y \times \nabla_y q(y))]) d\Gamma_x d\Gamma_y \quad (28.A)$$

Fonctionnelle de fluide est donnée par :

$$J(q, q') = \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} (G(x, y) [k^2 (\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y) q'(x) q(y) - (\vec{n}_x \times \nabla_x q'(x)) \cdot (\vec{n}_y \times \nabla_y q(y))]) d\Gamma_x d\Gamma_y \quad (29.A)$$

Et sa forme discrétisée sur l'ensemble des couples d'éléments triangulaires format la structure est alors :

$$J(q, q') = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_x^i} \int_{\Gamma_y^j} (G(x, y) [k^2 (\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y) q'(x) q(y) - (\vec{n}_x \times \nabla_x q'(x)) \cdot (\vec{n}_y \times \nabla_y q(y))]) d\Gamma_x^i d\Gamma_y^j \right] \quad (30.A)$$

D'après l'équation mentionnée ci-dessus, nous remarquons que si  $i \neq j$  le noyau  $G(x, y)$  n'est en aucun cas singulier puisque la distance  $R$  qui sépare les deux points  $x$  et  $y$  ne s'annule jamais. Toutefois, dans le cas ou  $i = j$  nous serons mené à traiter le cas de singularité.

## Annexe 2 : Matrice d'influence d'un élément sur un autre

En désignant par  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  les coordonnées locales de surface d'un point courant  $x$  appartenant à un élément triangulaire  $T_i$ , les coordonnées  $X_1, X_2, X_3$  de ce même point se représentent dans le repère global sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X_1 &= N_1(\xi)X_{11} + N_2(\xi)X_{12} + N_3(\xi)X_{13} \\ X_2 &= N_1(\xi)X_{21} + N_2(\xi)X_{22} + N_3(\xi)X_{23} \\ X_3 &= N_1(\xi)X_{31} + N_2(\xi)X_{32} + N_3(\xi)X_{33} \end{aligned} \tag{B.1}$$

$N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi)$  désignent les fonctions d'interpolation linéaires qui s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} N_1 = \xi_1 \\ N_2 = \xi_2 \\ N_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \end{cases} \tag{B.2}$$

Sous forme matricielle, l'équation (B.1) s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \tag{B.3}$$

Le vecteur normal  $\vec{n}$  en au point  $x$  appartenant au triangle linéaire  $T_i$  est exprimé par l'une des trois formules :

$$\vec{n} = \frac{\overline{31} \times \overline{32}}{2S_i} = \frac{\overline{21} \times \overline{23}}{2S_i} = \frac{\overline{12} \times \overline{13}}{2S_i} \quad (\text{B.4})$$

Où  $S_i$  désigne la surface du triangle  $T_i$ .

Désignons par  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  les coordonnées locales de surface d'un point courant  $y$  appartenant à un élément triangulaire  $T_j$ . Les coordonnées globales  $Y_1, Y_2, Y_3$  du point  $y$  s'expriment sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Avec

$$\begin{cases} N'_1 = \eta_1 \\ N'_2 = \eta_2 \\ N'_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

La distance  $R$  s'exprime ainsi par la relation matricielle suivante :

$$R = \sqrt{\left( \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{Bmatrix} \right)^2} \quad (\text{B.7})$$

En posant :

$$A^i = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^j = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

On a encore :

$$R = \sqrt{\left( \sum_{k=1}^3 [A_{kl}^i N_l - A_{kl}^j N_l] \right)^2} \quad (\text{B.9})$$

Les indices k et l désignent respectivement le numéro du nœud et l'axe de projection dans le repère global.

### Expression élémentaire de la matrice d'auto-influence

Selon (A.30), l'intégrale élémentaire de l'intégrale d'auto-influence est exprimée par :

$$I = - \int_{\Gamma_x^i} \int_{\Gamma_y^j} (G(x, y) [k^2 (\bar{n}_x \cdot \bar{n}_y) - (\bar{n}_x \times \nabla_x q'(x)) \cdot (\bar{n}_y \times \nabla_y q'(y))]) d\Gamma_x^i d\Gamma_y^j \quad (\text{B.10})$$

Qui, sur les triangles de références  $t^i$  et  $t^j$ , s'écrit :

$$I = -4S^i S^j \int_{t^i} \int_{t^j} (G(x, y) [(\bar{n}_i \cdot \bar{n}_j) k^2 q'(x) q'(y) - (\bar{n}_i \times \nabla_x q'(x)) \cdot (\bar{n}_j \times \nabla_y q'(y))]) dt^i dt^j \quad (\text{B.11})$$

Cette intégrale se décompose de deux termes :

$$I_1 = -4S^i S^j (\bar{n}_i \cdot \bar{n}_j) k^2 \int_{t^i} \int_{t^j} (G(x, y) q'(x) q'(y)) dt^i dt^j \quad (\text{B.13})$$

Et

$$I_2 = 4S^i S^j \iint_{t_i' t_j'} (G(x,y) (\vec{n}_x \times \nabla_x q'(x)) \cdot (\vec{n}_y \times \nabla_y q'(y))) dt_i' dt_j' \quad (\text{B.14})$$

En utilisant des interpolations linéaires sur  $q(x)$  et  $q(y)$ , nous déduisons alors :

$$I_1 = -4S^i S^j (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j) k^2 \langle \{q^i\} \cdot [A_1] \cdot \{q^j\} \rangle \quad (\text{B.15})$$

$$I_2 = -S^i S^j \langle \{q^i\} \cdot [A_2] \cdot \{q^j\} \rangle \quad (\text{B.16})$$

Avec :

$$[A_1]^{el} = \iint_{t_i t_j} \{N^i\} \cdot \{N^j\}^T G(x,y) dt_i dt_j \quad (\text{B.17})$$

$$[A_2]^{el} = [R^i]^T \cdot [R^j] \iint_{t_i t_j} G(x,y) dt_i dt_j \quad (\text{B.18})$$

$[R^i]$  et  $[R^j]$  sont les matrices de rotation associées aux triangles 'i' et 'j' données par les formules suivantes :

$$[R^i] = \begin{bmatrix} X_{12} - X_{13} & X_{13} - X_{11} & X_{11} - X_{12} \\ X_{22} - X_{23} & X_{23} - X_{21} & X_{21} - X_{22} \\ X_{32} - X_{33} & X_{33} - X_{31} & X_{31} - X_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$[R^j] = \begin{bmatrix} Y_{12} - Y_{13} & Y_{13} - Y_{11} & Y_{11} - Y_{12} \\ Y_{22} - Y_{23} & Y_{23} - Y_{21} & Y_{21} - Y_{22} \\ Y_{32} - Y_{33} & Y_{33} - Y_{31} & Y_{31} - Y_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$