

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

CONTRÔLE D'UN BRAS ROBOTIQUE FLEXIBLE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR

MARIAM BAROUDI

AOÛT 2010



# BIBLIOTHÈQUE

Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue  
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

## Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

## REMERCIEMENTS

Avant d'entrée dans le vif du sujet, j'aimerais bien profiter de cette occasion pour arborer mes sincères remerciements à mes directeurs. Je remercie vivement **Professeur Mohamad SAAD** et **Professeur Walid GHIE** de m'avoir encouragé et encadré durant toute la durée de mon programme tant au niveau académique qu'au niveau personnel. Je les remercie de m'avoir donné la chance de bénéficier de leur expérience, leurs conseils et leurs observations. Je remercie les membres de jury d'avoir retenu l'attention de mon projet.

J'adresse mes vifs remerciements à mes parents de m'avoir offert l'encouragement et le support morale durant toute ma vie universitaire.

Je conclus en remerciant mes amis et toutes autres personnes ayant participé à la réussite de ce travail et à fournir l'atmosphère convenable.

## TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION GÉNÉRALE</u>	<u>1</u>
<u>CHAPITRE-1- ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE</u>	<u>4</u>
1. INTRODUCTION .....	5
2. MODÉLISATION DYNAMIQUE .....	5
2.1. MÉTHODE DES MODES SUPPOSÉS .....	6
2.2. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS .....	6
2.3. MÉTHODE DES CORPS RIGIDES AVEC LIEN ÉLASTIQUE .....	7
3. CONTRÔLE .....	7
3.1. TECHNIQUES DE CONTRÔLE CLASSIQUE .....	8
3.2. TECHNIQUES DE CONTRÔLE MODERNE .....	9
3.3. COMPARAISONS ENTRE DES TECHNIQUES DE CONTRÔLE CLASSIQUE ET MODERNE .....	11
4. OBJECTIFS .....	13
5. CONCLUSION .....	14
<u>CHAPITRE-2- MODÉLISATION DU SYSTÈME</u>	<u>15</u>
1. INTRODUCTION .....	16
2. DESCRIPTION DU SYSTÈME .....	16
2.1. LE SYSTÈME RÉEL .....	16
2.2. REPRÉSENTATION SCHÉMATIQUE .....	20
3. CINÉMATIQUE .....	22
3.1. ÉNERGIE CINÉTIQUE .....	23
3.2. ÉNERGIE POTENTIELLE .....	23
3.3. DISSIPATION DE RAYLEIGH .....	24
4. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS (MEF) .....	24

4.1.	ÉNERGIE CINÉTIQUE ET MASSE ÉLÉMENTAIRE	.....28
4.2.	ÉNERGIE POTENTIELLE ET RIGIDITÉ ÉLÉMENTAIRE	.....29
4.3.	ASSEMBLAGE DES MATRICES ÉLÉMENTAIRES	.....29
4.4.	DYNAMIQUE	.....30
5.	MÉTHODE DES MODES SUPPOSÉS (MMS)	.....31
5.1.	ÉNERGIE CINÉTIQUE	.....32
5.2.	ÉNERGIE POTENTIELLE	.....33
5.3.	DYNAMIQUE	.....33
5.4.	FONCTIONS DE FORME	.....34
6.	MODÈLE D'ÉTAT	.....36
7.	MÉTHODE DES CORPS RIGIDES AVEC LIEN ÉLASTIQUE	.....36
8.	MODÉLISATION DU SERVOMOTEUR SRV02	.....39
9.	CONCLUSION	.....44

### CHAPITRE -3- TECHNIQUES CLASSIQUES DE CONTRÔLE 46

1.	INTRODUCTION	.....47
2.	NOTIONS DE CONTRÔLABILITÉ ET D'OBSERVABILITÉ	.....47
2.1.	CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES	.....48
2.2.	OBSERVABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES	.....49
3.	CONTRÔLE PROPORTIONNEL DÉRIVÉ (PD)	.....51
4.	CONTRÔLE PAR RETOUR D'ÉTAT	.....52
4.1.	FORME CANONIQUE DE CONTRÔLABILITÉ ET D'OBSERVABILITÉ	.....53
4.2.	CONCEPTION DU CONTRÔLEUR À RETOUR D'ÉTAT	.....55
4.3.	CALCUL DU GAIN PAR RETOUR D'ÉTAT	.....57
4.4.	DÉVELOPPEMENT DE L'ALGORITHME DE CALCUL	.....57
5.	COMMANDE OPTIMALE (CONTRÔLE LINÉAIRE-QUADRATIQUE)	59
6.	ESTIMATEUR D'ÉTATS	.....62
7.	APPLICATION ET RÉSULTATS	.....64
7.1.	CONTRÔLE PROPORTIONNEL – DÉRIVÉ (PD)	.....64
7.2.	CONTRÔLE PAR RETOUR D'ÉTAT ET COMMANDE OPTIMALE	.....66
8.	CONCLUSION	.....77

### CHAPITRE-4- TECHNIQUES MODERNES DE CONTRÔLE 78

1.	INTRODUCTION	.....79
2.	STABILITÉ DE LYAPUNOV	.....79

2.1. STABILITÉ LOCALE	.....80
2.2. STABILITÉ GLOBALE	.....80
3. LINÉARISATION ENTRÉE – SORTIE	.....80
3.1. CONCEPTION DU CONTRÔLEUR	.....81
4. CONTRÔLE PAR MODES DE GLISSEMENT	.....85
4.1. ÉTUDE THÉORIQUE	.....85
4.2. CONCEPTION DU CONTRÔLEUR	.....87
4.3. AMÉLIORATION DE LA COMMANDE	.....89
5. APPLICATION ET RÉSULTATS	.....90
5.1. SIMULATION	.....90
5.2. EXPÉRIMENTATION	.....97
6. CONCLUSION	.....101
<u>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES</u>	<u>102</u>
<u>ANNEXE – A</u>	
<u>VALEURS NUMÉRIQUES DES MATRICES DE MASSE ET DE RIGIDITÉ</u>	
<u>CALCULÉES PAR LA MEF</u>	<u>110</u>
<u>ANNEXE – B</u>	
<u>VALEURS NUMÉRIQUES DES MATRICES DE MASSE ET DE RIGIDITÉ</u>	
<u>CALCULÉES PAR LA MMS</u>	<u>112</u>

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Représentation schématique d'un manipulateur à deux bras flexibles.....	10
2.1 Le système à un bras flexible.....	17
2.2 Les deux configurations du servomoteur.....	18
2.3 Description du système réel.....	19
2.4 Schéma du bras flexible.....	21
2.5 Degrés de liberté de l'élément j.....	26
2.6 Fonctions de forme pour un élément de poutre.....	27
2.7 Processus d'assemblage.....	30
2.8 Modèle simplifié du bras flexible.....	37
2.9 Circuit d'induit du moteur.....	40
2.10 Diagramme en bloc du servomoteur SRV02.....	42
2.11 Schéma bloc global du système tout entier.....	44

3.1	Structure du contrôleur PD.....	51
3.2	Système contrôlé par retour d'état.....	56
3.3	Représentation du système contrôlé par un régulateur LQR.....	62
3.4	Représentation schématique d'un estimateur d'état .....	63
3.5	Résultat de la simulation.....	64
3.6	Résultat expérimental.....	65
3.7	Loi de commande appliquée.....	66
3.8	Système contrôlé disposant d'un estimateur d'état.....	67
3.9	Implémentation du système dans MATLAB/SIMULINK.....	68
3.10	Position de l'extrémité du bras pour les valeurs $K_1$ du gain.....	70
3.11	Position de l'extrémité du bras pour les valeurs $K_2$ du gain.....	71
3.12	Position de l'extrémité du bras contrôlé par le régulateur LQR.....	72
3.13	Implémentation du contrôleur dans Matlab/Simulink.....	73
3.14	Position de l'extrémité du bras dans le cas du contrôle par retour d'état.....	74
3.15	Position de l'extrémité du bras contrôlé par LQR.....	75
3.16	Lois de commande appliquées dans le cas du contrôle par retour d'état.....	76
3.17	Loi de commande appliquée dans le cas du contrôle LQR.....	76
4.1	Hyperplan de commutation.....	86



4.2	Phénomène de battement dû à l'imperfection du contrôleur lors de la commutation.....	89
4.3	Position de l'extrémité du bras contrôlé par retour d'état.....	91
4.4	Position de l'extrémité du bras contrôlé par le régulateur LQR.....	92
4.5	Implémentation du contrôleur par linéarisation entrée – sortie.....	93
4.6	Vue détaillée du contrôleur ' <i>Sliding Mode Control</i> '.....	94
4.7	Position de l'extrémité du bras flexible contrôlé par la technique de linéarisation entrée – sortie.....	95
4.8	Position de l'extrémité du bras contrôlé par modes de glissement.....	96
4.9	Dépassement à l'instant d'établissement du régime permanent.....	96
4.10	Implémentation du contrôle classique sur le système réel.....	97
4.11	Position de l'extrémité du bras contrôlé par retour d'état.....	98
4.12	Position de l'extrémité du bras contrôlé par LQR.....	99
4.13	Implémentation du contrôleur par modes de glissement monté sur le système réel.....	100

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
2.1 Composantes du bras flexible rotationnel.....	19
2.2 Spécifications du bras flexible.....	22
2.3 Paramètres du servomoteur SRV02.....	43
3.1 Effets de l'augmentation des paramètres.....	52

## RÉSUMÉ

**L**E contrôle des systèmes mécaniques, plus particulièrement des manipulateurs robotiques, est un domaine actif de la recherche appliquée. Les robots classiques utilisés dans l'industrie sont extrêmement précis mais relativement lents, massifs et exigent des moteurs puissants. Les efforts déployés dans la modélisation et le contrôle de manipulateurs flexibles sont alors motivés par la demande prévue d'un poids léger, de la précision et d'une grande vitesse des robots dans diverses applications. En fait, dans le cas d'un robot rigide, la connaissance de l'angle moteur permet d'obtenir directement la position de l'extrémité. Par contre, à cause de la flexibilité, la rotation de la base d'un bras flexible entraîne l'oscillation du bras tout entier. Le contrôle direct de l'extrémité d'un robot flexible est plus difficile que celui d'un robot rigide. D'où le besoin d'une loi de commande qui contrôle la position de l'extrémité en tenant compte des déformations de la membrure. Ceci constitue l'objectif de recherche de ce travail. Pour y arriver, on commence par développer le modèle d'un système à un bras flexible entraîné par un moteur à courant continu. Ensuite, il s'agit du développement des lois de contrôle qui assurent la régulation de l'extrémité tout en réduisant les vibrations du bras. Finalement, les performances des contrôleurs développés sont simulées sur un banc d'essai.

## ABSTRACT

**T**HE control of mechanical systems and particularly of robotic manipulators is an active applied research area. Most existing robots, rigid manipulators, achieve good positioning accuracy by using heavy materials. As a consequence, such robots are usually heavy which limits the speed of operation of the robot manipulation and increases the energy consumption. After the era of rigid robotics, major research activities was devoted to improve dynamic performances and to reduce the mass of robotic systems by considering structural flexibility in robots arms. However, the question of modeling and control of flexible manipulators is challenging due to precise positioning requirements. In fact, knowing the base angle of a rigid arm leads directly to knowing the tip position. In contrast, system flexibility leads to the appearance of oscillations at the tip of the link during motion. These oscillations make the control problems of such systems really difficult. Hence the need for a control law that controls the tip position and takes in consideration the deformation of the link. In this purpose, we started by modeling the system consisting of a flexible single-link driven by a DC motor. After that, we developed control laws in order to minimize the vibrations while regulating the tip position. Finally, performances of such controllers were tested by simulation and experimentally on an experimental flexible arm system.

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'accroissement continu de l'utilisation des manipulateurs robotiques dans diverses applications est motivé par les besoins et les demandes en automatisation et les besoins industriels. Le contrôle des systèmes mécaniques, plus particulièrement les manipulateurs robotiques, est un domaine actif de la recherche appliquée. Les applications importantes des robots ne sont pas limitées seulement à celles qui remplacent l'être humain, tels que le déplacement des matériaux, des pièces ou des éléments spécialisés, mais également là où la présence de l'homme est soit indésirable, tels que les milieux explosifs et radioactifs, soit impossible telles que l'exploration planétaire et la réparation de satellites.

L'objectif principal de cette recherche consiste à développer un algorithme permettant le contrôle des manipulateurs robotiques flexibles. Ce projet est donc motivé par l'intérêt de disposer des robots à membrures flexibles présentant des avantages divers en comparaison avec les manipulateurs rigides classiques.

Parmi les différents types de manipulateurs rigides et flexibles, l'attention est surtout concentrée envers les manipulateurs robotiques flexibles. Cela est dû au fait que ces derniers exposent plusieurs avantages par rapport aux robots à membrures rigides. En

effet, les manipulateurs flexibles requièrent moins de matériaux, sont plus légers et par suite leur vitesse de manipulation est plus grande. Ils ont besoin de moteurs moins puissants et requièrent de petits actionneurs. De plus, ce type de manipulateurs est plus manœuvrable et transportable, possède un coût global réduit et peut supporter des charges à poids élevé par rapport au poids du robot lui-même. Cependant, le contrôle performant de ces manipulateurs flexibles dans le but d'assurer la précision de leur positionnement constitue le problème majeur des recherches récentes.

Les problèmes qui surgissent lors de la conception des contrôleurs convenables sont dûs à la flexibilité qui provoque la vibration des membrures, à la difficulté d'obtenir un modèle performant qui décrit le système le plus exactement possible et à la caractéristique du système à non minimum de phase. En d'autres termes, la dynamique, donc les vibrations des manipulateurs flexibles constitue le principal défi de la recherche tant dans le domaine de modélisation que le contrôle de tels systèmes.

Dans le but de bénéficier des avantages associés au poids légers de tels manipulateurs et de positionner l'extrémité du bras flexible tout en assurant la précision désirée, des modèles performants et des stratégies de contrôle efficaces doivent être développés et appliqués au manipulateur flexible qu'on dispose. En fait, le contrôle précis de la position de l'extrémité du bras flexible exige l'élimination ou la réduction des vibrations résiduelles dues à la flexibilité. Par conséquent, les recherches actives dans ce domaine cherchent à développer des méthodes de contrôle de ce type de systèmes.

Le premier chapitre présente une étude bibliographique qui rapporte les diverses méthodes de modélisation et les multiples techniques, classiques et modernes, de commande des manipulateurs robotiques flexibles présentées dans la littérature.

De nombreuses recherches concernant le développement des modèles dynamiques des manipulateurs flexibles sont déjà réalisées. Ces recherches ont abouti à la description du système soit par des équations aux dérivées partielles, soit par des

équations différentielles ordinaires de dimension finie. Puis dans le but de compléter l'étude théorique par une étude expérimentale de différentes stratégies de contrôle, on dispose d'un manipulateur constitué d'un moteur à courant continu, un bras flexible, un encodeur qui mesure l'angle à la base et une jauge qui donne des informations sur la déformation de l'extrémité du bras. La description du montage suivie d'une étude détaillée sur les différentes méthodes de modélisation développées est présentée au deuxième chapitre de ce rapport.

Les diverses techniques de commande peuvent être regroupées en deux catégories: les méthodes classiques et les méthodes modernes. Les techniques de contrôle classiques sont: le contrôle proportionnelle-dérivée (PD), le contrôle par retour d'états et la commande optimale. Le chapitre 3 développe le contrôle par retour d'état et la commande linéaire-quadratique (LQR) ou commande optimale. Dans ce chapitre sont aussi présentés les résultats de simulation et les résultats expérimentaux obtenus suite à l'application de ces techniques de commande.

Les techniques de contrôle modernes sont multiples parmi lesquelles on a étudié et appliqué le contrôle par couple pré-calculé et la commande par mode de glissement. Ces études sont développées dans le chapitre 4. Ce dernier présente de même les résultats de simulation de ces méthodes. On complète ce chapitre par une comparaison entre les résultats obtenus par les méthodes classiques et ceux obtenus par les techniques modernes.

Finalement, ce travail se termine par une conclusion générale qui résume les résultats obtenus et une brève description du travail futur pouvant avoir lieu dans ce domaine de recherche.

Les travaux de simulation réalisés dans ce projet sont effectués à l'aide du logiciel MATLAB(7.5.0)/SIMULINK(V7.0)®. Ultérieurement, les travaux d'expérimentation sont réalisés sur un module à un bras flexible développé par la compagnie Quanser.

## CHAPITRE 1

### ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

**C**E chapitre présente une revue générale des principales méthodologies déjà développées dans le cadre de la modélisation, la simulation et le contrôle des manipulateurs flexibles. L'étude bibliographique élaborée dans ce qui suit, porte sur le développement dans le domaine de la modélisation, la simulation et le contrôle des manipulateurs robotiques flexibles. En effet, durant les années récentes, ce domaine a attiré l'attention des chercheurs à cause des performances réclamées dans le domaine de la robotique et des applications spatiales demandant des structures flexibles et légères. Vu le nombre important de publications dans ce sujet, une telle étude semble être exhaustive. Cependant, on présente dans ce chapitre les progrès les plus marquants selon les besoins du projet.



## 1. INTRODUCTION

Les diverses recherches réalisées sur les systèmes à manipulateurs flexibles varient d'un manipulateur à un seul bras flexible tournant autour d'un axe fixe, jusqu'aux manipulateurs à trois dimensions formés de plusieurs bras flexibles. Cependant, notre travail se limite à l'étude des manipulateurs robotiques constitués d'un seul bras flexible.

La recherche dans le domaine de la robotique flexible peut-être subdivisé en deux parties essentielles: la modélisation et le contrôle de la position de l'extrémité du bras. Plusieurs méthodes de modélisation et diverses techniques de contrôle ont été étudiées jusqu'à présent. Les différentes études de modélisation sont présentées et analysées par la suite.

## 2. MODÉLISATION DYNAMIQUE

Dans le but de développer des lois de commande performantes et d'atteindre les précisions demandées, il faut commencer par construire des modèles mathématiques précis.

Cette partie concerne la modélisation des manipulateurs à un bras flexible. Les deux méthodes largement utilisées dans la littérature dans le but de discrétiser la déformation du bras flexible sont la méthode des modes supposées (MMS) et la méthode d'éléments finis (MEF). Dans les deux cas la formulation des équations dynamiques s'effectue par la méthode de Lagrange. On aboutit à une structure dynamique représentée par des équations différentielles. Il s'agit donc de résoudre un problème aux valeurs propres.

## 2.1. MÉTHODE DES MODES SUPPOSÉS

La méthode des modes supposés a été utilisée par différents chercheurs (Saad et al., 2006; Saad, 2004; Piedboeuf, 1992; Pal, Stephanou et Cook, 1988; Geniele, Patel et Khorasani, 1997; Ahmad et al., 2008; Cho, Angeles et Hori, 1994; Ziarati, 1993). D'après ces études, la déformation est représentée par une somme pondérée des fonctions de forme. En d'autres termes, la méthode consiste en l'approximation de la solution d'un problème aux valeurs propres par une série finie de fonctions supposées multipliées par des coefficients indéterminés. (Saad et al., 2006; Saad, 2004) présentent l'étude de deux types de fonctions de formes: les fonctions polynomiales et les fonctions propres des poutres. Alors que (Piedboeuf, 1992) présente uniquement les équations des fonctions propres d'une poutre encastrée sans charge. (Pal, Stephanou et Cook, 1988; Geniele, Patel et Khorasani, 1997) ont formulé les équations dynamiques d'un système à un bras flexible avec la méthode d'Euler-Bernoulli.

## 2.2. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Un autre moyen de discrétisation est de définir des fonctions de forme par morceaux. Le bras est alors divisé en un certain nombre d'intervalles et un polynôme de degré réduit est utilisé pour chaque intervalle. C'est le cas de la méthode des éléments finis. Les études effectuées par (Saad et al., 2006; Saad, 2004) portent sur deux types de fonctions d'interpolation: les splines cubiques et les B-splines cubiques. D'autres études concernent uniquement les splines cubiques telles que (Piedboeuf, 1992; Cho, Angeles et Hori, 1994; Dancose, Angeles et Hori, 1989; Cho, Hori et Angeles, 1991). Les polynômes d'Hermite sont souvent utilisés comme fonctions d'interpolation dans la MEF, tel que présenté par (Tokhi et Mohamed, 1999; Usoro, Nadira et Mahil, 1986; Aoustin et al., 1994).

Une comparaison entre la méthode des modes supposés et la méthode des éléments finis utilisant les splines cubiques et leur effet sur le modèle obtenu est présentée dans les études effectuées par (Cho, Angeles et Hori, 1994; Saad et al., 2006). De même, (Theodore et Ghosal, 1995) ont effectué la comparaison dans le cas d'un manipulateur à plusieurs bras flexibles.

Une comparaison entre les avantages et les inconvénients de ces méthodes permet de conclure que la méthode des MMS et la méthode MEF permettent de créer des modèles proches de la géométrie réelle. Cependant, la méthode des éléments finis présente l'inconvénient qui se résume par la mise en œuvre laborieuse et un temps d'exécution des calculs informatiques pouvant être parfois très long.

### 2.3. MÉTHODE DES CORPS RIGIDES AVEC LIEN ÉLASTIQUE

(Popescu, Sendrescu et Bobasu, 2008; Quanser) ont modélisé le système en traitant la base tournante comme étant un corps rigide et le bras flexible comme étant un corps élastique à un degré de liberté ayant une rigidité constante.

Des études plus détaillées concernant diverses méthodes de modélisation sont développées par (Dwivedy et Eberhard, 2006).

## 3. CONTRÔLE

Le contrôle des manipulateurs flexibles, dans l'intention d'atteindre et de maintenir avec précision une position désirée, constitue un défi. De nombreuses méthodes de contrôle classiques et modernes existent avec lesquelles de bons contrôleurs peuvent être conçus si les paramètres étaient considérés fixes et connus. Cependant, la variation des paramètres du système dû aux changements des conditions du travail sollicitent les contrôleurs modernes utilisant des gains variables.

Les différentes études effectuées dans ce domaine concernent diverses méthodes de commande, telles que les techniques classiques de contrôle: régulateur proportionnel-dérivée (PD), contrôle par retour d'état et régulateur linéaire-quadratique (LQR). D'autres méthodes modernes sont de même appliquées telles que le contrôle par modes de glissement, la commande adaptative et autres. En effet, dans tous ces cas, le développement d'un modèle mathématique précis et efficace est nécessaire.

### 3.1. TECHNIQUES DE CONTRÔLE CLASSIQUE

La commande optimale représente la technique de contrôle classique largement employée par divers chercheurs. Cette commande traduite par le contrôle Linéaire-Quadratique est étudiée et détaillée par (Pal, Stephanou et Cook, 1988; Cho, Angeles et Hori, 1994; Dancose, Angeles et Hori, 1989; Cho, Hori et Angeles, 1991; Piedboeuf et al., 1991; Zhu et Mote, 1997).

(Cho, Hori et Angeles, 1991) ont discuté en plus de la contrôlabilité et l'observabilité du système. (Konno et al., 1994; Fukuda et Arakawa, 1989) ont étudié la commande optimale pour le cas des manipulateurs robotiques à deux bras flexibles.

En fait, pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le XIX<sup>ème</sup> siècle avec le calcul des variations. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité.

Le contrôleur anticipatif classique souvent employé dans le cas des robots rigides est étudié et testé dans le cas d'un manipulateur à un bras flexible par (Ziarati, 1993). Cependant un critère de choix de la commande par anticipation est la disponibilité d'une variable de perturbation mesurable. De plus, ce type de commande n'est

appliqué qu'au cas où la commande à contre réaction est insatisfaisante. De ce fait, la commande anticipative se trouve rarement utilisée dans le domaine de la robotique flexible.

### 3.2. TECHNIQUES DE CONTRÔLE MODERNE

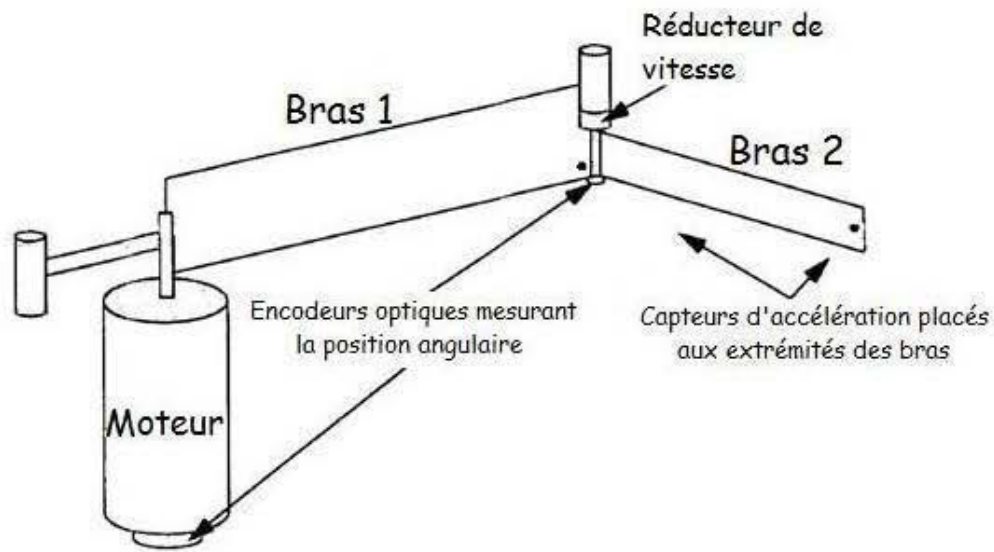
(Banavar et Dominic, 1995) ont cherché à améliorer les performances d'un contrôleur classique du type LQG en combinant la théorie de contrôle robuste de la forme  $H_\infty$ . Cela permet de garantir la stabilité du système face aux perturbations extérieures.

Une technique du contrôle moderne est traitée par (Popescu, Sendrescu et Bobasu, 2008). Il s'agit dans ce cas du contrôle optimal robuste appliqué à un bras flexible dans le but d'atteindre la stabilité désirée.

Par rapport à la commande LQR, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariables, de ce fait elle a connu un grand succès. Mais, depuis la fin du XX<sup>ème</sup> siècle, la commande  $H_\infty$  apparaît comme un sérieux concurrent pour l'asservissement robuste des systèmes multivariables. Néanmoins, la commande LQG n'en demeure pas moins un standard industriel.

Une généralisation de la méthode du couple pré-calculé, employée dans le cas des robots rigides, puis une étude du contrôle adaptatif sont présentées par (Fareh, Saad et Saad, 2009). Dans les deux cas, les contrôleurs ont été obtenus en utilisant la technique des modes de glissement.

La commande adaptative directe est appliquée à un manipulateur à deux bras flexibles par (Ozcelik, Yesiloglu et Temeltas, 2006). Le schéma d'un tel manipulateur est illustré à la figure (1.1).



**Figure 1.1** Représentation schématique d'un manipulateur à deux bras flexibles.

Le modèle du manipulateur à un bras flexible est linéarisé autour d'un point d'opération dans (Geniele, Patel et Khorasani, 1997). Cela permet l'application de diverses techniques de contrôle et facilite la manipulation du système. Les résultats expérimentaux ont montré de bonnes performances en ce qui concerne le suivi de la trajectoire désirée et une erreur en régime permanent négligeable. Mais les oscillations réapparaissent lorsque la position désirée de l'extrémité dépasse une certaine limite.

Un contrôleur basé sur la technique des modes de glissement et la méthode de linéarisation entrée/sortie est étudié dans (Moallem, Khorasani et Patel, 1997) dans le cas d'un manipulateur à deux bras flexibles. Les résultats obtenus par simulation présentent de faible erreur en régime permanent et cela même en modifiant le gain du contrôleur. Cela a permis aux auteurs de faire une déduction sur la robustesse de ce contrôleur.

D'autres études basées sur la technique des modes de glissement sont présentées dans (Xu et Cao, 2000) dans le but d'annuler les modes de résonance, d'assurer la convergence des modes de glissement autour d'un point d'équilibre et réduire l'erreur en régime permanent. Les résultats des simulations confirment l'efficacité et la robustesse de tels contrôleurs.

(Lammerts et al., 1995) ont appliqué la méthode du couple pré-calculé et la méthode du contrôle adaptatif pour le cas du suivi de trajectoire. Cela est réalisé en tenant compte de la flexibilité du bras et celle des joints et la présence des paramètres incertains. Les résultats de la simulation montrent l'efficacité du contrôle adaptatif.

Parmi ces différentes techniques de commande robustes, la commande à structure variable par modes de glissement est une technique particulièrement intéressante à cause de la simplicité de son algorithme de réglage. De plus, cette commande garantit que le système atteint l'état désiré en un temps fini et son comportement devient insensible aux perturbations sur la sortie et aux variations paramétriques.

D'autre part, le couple pré-calculé, ou le contrôle basé sur l'approche de linéarisation entrée/sortie, souvent employé pour résoudre des problèmes pratiques de commande, demande un modèle précis du système à commander. De plus, les propriétés de robustesse ne sont pas garanties face aux incertitudes paramétriques du modèle.

### 3.3. COMPARAISONS ENTRE DES TECHNIQUES DE CONTRÔLE CLASSIQUE ET MODERNE

D'autres chercheurs ont fait la comparaison de plusieurs techniques de contrôle classiques et modernes, c'est le cas des études présentées par (Ahmad et al., 2008; Chaichanavong et Banjerdpongchai, 1999; Chang et Jurasaya, 1995; Aoustin et al., 1994; Geniele, Patel et Khorasani, 1997). L'effet du contrôle du type 'Delayed Feedback Signal' (DFS) est étudié par (Ahmad et al., 2008). Une comparaison des

résultats de la simulation de ce type de contrôle avec ceux obtenus dans le cas des contrôleurs classiques LQR et PD est présentée. Ces résultats ont montré que les meilleures performances, de point de vue réduction des vibrations, sont obtenues pour le cas du contrôle DFS. Cela est mis en évidence à partir des mesures effectuées sur la position angulaire, la vitesse angulaire et les déplacements modaux.

(Chaichanavong et Banjerdpongchai, 1999) ont effectué la comparaison entre la technique classique de commande optimale (LQR) et une technique basée sur la réponse fréquentielle 'Loop Shaping Control'. Dans ce cas, une charge variable qui peut se déplacer le long du bras flexible est considérée. Les résultats expérimentaux ont montré que les oscillations subsistent dans le cas du contrôle LQR. Par contre, dans le cas du 'Loop Shaping control' les oscillations sont notamment réduites.

Plusieurs méthodes de contrôle sont étudiées par (Chang et Jurasaya, 1995), tels que le contrôle PD, LQR, la théorie du servomécanisme robuste et la commande quantitative (Quantitative Feedback Theory QFT). Les résultats expérimentaux obtenus dans cette étude sont conformes avec ceux des simulations et montrent des performances raisonnables pour chacun des contrôleurs PD, LQR et QFT. Ce dernier nécessite le moins de réglage en comparaison avec le contrôle PD et le contrôle LQR.

(Aoustin et al., 1994) ont effectué la comparaison des résultats obtenus par applications des contrôleurs PD, LQR, les techniques de linéarisation par retour d'état (Feedback Linearization Techniques), la théorie des perturbations singulières (Singular Perturbation Theory) et la technique des modes de glissement (Sliding Mode Techniques). Les expériences réalisées sont effectuées sur des manipulateurs dont la flexibilité est supérieure à la flexibilité standard qui apparaît généralement dans le cas des applications industrielles. Dans ce cas, la méthode basée sur la théorie des perturbations singulières a donné les meilleurs résultats de point de vue suivi de la trajectoire désirée. Cependant, l'erreur en régime permanent existe toujours pour cette technique de contrôle.



Le contrôle PD, la commande prédictive (Feedforward Control Techniques) et une commande avec retour des signaux des jauges sont les méthodes étudiées par (Mohamed et al., 2005). Une simulation est effectuée dans le cas d'un manipulateur à deux bras flexibles. Les auteurs ont démontré qu'une réduction significative des vibrations du système est obtenue à l'aide du contrôleur hybride incorporant la commande prédictive et le retour des signaux des jauges. D'autre part, la commande avec retour des signaux des jauges correspond au contrôle le plus efficace en termes du suivi d'une entrée de référence.

Les revues de (Dwivedy et Eberhard, 2006; Benosman et LeVey, 2004) représentent d'une façon plus détaillée diverses études concernant les différentes méthodes de contrôle réalisées par une diversité de chercheurs. Les auteurs (Dwivedy et Eberhard, 2006) classifient les diverses études effectuées dans ce domaine selon le nombre de bras des manipulateurs robotiques considérés. D'autre part, la classification des études présentées par (Benosman et LeVey, 2004) est réalisée en regroupant les différentes techniques de commande selon les objectifs de contrôle.

#### 4. OBJECTIFS

Ce domaine de recherche a attiré une grande attention durant les deux dernières décennies et semble devenir moins attirant aujourd'hui, d'une part à cause des résultats satisfaisants obtenus jusqu'à présent, et d'autre part, à cause de la nature complexe des problèmes subsistants. Mais, à la suite de cette revue de littérature, on pourra nettement remarquer que certaines de ces études ratent la vérification expérimentale des résultats obtenus. Cela a sollicité la reproduction de quelque unes de ces études, dans le but de vérifier l'applicabilité et tester les algorithmes qu'on vient d'apercevoir. Ainsi, motivé par les résultats rencontrés dans l'étude bibliographique, on définit les différents objectifs de ce travail.

L'objectif général de ce projet se traduit par le développement d'un algorithme de contrôle permettant à l'extrémité du bras flexible d'atteindre la position désirée. Afin d'atteindre le point désiré avec précision, un algorithme performant assurant la stabilité et un minimum d'oscillations est recherché. Dans le but d'aboutir à cet objectif global, des objectifs particuliers prennent naissance. Ces derniers sont présentés explicitement comme suit:

- Obtenir un modèle pouvant représenter le système réel le plus exactement possible. Cela demande l'étude de la plupart des modèles déjà énoncés dans la revue de littérature.
- Assurer le positionnement de l'extrémité du bras. Ceci implique l'intérêt d'étudier, de concevoir et de comparer plusieurs lois de commande classiques et modernes.
- Tester les résultats obtenus par la simulation en appliquant les lois de commande ainsi conçues sur le système réel qu'on dispose.

## 5. CONCLUSION

Ce chapitre a présenté une étude bibliographique concernant les principales méthodologies de modélisation et de contrôle des manipulateurs flexibles surtout ceux formés par un seul bras flexible. Se basant sur tout ce qui précède, on conclut sur l'importance de disposer d'un modèle robuste et performant sur lequel on effectue les travaux de simulation. Pour cela, la première étape de ce projet consiste à modéliser le système formé par un manipulateur à un bras flexible qu'on dispose pour les études expérimentales. L'étude des différentes méthodes de modélisation et le développement d'un modèle dynamique pouvant représenter le système le plus exactement possible sera le sujet du chapitre suivant.

## CHAPITRE 2 MODÉLISATION DU SYSTÈME

**C**E chapitre présente le développement analytique des modèles relatifs au système constitué d'un manipulateur à un bras flexible disponible pour les travaux d'expérimentations. Le chapitre précédent présente les techniques qui utilisent les modes supposés et les éléments finis ont été recherchées dans le but d'obtenir une représentation dynamique qui décrit le mouvement du manipulateur robotique flexible concerné. Par conséquent, des algorithmes de simulations caractérisant le comportement dynamique du manipulateur flexible sont développés dans le but de produire les aspects flexibles pour l'analyse, les tests et la vérification des techniques de contrôle.

## 1. INTRODUCTION

Dans le but d'obtenir des résultats satisfaisants, un modèle performant et efficace doit être développé. Dans ce rapport, plusieurs techniques de modélisation sont étudiées et différentes méthodes de discrétisation spatiale sont appliquées dans le but d'approximer la solution des équations aux dérivées partielles caractérisant le modèle du système. Ces équations sont obtenues par application de la méthode de Lagrange à un bras robotique flexible tournant dans le plan horizontal en négligeant l'effet de l'allongement du bras. De ce fait, le modèle obtenu sera un modèle linéaire.

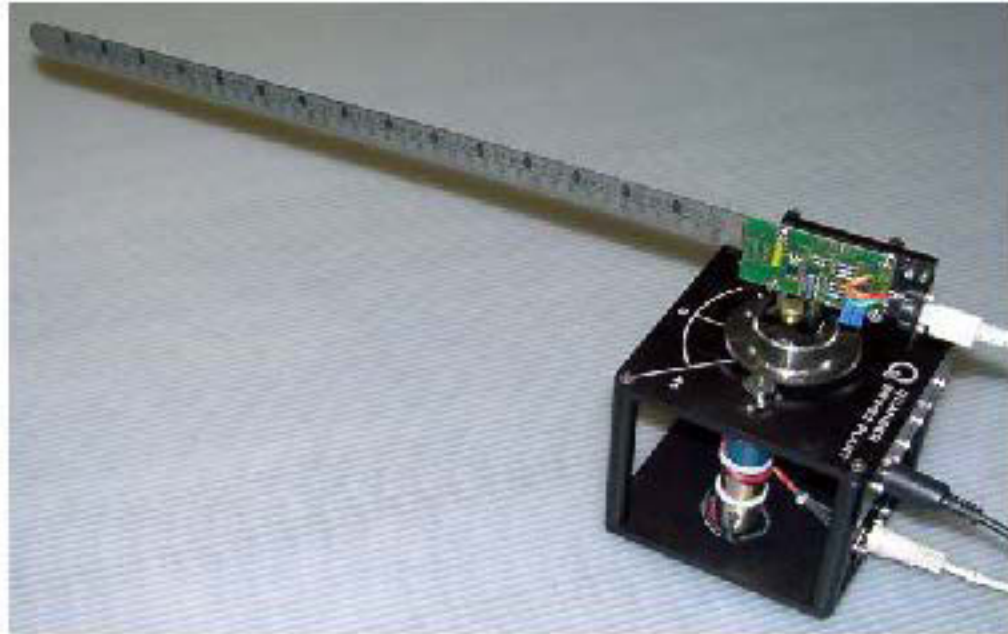
Par la suite, les méthodes de modélisation abordées dans ce travail seront détaillées. Il s'agit donc de la méthode des éléments finis, la méthode des modes supposées et la méthode considérant le bras flexible comme étant un ressort à rigidité constante et la base en rotation comme étant un corps rigide. Le modèle ainsi obtenu est un modèle à un degré de liberté (1DOF).

## 2. DESCRIPTION DU SYSTÈME

Avant de développer les différentes méthodes de modélisation, il est important de commencer par une description du système réel sur lequel sont effectuées les applications expérimentales.

### 2.1. LE SYSTÈME RÉEL

La figure (2.1) montre le manipulateur robotique à un bras flexible développé par la compagnie Quanser. Ce système ressemble en nature aux cas des grandes structures spatiales dont la contrainte du poids est traitée par la flexibilité des membrures. Ce système expérimental est idéal pour modéliser une membrure flexible qui sera montée sur un robot rigide ou dans les structures spatiales légères.



**Figure 2.1** Le système à un bras flexible.

Le système est constitué d'un servomoteur et d'un bras flexible fixé sur les engrenages d'un réducteur de vitesse à l'aide de deux vis. Le servomoteur (SRV02) peut-être monté en deux configurations:

- i) La configuration "Low-Gear Ratio" est recommandée lors de la modélisation du moteur, le contrôle de la position et le contrôle de la vitesse et ceux avec ou sans charges.
- ii) La configuration "High-Gear Ratio" est exigée lors de l'usage d'un module additionnel, c'est donc le cas du bras flexible.

Les figures (2.2a) et (2.2b) montrent le servomoteur dans chacun des deux cas.



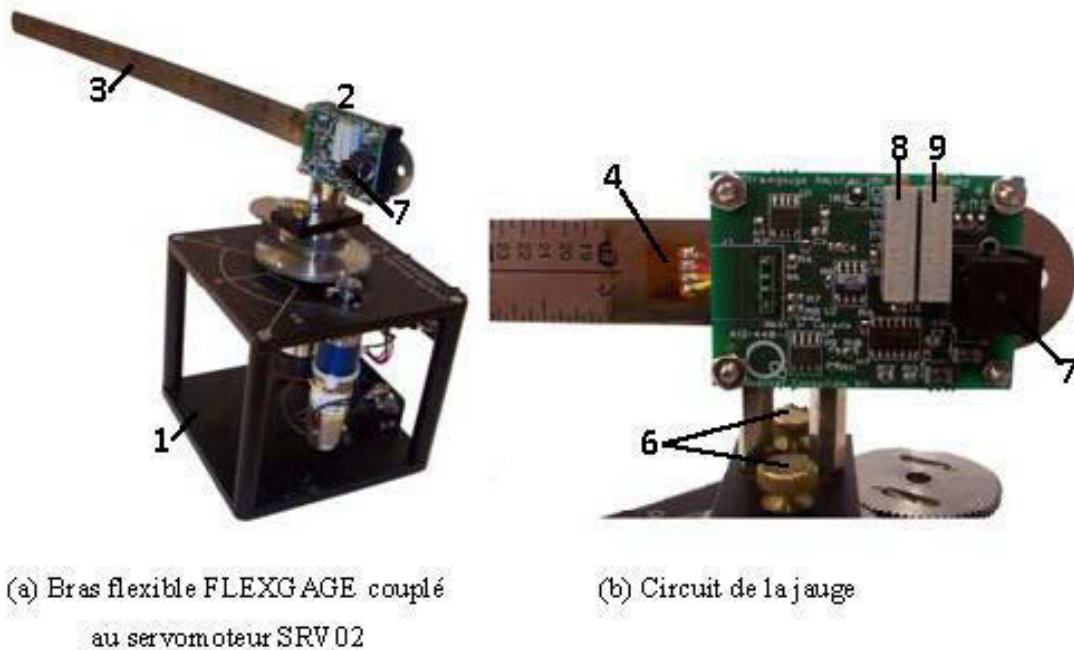
(a) Configuration "Low-Gear Ratio"

(b) Configuration "High-Gear Ratio"

**Figure 2.2** Les deux configurations du servomoteur.

Le module du manipulateur souple est constitué du servomoteur en configuration "High-Gear Ratio". L'entraînement du bras flexible est réalisé à l'aide du moteur DC placé à la base du bras. L'angle généré par le servomoteur est mesuré par un encodeur optique relié au moteur. La déformation de l'extrémité du bras est mesurée à l'aide d'une jauge placée à sa base. Le calibrage de la jauge est ajusté pour une sortie de 1 Volt par 1po de déflexion de l'extrémité.

Les principales composantes du bras flexible rotationnel sont énumérées dans le tableau (2.1) et sont détaillées dans les figures (2.3a) et (2.3b).



**Figure 2.3** Description du système réel.

**Tableau 2.1** Composantes du bras flexible rotationnel

Numéro	Composante
1	Servo-moteur SRV02
2	Module FLEXGAGE
3	Bras flexible FLEXGAGE
4	Jauge
5	Circuit de la jauge
6	Vis
7	Connecteur du capteur
8	Potentiomètre de réglage de l'OFFSET
9	Potentiomètre de réglage du GAIN

D'après (Quanser), les potentiomètres de réglage servent uniquement au réglage du bras flexible avant de commencer les travaux de programmation et de contrôle. Selon

ces documentations tout bras flexible fabriqué par la compagnie Quanser est calibré par la compagnie avant qu'il soit délivré aux utilisateurs.

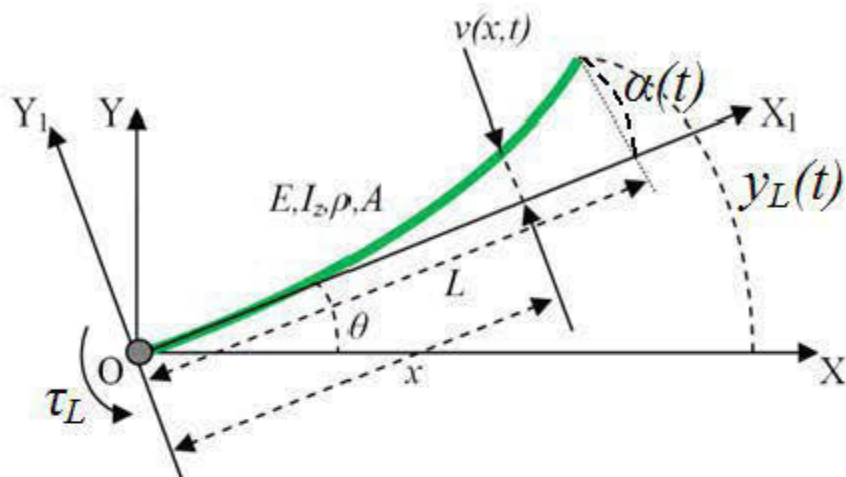
## 2.2. REPRÉSENTATION SCHEMATIQUE

Le manipulateur considéré est représentée schématiquement à la figure (2.4). Les repères  $XOY$  et  $X_1OY_1$  représentent respectivement le plan fixe dans lequel le bras tourne et le plan lié au bras flexible, c'est donc le plan en mouvement. Le tout étant dans le plan horizontal, on étudie alors juste les déformations en flexion qui ont lieu dans le plan de rotation. Les effets de gravitation sont négligés, et aussi on considère négligeables les effets de traction ou de torsion du bras.

Lors de la modélisation, les hypothèses simplificatrices suivantes sont considérées:

- Le bras est modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli (sans charge), ce qui entraîne les conséquences suivantes:
  - o L'inertie de rotation d'un élément est négligée c.à.d. que la masse du totale est considérée proche de l'axe de rotation (car on travail sur un bras flexible sans charge),
  - o Le cisaillement dû à l'effort tranchant est négligé.
- Les déformations du bras sont supposées petites.
- La vitesse de rotation est faible.
- On néglige de plus l'amortissement du bras.





**Figure 2.4** Schéma du bras flexible.

Le couple extérieur  $\tau_L$  est généré par le moteur sur la base du bras, et c'est celui-ci qui provoque la rotation de la base d'un angle  $\theta(t)$ . La rotation de la base entraîne la rotation du bras tout entier.  $v(x,t)$  correspond à la déformation d'un point du bras d'abscisse  $x$ . Cette déformation dépend non seulement de la position selon l'axe longitudinale du bras mais aussi du temps  $t$ .  $\gamma_L(t)$  est la position angulaire de l'extrémité du bras. C'est donc la somme de l'angle de rotation du moteur  $\theta(t)$  et de la déformation angulaire de l'extrémité  $\alpha(t)$ .

Le bras est supposé uniforme et de longueur  $L$ , de masse par unité de longueur  $\rho$  et de rigidité  $EI_z$ , où  $E$  est le module de Young et  $I_z$  est le moment d'aire selon l'axe de rotation  $z$ .  $A$  correspond à la section du bras. Les valeurs numériques des différents paramètres caractérisant le bras flexible sont données dans le tableau (2.2), le matériau utilisé étant l'aluminium:

Tableau 2.2 Spécifications du bras flexible.

Paramètre	Valeur	Unité
Longueur (L)	41.9	cm
Masse (M)	0.065	Kg
Module de Young (E)	193	GPa
Moment d'aire ( $I_z$ )	$1.67e-12$	$m^4$
Section (A)	20 x 1	mm x mm
Moment d'inertie ( $J_L$ )	0.004	$Kg.m^2$
Constante d'élasticité ( $K_{stiff}$ )	1.66	N/m

### 3. CINÉMATIQUE

Étant donné que la base ne se déplace pas en translation, la position du repère  $X_1OY_1$  par rapport au repère  $XOY$  est:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

On ne tient pas compte de l'allongement (c.à.d. en négligeant les termes d'ordre 2), la position d'un élément  $dm$  quelconque du bras par rapport à  $X_1OY_1$  est égale à:

$$P_{dm} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

D'après la figure (2.4),  $x$  est la position tout au long de l'axe longitudinal et  $v(x,t)$  la déformation du bras à la position  $x$  et à l'instant  $t$ .

La vitesse de rotation du repère  $X_1OY_1$  est égale à:  $\dot{\theta} \vec{k}_1$ , tandis que la dérivée de  $P_{dm}$  dans  $X_1OY_1$  s'écrit:  $\dot{v} \vec{j}_1$ . Avec,  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  les vecteurs unitaires définissant les axes du repère  $X_1OY_1$ , la vitesse de l'élément  $dm$  s'écrit alors:

$$v_{dm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{v} + x\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Pour générer le modèle dynamique, on a besoin de calculer le *Lagrangien*:

$$L = T - V$$

Où,  $T$  est l'énergie cinétique du système et  $V$  est son énergie potentielle. Pour cela, on commence par calculer les énergies du système.

### 3.1. ÉNERGIE CINÉTIQUE

L'énergie cinétique est définie comme suit:

$$T = T_B + \int_0^L T_{dm} \quad (2.4)$$

Où,  $T_B$  est l'énergie cinétique du moteur, et est exprimée par:

$$T_B = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 \quad (2.5)$$

$J_{eq}$  étant l'inertie du moteur vue du côté bras.

$T_{dm}$  est celle d'un l'élément  $dm$  du bras, et est exprimée par:

$$T_{dm} = \frac{1}{2} \rho v_{dm}^T v_{dm} dx \quad (2.6a)$$

$$T_{dm} = \frac{1}{2} \rho (\dot{v}^2 + x^2 \dot{\theta}^2 + 2x\dot{\theta}\dot{v}) \quad (2.6b)$$

### 3.2. ÉNERGIE POTENTIELLE

L'énergie potentielle du système provient uniquement de la poutre flexible:

$$V = \frac{1}{2} E I_z \int_0^L v''^2 dx \quad (2.7)$$

### 3.3. DISSIPATION DE RAYLEIGH

L'amortissement, provenant du moteur et de la poutre, se traduit par la fonction de dissipation de Rayleigh:

$$R = \frac{1}{2} B_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} EI_z \kappa_e \int_0^L \dot{v}''^2 dx \quad (2.8)$$

$B_{eq}$  correspond au coefficient d'amortissement visqueux du moteur à la base;

$\kappa_e$  est le coefficient d'amortissement interne du bras.

Dans la suite, on néglige le terme en  $\kappa_e$  puisque l'amortissement interne du bras est suffisamment faible (par hypothèse).

La dynamique du système est représentée par des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles. Par la suite, les différentes méthodes de modélisation développées au cours de notre travail sont détaillées, soit:

- La méthode des éléments finis (MEF)
- La méthode des modes supposés (MMS)
- La méthode des corps rigides avec lien élastique.

### 4. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS (MEF)

La méthode MEF est utilisée pour discrétiser spatialement les équations dynamiques des robots flexibles.

La première étape de la modélisation par la méthode des éléments finis est la discrétisation spatiale du domaine considéré. Cela est équivalent à réduire le nombre de degrés de liberté du domaine considéré. Ce qui permet de définir la déformation au point  $x$  par la forme suivante:

$$v(x, t) = N_a(x)q_a(t) \quad (2.9)$$

Où  $N_a(x)$  est une fonction de forme (fonction d'interpolation)

$q_a(t)$  est un déplacement nodal.

La deuxième étape consiste à choisir les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme. Les fonctions d'interpolation utilisées sont les fonctions cubiques d'Hermite.

Les expressions de ces fonctions d'interpolation sont déterminées comme suit:

$$v(x, t) = N_a(x)q_a(t) = \sum N_j(x)q_j(t) \quad (2.10)$$

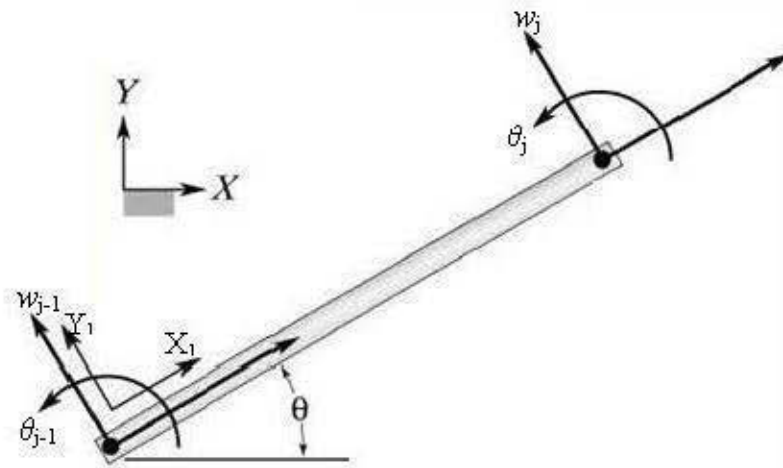
avec  $q_j(t) = [w_{j-1} \ \theta_{j-1} \ w_j \ \theta_j]^T$

$w_j$  est le déplacement en flexion de l'élément  $j$ ;

$\theta_j$  est le déplacement en rotation de l'élément  $j$ ;

Chaque élément ayant quatre degrés de liberté dont deux en commun avec l'élément précédent et deux avec le suivant. La figure (2.5) montre les degrés de liberté d'un élément  $j$  de la poutre.

Selon cette figure,  $w_{j-1}$  et  $\theta_{j-1}$  correspondent respectivement à la déformation angulaire et l'angle de rotation de la base du  $j^{\text{ième}}$  élément, donc ceux de l'extrémité de l'élément précédent ( $j-1$ ). De même,  $w_j$  et  $\theta_j$  correspondent à ceux de l'extrémité du  $j^{\text{ième}}$  élément c.à.d. de la base de l'élément suivant ( $j+1$ ). Le système d'axe (XY) caractérise le repère fixe par rapport auquel le bras flexible se trouve en mouvement, alors que le système d'axe ( $X_1Y_1$ ) caractérise le repère lié au bras flexible donc c'est le repère en rotation.



**Figure 2.5** Degrés de liberté de l'élément  $j$ .

Les fonctions cubiques d'Hermite admettent la forme suivante (Meirovitch, 1980):

$$N_i(x) = c_{i1} + c_{i2}x + c_{i3}x^2 + c_{i4}x^3 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.11)$$

Les coefficients  $c_{ik}$  seront déterminés en forçant  $v$  et  $\theta$  à prendre les valeurs  $w_{j-1}$  et  $\theta_{j-1}$  pour  $x = 0$ , et  $w_j$  et  $\theta_j$  pour  $x = l_j$  avec  $l_j$  étant la longueur d'un élément.

On obtient alors les fonctions d'interpolation suivante:

$$N_1 = 1 - 3(x/l_j)^2 + 2(x/l_j)^3; \quad (2.12 \text{ a})$$

$$N_2 = x - 2l(x/l_j)^2 + l(x/l_j)^3; \quad (2.12 \text{ b})$$

$$N_3 = 3(x/l_j)^2 - 2(x/l_j)^3; \quad (2.12 \text{ c})$$

$$N_4 = l(x/l_j)^3 - l(x/l_j)^2; \quad (2.12 \text{ d})$$

Ces dernières sont représentées par le graphique de la figure (2.6):

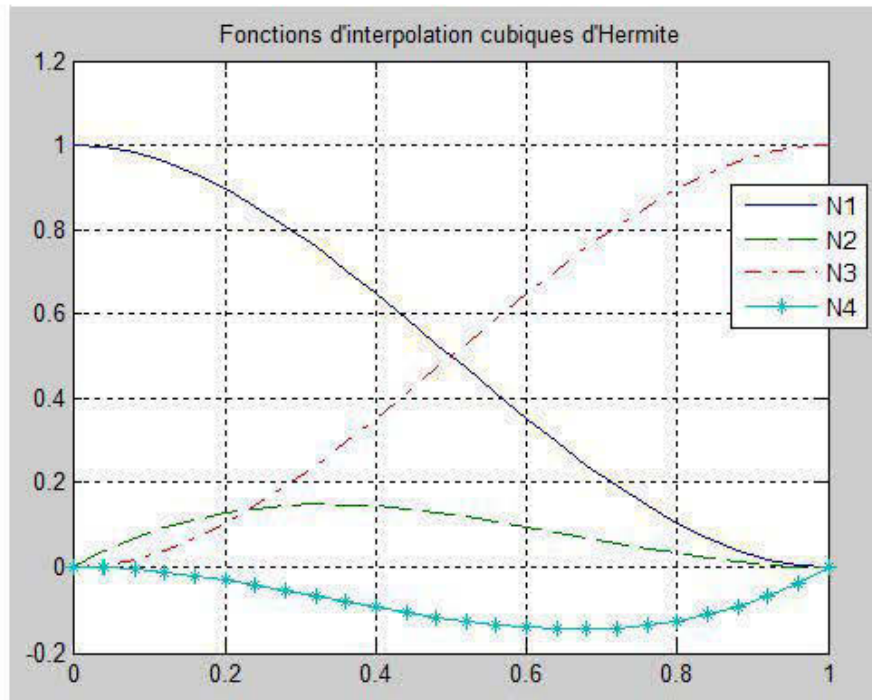


Figure 2.6 Fonctions de forme pour un élément de poutre.

La position absolue du point  $x$  du bras est définie comme étant la somme de la position correspondant à l'angle de rotation à la base et la déformation angulaire au point  $x$  considéré. Cette position est alors exprimée par:

$$y(x,t) = N(x)q(t) \quad (2.13)$$

où,  $N(x) = [x \ N_a(x)]$  et  $q(t) = [\theta(t) \ q_a(t)]^T$  et  $N_a(x)$  et  $q_a(t)$  sont donnés dans (2.10 – 2.12).

La troisième étape consiste à calculer les énergies cinétique et potentielle dans le but de déterminer le Lagrangien. Pour ce faire, posons  $s = x - \sum l_j$  ( $j = 1, \dots, (n-1)$ ),  $l_j$  est la longueur du  $j^{\text{ème}}$  élément.

#### 4.1. ÉNERGIE CINÉTIQUE ET MASSE ÉLÉMENTAIRE

L'énergie cinétique du  $j^{\text{ème}}$  élément de la poutre est exprimée de la façon suivante (Meirovitch, 1980):

$$T_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho A \left[ \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} \right]^2 ds = \frac{1}{2} \rho A \dot{q}_j^T \left[ \int_0^{l_j} (N_j^T N_j) ds \right] \dot{q}_j \quad (2.14)$$

Où,  $t$  est le temps de mesure et  $s$  est la variable d'intégration (position longitudinale).

Cela permet d'aboutir à l'expression de la masse élémentaire:

$$M_j = \rho A \int_0^{l_j} (N_j^T(s) N_j(s)) ds \quad (2.15)$$

Sous forme matricielle on aura (Meirovitch, 1980):

$$M_j = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ m_{31} & 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ m_{41} & 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ m_{51} & -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Avec,  $m_{11} = 140l_j^2(3n^2 - 3n + 1)$

$$m_{12} = m_{21} = 21l_j(10n - 7)$$

$$m_{13} = m_{31} = 7l_j^2(5n - 3)$$

$$m_{14} = m_{41} = 21l_j(10n - 3)$$

$$m_{15} = m_{51} = -7l_j^2(5n - 2)$$

$n$  étant le nombre d'éléments.



#### 4.2. ÉNERGIE POTENTIELLE ET RIGIDITÉ ÉLÉMENTAIRE

L'énergie potentielle est due à la flexibilité du bras, et est définie pour le  $j^{\text{ème}}$  élément par (Meirovitch, 1980):

$$V_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} EI_z \left[ \frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial s^2} \right]^2 ds = \frac{1}{2} EI_z q_j^T \left[ \int_0^{l_j} (B_j^T B_j) ds \right] q_j \quad (2.17)$$

Avec,  $B_j = \frac{d^2 N_j}{ds^2}$

On aboutit alors à l'expression de la rigidité élémentaire:

$$K_j = EI_z \int_0^{l_j} (B_j^T B_j) ds \quad (2.18)$$

On obtient alors la forme matricielle élémentaire (Meirovitch, 1980):

$$K_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l_j & -12 & 6l_j \\ 0 & 6l_j & 4l_j^2 & -6l_j & 2l_j^2 \\ 0 & -12 & -6l_j & 12 & -6l_j \\ 0 & 6l_j & 2l_j^2 & -6l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

À partir de ce qui précède, on remarque que la matrice masse élémentaire dépend du nombre d'éléments  $n$  considéré, alors que la matrice rigidité élémentaire reste constante indépendamment de ce nombre d'éléments.

#### 4.3. ASSEMBLAGE DES MATRICES ÉLÉMENTAIRES

Les matrices de masse et de rigidité globales se calculent à partir des équations des énergies cinétique et potentielle globales correspondant à la somme des énergies élémentaires:

$$T = \sum_{j=1}^n T_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_j^T M_j \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (2.20)$$

$$V = \sum_{j=1}^n V_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} q_j^T K_j q_j = \frac{1}{2} q^T K q \quad (2.21)$$

Le processus de l'assemblage s'effectue selon le modèle de la figure (2.7) suivante (Meirovitch, 1980):

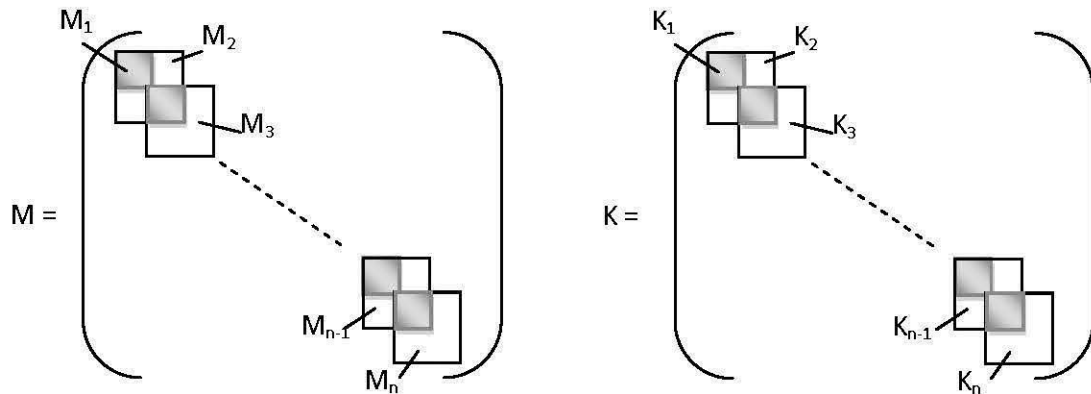


Figure 2.7 Processus d'assemblage.

Au départ le bras flexible était au repos, ainsi les conditions initiales sont définies par:  $w(0) = 0$ , et  $w'(0) = 0$ , alors on doit éliminer les deux premières colonnes et les deux premières lignes des matrices globales M et K. La dimension de ces matrices est alors  $(m \times m)$ , où  $m = 2n + 1$ .

#### 4.4. DYNAMIQUE

La modélisation par la méthode MEF se poursuit ensuite par une quatrième étape en calculant l'équation du mouvement. Pour cela, on dérive l'équation de Lagrange pour aboutir à l'équation dynamique décrivant le mouvement du système. Le Lagrangien s'écrit sous la forme suivante:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - \frac{1}{2} q^T K q \quad (2.22)$$

Par suite, les équations de mouvement sont obtenues en dérivant le Lagrangien de la façon suivante:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = F \quad j = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

Où  $F$  est le vecteur des forces généralisées. Or, la seule force externe appliquée au système correspond au couple  $\tau_L$  généré par le moteur à la base du bras. On définit alors ce vecteur comme suit:

$$F = \begin{bmatrix} \tau_L \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Le développement de ces équations permet d'écrire les équations du mouvement sous la forme matricielle suivante:

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = F \quad (2.25)$$

$M$  et  $K$  sont les matrices globales de masse et de rigidité, et  $B$  est la matrice d'amortissement dont la seule composante non nulle est celle correspondant à l'amortissement de la base  $B_{eq}$ :

$$B = \begin{bmatrix} B_{eq} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

L'annexe A donne les valeurs numériques des matrices de masse et de rigidité calculées par la méthode des éléments finis pour un et deux éléments.

## 5. MÉTHODE DES MODES SUPPOSÉS (MMS)

Cette méthode consiste en l'approximation de la déformation par une série finie de fonctions supposées multipliées par des coefficients indéterminés.

D'une façon semblable au cas de la méthode MEF, on cherche dans un premier temps à effectuer la discrétisation spatiale de la déformation  $v(x,t)$  pour pouvoir retenir un nombre fini de modes. La déformation peut être alors écrite sous la forme suivante (Piedboeuf, 1992):

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_{fi}(t) = \phi^T(x) q_f(t) \quad (2.27)$$

Où  $n$  est le nombre de modes flexibles retenu dans la série;

$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$  est le vecteur des fonctions de formes considéré. Ce vecteur représente la configuration générale du bras;

$q_f = [q_{f1}, q_{f2}, \dots, q_{fn}]^T$  est le vecteur des coordonnées généralisées relatives aux modes flexibles. Ce vecteur indique la nature du mouvement exécuté par la configuration.

### 5.1. ÉNERGIE CINÉTIQUE

En insérant l'expression de la déformation (2.27) dans les équations (2.4) (2.5) et (2.6), on déduit l'expression de l'énergie cinétique totale discrétisée:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \int_0^L T_{dm} = \frac{1}{2} \left( J_{eq} + \frac{1}{3} \rho L^3 \right) \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} \rho \int_0^L (x\phi) dx \dot{q}_f + \frac{1}{2} \dot{q}_f^T \rho \int_0^L \phi \phi^T dx \dot{q}_f \quad (2.28)$$

Sous la forme matricielle, l'énergie cinétique s'écrit comme suit:

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{q}_f^T \end{bmatrix}}_{\dot{q}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}}_{\dot{q}} \quad (2.29)$$

$$\text{Avec,} \quad I_t = J_{eq} + \frac{1}{3} \rho L^3$$

$$M_{rf} = \rho \int_0^L x \phi(x) dx$$

$$M_{ff} = \rho \int_0^L \phi(x) \phi^T(x) dx$$

## 5.2. ÉNERGIE POTENTIELLE

On remplace dans (2.7) l'expression de la déformation discrétisée (2.27), on obtient ainsi la discrétisation de l'énergie potentielle:

$$V = \frac{1}{2} q_f^T \int_0^L EI_z \phi'' \phi''^T dx q_f \quad (2.30)$$

L'expression matricielle correspondante est donnée sous la forme suivante:

$$V = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta & q_f^T \end{bmatrix}}_{q^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ q_f \end{bmatrix}}_q \quad (2.31)$$

## 5.3. DYNAMIQUE

Identiquement à la méthode MEF, on introduit les expressions (2.29) et (2.31) dans le Lagrangien et on effectue la dérivation des équations de Lagrange pour obtenir la dynamique qui décrit le mouvement du système similaire à celle obtenue dans (2.25) mais avec les nouvelles formes du vecteur des coordonnées généralisées  $q$  et des matrices de masse  $M$  et celle de rigidité  $K$ . On aura ainsi la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{eq} & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{0}_f \end{bmatrix} \tau_L \quad (2.32)$$

Où,  $0_{l \times m}$  est une matrice nulle de dimensions  $(l \times m)$ , et  $q_r(t) = \theta(t)$  est la coordonnée généralisée relative à la partie rigide, i. e. l'angle de rotation de la base. Les matrices de masse et de rigidité dans ce cas sont définies ainsi:

$$M = \begin{bmatrix} I_m + \frac{\rho L^3}{3} & \rho \int_0^L x \phi^T dx \\ \rho \int_0^L x \phi dx & \rho \int_0^L \phi \phi^T dx \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0} \\ \vec{0} & EI_z \int_0^L \phi'' \phi''^T dx \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

#### 5.4. FONCTIONS DE FORME

Dans ce qui suit, sont examinés deux types de fonctions de formes: les fonctions polynomiales et les fonctions propres des poutres encastrées sans charge.

##### 5.4.1. Fonctions polynomiales

Les fonctions de formes polynomiales sont exprimées sous la forme suivante:

$$\phi^T(x) = \left[ \left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad \dots \quad \left(\frac{x}{L}\right)^{n+1} \right] \quad (2.35)$$

En remplaçant cette dernière dans l'expression de la déformation du bras (2.27), la déformation peut être alors réécrite explicitement:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x}{L}\right)^{i+1} q_f(t) \quad (2.36)$$

##### 5.4.2. Fonctions propres d'une poutre encastrée sans charge

Ces fonctions sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles suivantes:

$$-\rho \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} - EI_z \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.37)$$

Ayant pour conditions aux frontières:

$$v_0(0, t) = 0; \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0; \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 v(L,t)}{\partial x^3} = 0 \quad (2.38)$$

Par la suite, les fonctions propres solutions de l'équation aux dérivées partielles (2.37) sont obtenues en tenant compte des conditions aux frontières associées (2.38), et sont exprimées par la forme suivante (Saad, 2004):

$$\phi_i(x) = a_i \left[ \sin\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) \right] + c_i \left[ \cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) \right] \quad (2.39)$$

Avec,  $a_i$  est une constante de normalisation, le paramètre  $\lambda_i$  est défini comme suit:

$$\lambda_i^4 = \frac{\rho \omega_i^2 L^4}{EI_z} \quad (2.40)$$

$\omega_i$  est la fréquence naturelle du  $i^{\text{ième}}$  mode exprimée en rad/s, et la constante  $c_i$  est donnée par:

$$c_i = -\frac{\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i}{\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i} \quad (2.41)$$

Les valeurs propres  $\lambda_i$  sont les solutions de l'équation caractéristique suivante:

$$\cos \lambda_i \cosh \lambda_i + 1 = 0 \quad (2.42)$$

Les valeurs des constantes de normalisation  $a_i$  peuvent être déterminées à partir des relations dites relations d'orthogonalité. On dispose de deux relations d'orthogonalité présentées par les expressions suivantes:

$$\int_0^L \rho \phi_i \phi_j dx = \delta_{ij} \quad (2.43)$$

$$\int_0^L EI_z \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (2.44)$$

Où,  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker. Les deux conditions d'orthogonalité (2.43) et (2.44) étant redondantes, la deuxième peut servir à valider les valeurs des fréquences d'oscillation  $\omega_i$ .

On dispose dans l'annexe B les valeurs numériques des matrices de masse et de rigidité obtenues dans chacun des cas de fonctions de forme polynomiales et fonctions propres d'une poutre encastree sans charge.

## 6. MODÈLE D'ÉTAT

À la suite du calcul de la dynamique décrivant le modèle du bras flexible, on cherche à déterminer le modèle linéaire représenté par un modèle d'état.

Pour cela, on définit le vecteur d'état comme suit:

$$x = [x_1^T \quad x_2^T]^T = [q^T \quad \dot{q}^T]^T; q = [\theta \quad q_f^T]^T \quad (2.45)$$

Par la suite, le modèle d'état du système linéaire devient:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}U \end{bmatrix} \tau_L \quad (2.46)$$

Où,  $I$  est une matrice d'identité,  $U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{0}_f \end{bmatrix}$  et  $\vec{0}_f$  est un vecteur nul de dimension égale au nombre de modes choisi.

Cette représentation est identique à la forme suivante:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.47)$$

## 7. MÉTHODE DES CORPS RIGIDES AVEC LIEN ÉLASTIQUE

Une autre méthode de modélisation est utilisée, soit celle qui tient à considérer la base en rotation comme étant un corps rigide et le bras flexible comme étant un ressort (Quanser).

Pour des fins de contrôle de la position de l'extrémité du bras flexible, il est suffisant de considérer un modèle simplifié qui sera adéquat pour décrire le mouvement de l'extrémité. Pour cela, on représente le modèle simplifié par la figure suivante. La flexibilité de la membrure est assimilée à un ressort de raideur  $K_{\text{stiff}}$  constante.



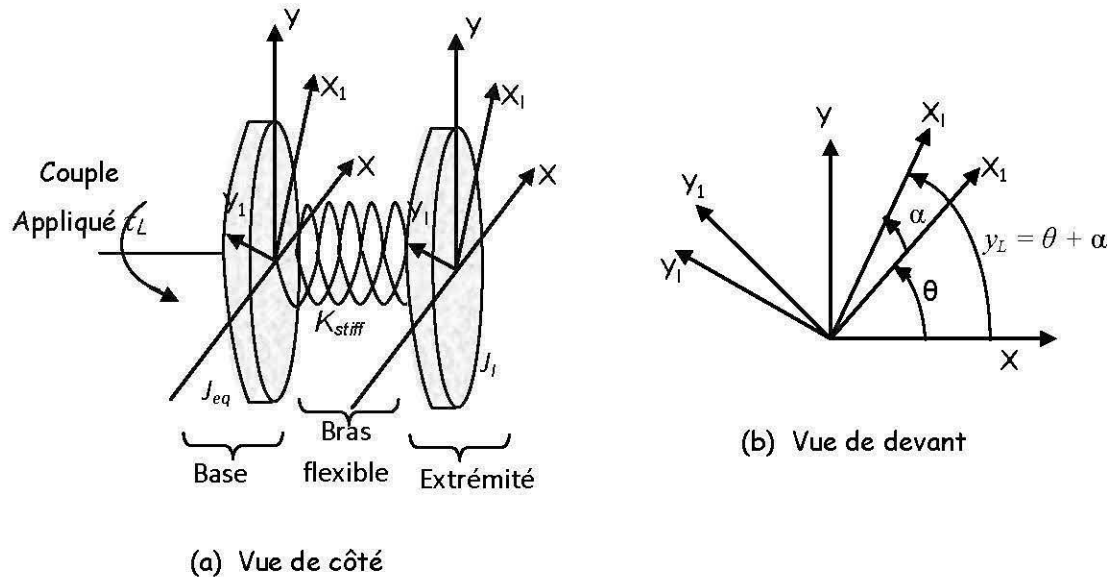


Figure 2.8 Modèle simplifié du bras flexible.

Ce modèle simplifié schématisé par la figure (2.8) introduit un nouveau repère défini par  $x_1Oy_1$ . Ce repère est lié à l'extrémité du bras flexible et est en mouvement avec ce dernier. Ce qui permet de définir la position de l'extrémité  $y_L$  selon la figure (2.8b) comme étant la somme de l'angle à la base  $\theta$  et de la déformation angulaire de l'extrémité  $\alpha$ . Ainsi, on aura, au total, trois systèmes d'axe: le système fixe  $xOy$ , un système d'axe lié à la base en rotation  $x_1Oy_1$ , et le troisième système  $x_1Oy_1$  et lié à la position de l'extrémité. Le déplacement de ces systèmes tout au long de l'axe longitudinal montré sur la figure (2.8a) est effectué uniquement pour mettre en relief la différence entre les différentes positions comme le montre la figure (2.8b).

De même, dans ce cas, on définit à nouveau le vecteur des coordonnées généralisées comme étant composé de la position angulaire de la base en rotation  $\theta$ , la déformation angulaire de l'extrémité du bras flexible  $\alpha$ .

Dans le but de calculer le Lagrangien, d'une façon identique au cas des méthodes MEF et MMS, on commence par calculer les énergies potentielle et cinétique.

L'énergie potentielle totale du système est due uniquement à l'élasticité du bras flexible:

$$V = \frac{1}{2} K_{stiff} \alpha^2(t) \quad (2.48)$$

$\alpha(t)$  étant la déformation angulaire de l'extrémité du bras à l'instant  $t$ .

L'énergie cinétique est due, à la fois, à la rotation de la base rotationnel tournant d'un angle  $\theta(t)$  dans le plan horizontal, et au mouvement de la membrure flexible et sa déformation angulaire  $\alpha(t)$ . Cette énergie est exprimée ainsi:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} J_l \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \quad (2.49)$$

$J_{eq}$  et  $J_l$  étant les moments d'inertie de la base et du bras flexible respectivement.

Dans ce cas, les forces non-conservatives correspondant aux coordonnées généralisées sont considérées comme étant le couple moteur  $\tau_L$  et les forces internes d'amortissement. On définit alors:

$$Q_\theta = \tau_L - B_{eq} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.50)$$

$$Q_\alpha = B_l \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.51)$$

L'amortissement  $B_l$  correspondant au bras flexible, étant proportionnel au coefficient d'amortissement interne du bras  $\kappa_e$ , sera donc négligé. Le terme  $Q_\alpha$  est donc nul. Par la suite, on applique les équations de Lagrange de la façon suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2 \quad (2.52)$$

On aboutit ensuite aux équations du mouvement suivantes:

$$J_{eq}\ddot{\theta} + J_l(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = \tau_L - B_{eq}\dot{\theta} \quad (2.53)$$

$$J_l(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_{stiff}\alpha = 0 \quad (2.54)$$

En posant:  $x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$

Le modèle d'état linéaire devient:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.55)$$

Avec,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -K_{stiff}\left(\frac{1}{J_l} + \frac{1}{J_{eq}}\right) & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Dans ce qui suit, on modifie ces matrices  $A$  et  $B$  définissant le modèle d'état du bras flexible, de sorte à avoir comme entrée la tension  $V_m$  appliquée à l'entrée du moteur au lieu du couple moteur généré à la base du bras.

## 8. MODÉLISATION DU SERVOMOTEUR SRV02

Le système expérimental est constitué de deux sous-systèmes, soit le bras flexible et la base qui l'entraîne. Jusqu'à présent on a modélisé le sous-système qui constitue le bras flexible. Dans cette partie, on cherche à modéliser la base. Cela implique la

modélisation du moteur à courant continu reliant dynamiquement la tension appliquée à l'entrée du moteur au couple généré par ce dernier et envoyé vers la charge, c.à.d. vers la base du bras flexible.

À noter que, étant donné que  $J_l$  est le moment d'inertie du bras flexible (indépendamment de la base et du moteur). Cette modélisation est effectuée sur le servomoteur (placé à la base du bras), donc uniquement les paramètres de la base doivent-être pris en considération.

Le circuit d'induit est illustré par la figure (2.9):

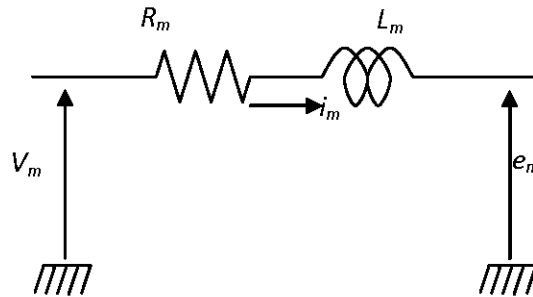


Figure 2.9 Circuit d'induit du moteur.

Où,  $V_m$  est la tension appliquée aux bornes du moteur,  $i_m$  est le courant et  $e_m$  est la force contre électromotrice du moteur.  $R_m$  est la résistance interne du moteur et  $L_m$  son inductance.

L'équation électrique décrivant le système est la suivante:

$$v_m - e_m = R_m i_m + L_m \frac{di_m}{dt} \quad (2.58)$$

L'application de la transformation de Laplace à l'équation (2.58) et en considérant le système initialement au repos (donc les conditions initiales sont nulles), on aboutit à l'équation électrique donnée dans le domaine de Laplace par:

$$V_m - E_m = (R_m + sL_m)I_m \quad (2.59)$$

Avec,  $E_m = k_m \Omega_m$

Où  $k_m$  est la constante de force contre électromotrice.  $\Omega_m$  est la vitesse de rotation du moteur.

Si  $\tau_m$  est le couple moteur et  $\tau_L$  celui du côté charge (après le réducteur de vitesse à la base du bras), on a alors les expressions suivantes définissant ces couples:

$$\tau_m = \eta_m k_T I_m \quad (2.60)$$

$$\tau_L = \eta_g k_g \tau_m \quad (2.61)$$

Où  $k_T$  est la constante du couple moteur, égale à  $k_m$  pour un moteur à courant continu,  $k_g$  est le facteur de réduction du réducteur de vitesse et  $\eta_m$  et  $\eta_g$  correspondent au rendement du moteur et des engrenages respectivement.

L'équation mécanique du moteur relie le couple généré à la vitesse de rotation comme le montre les expressions suivantes:

$$\tau_L = B_{eq} \omega_L + J_{eq} \frac{d\omega_L}{dt} \quad (2.62)$$

Dans le domaine de Laplace cette dernière est exprimée de la façon suivante:

$$\tau_L = (B_{eq} + sJ_{eq})\Omega_L \quad (2.63)$$

Où,  $\omega_L$  est la vitesse de rotation du moteur, alors  $\omega_L = \dot{\theta}$

À partir des équations (2.59) à (2.63), le schéma bloc correspondant au servomoteur est:

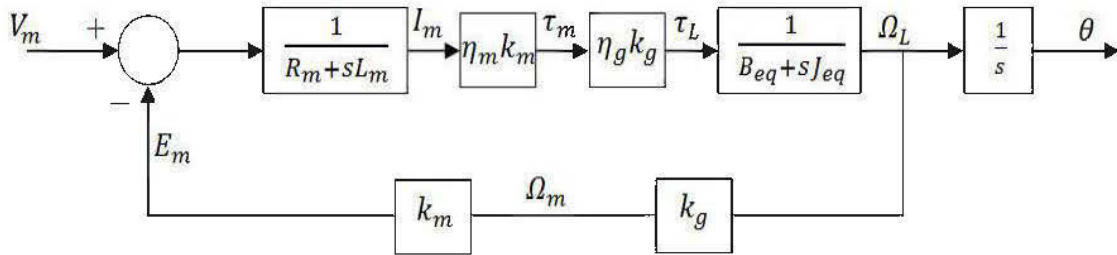


Figure 2.10 Diagramme en bloc du servomoteur SRV02.

En négligeant la constante de temps électrique  $\frac{L_m}{R_m}$  par rapport à la constante de temps mécanique  $\frac{J_{eq}}{B_{eq}}$ , on déduit à partir du schéma bloc l'expression de la fonction de transfert qui régit le comportement du moteur:

$$\frac{\theta(s)}{V_m(s)} = \frac{A_m}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \quad (2.64)$$

Où  $\tau$  est la constante de temps du moteur définie par:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} + \frac{\eta_m \eta_g k_m^2 k_g^2}{R_m J_{eq}} \quad (2.65)$$

Et  $A_m$  est défini par:

$$A_m = \frac{\eta_m \eta_g k_m k_g}{R_m J_{eq}} \quad (2.66)$$

Les valeurs des différents paramètres qui caractérisent le servomoteur SRV02 sont présentées dans le tableau (2.3) suivant:

Tableau 2.3 Paramètres du servomoteur SRV02.

Description	Symbole	Valeur
Résistance du moteur	$R_m$	2.6 $\Omega$
Inductance du moteur	$L_m$	0.18 mH
Gain du moteur	$k_m$	$7.68 \cdot 10^{-3} \text{ V}/(\text{rad/s})$
Facteur de réduction de vitesse	$k_g$	70
Rendement du moteur	$\eta_m$	0.69
Rendement du réducteur de vitesse	$\eta_g$	0.90
Moment d'inertie équivalent	$J_{eq}$	$2.08 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Facteur d'amortissement	$B_{eq}$	$4.00 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{rad/s})$

À partir de (2.59) à (2.61), on détermine l'expression reliant le couple  $\tau_L$  généré à la base à la tension  $V_m$  appliquée aux bornes de l'entrée du moteur, soit:

$$\tau_L = \frac{\eta_m \eta_g k_m k_g}{R_m} (V_m - k_m k_g \Omega_L) \quad (2.67)$$

Finalement, une fois que le modèle d'état du bras flexible de la forme (2.47) ou (2.55) est obtenu, il suffit de remplacer le couple  $\tau_L$  par son expression (2.67) pour obtenir le modèle global du système tout entier. Ce modèle est présenté dans l'espace d'état par une forme semblable à (2.47) et (2.55) mais dans ce cas l'entrée du système est la tension  $V_m$  appliquée au servomoteur:

$$\dot{x} = Ax + BV_m \quad (2.68)$$

Les matrices A et B étant définies comme suit:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B_1 \end{bmatrix} \quad (2.69a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}U_1 \end{bmatrix} \quad (2.69b)$$

Où 
$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{eq} + \frac{\eta_m \eta_g (k_m k_g)^2}{R_m} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \eta_m \eta_g k_m k_g \\ R_m \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

La matrice M reste inchangée.

Les dimensions de ces différentes matrices sont relatives au nombre des variables d'état choisi.

Cela peut être décrit par le schéma bloc global de la figure suivante:

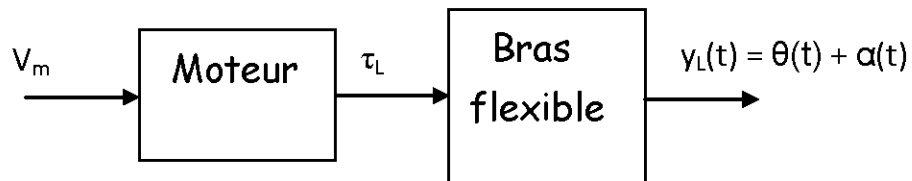


Figure 2.11 Schéma bloc global du système tout entier.

Dans le but de comparer les modèles obtenus par les différentes méthodes de modélisation, les valeurs propres sont calculées pour chacun des modèles considérés. Ces valeurs sont présentées dans les annexes A et B.

## 9. CONCLUSION

Dans ce chapitre, le modèle dynamique linéaire qui décrit le mouvement du système à un bras flexible tournant dans le plan horizontal a été présenté. Différentes méthodes de modélisation ont été étudiées moyennant les équations de Lagrange.

La méthode des éléments finis a été utilisée avec les fonctions cubiques d'Hermite comme fonctions d'interpolations. Ensuite, on a détaillé la méthode des modes supposés et on a défini dans ce cas deux types de fonctions de forme: les fonctions polynomiales et les fonctions propres d'une poutre encastrée sans charges. Comme conclusion, on peut remarquer la ressemblance entre la méthode MEF et la méthode



MMS. La différence principale entre les deux méthodes est la nature des fonctions admissibles. En effet, pour le cas de la méthode MMS, les fonctions de formes admissibles sont des fonctions globales définies sur toute la longueur du bras flexible. Par contre, les fonctions d'interpolations admissibles dans le cas de la méthode MEF sont des fonctions locales définies sur des petits intervalles (éléments) du bras.

Une autre méthode de modélisation a encore été développée dans ce chapitre, c'est la méthode qui tend à simplifier l'effet de la flexibilité du bras flexible en traitant la base en rotation comme étant un corps rigide et en considérant le bras comme étant un ressort.

Ainsi, ayant modélisé le montage expérimental, il est maintenant possible de poursuivre ce travail dans le but d'atteindre nos objectifs de contrôle. L'étape suivante de ce projet consiste à faire l'étude et la conception de différentes lois de commande. Le développement, la conception et le test de lois de commande classiques et modernes feront alors le sujet des chapitres suivants.

### CHAPITRE 3

## TECHNIQUES CLASSIQUES DE CONTRÔLE

**O**N a vu dans le chapitre précédent, différentes approches de modélisation permettant d'obtenir un modèle qui décrit le mouvement d'un bras flexible tournant dans le plan horizontal. On cherche dans ce chapitre à contrôler ce mouvement dans le but de réaliser la régulation de la position de l'extrémité. Les techniques de commande développées dans ce chapitre sont des techniques classiques les plus reconnues. Il s'agit du contrôle proportionnel-dérivé, le contrôle par retour d'état et la commande linéaire-quadratique. On présente dans ce chapitre les résultats des simulations pour chacun des contrôleurs étudiés, ainsi que les réponses du système réel contrôlé par ces techniques de commande classiques. On conclut par une comparaison entre les réponses dans chacun des cas. La programmation, l'implémentation et la simulation de ces contrôleurs sont réalisées à l'aide du logiciel MATLAB (7.5.0)/SIMULINK(V7.0)®.

## 1. INTRODUCTION

Les stratégies de contrôle des robots rigides utilisent comme hypothèse de base le fait qu'un positionnement précis des articulations implique nécessairement un positionnement précis de l'extrémité du robot. Les stratégies utilisées sont donc généralement appliquées localement en implantant des lois de commande au niveau de la position et de la vitesse des articulations. Dans le cas des robots flexibles, ou même des robots rigides avec des liens élastiques, il faut tenir compte de la flexibilité des membrures et de l'élasticité des articulations. Pour cela, le défi réside dans le contrôle des manipulateurs flexibles qui vise la précision et la stabilité dans le positionnement de l'extrémité de la membrure.

En ingénierie, les techniques de conception sont souvent développées à partir des analyses qualitatives des systèmes. Deux propriétés qualitatives importantes des équations dynamiques linéaires sont la contrôlabilité et l'observabilité. Les techniques de contrôle développées dans ce chapitre mettent en relief les implications pratiques de ces propriétés.

## 2. NOTIONS DE CONTRÔLABILITÉ ET D'OBSERVABILITÉ

Les concepts de contrôlabilité et d'observabilité jouent un rôle très important dans l'étude des problèmes de contrôle et filtrage. Le concept de la contrôlabilité étudie la possibilité de régler le comportement du système considéré dans le but de forcer l'état à prendre les valeurs désirées pendant un temps fini. Par contre, l'observabilité d'un système peut-être définie comme étant la possibilité de prédire l'état du système à tout instant compris dans l'intervalle du temps de fonctionnement.

Dans la suite, les conditions nécessaires et suffisantes sont introduites dans le but de s'assurer de la contrôlabilité d'un système dont le mouvement est décrit par des

équations dynamiques linéaires. D'une façon duale, on définit les conditions nécessaires et suffisantes pour l'étude de l'observabilité.

## 2.1. CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans cette partie, on étudie la contrôlabilité du système linéaire de dimension  $n$  défini dans l'espace d'état par le système d'équations de la forme suivante:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

Où  $u$  est le vecteur correspondant aux entrées du système qu'on considère dans le cas général de dimension  $(p \times 1)$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont des matrices constantes à paramètres réels et indépendants du temps. Dans ce cas, la dynamique du système est dite invariante dans le temps. L'intervalle de temps allant du temps présent ( $t = 0$ ) et tendant vers l'infini est alors l'intervalle d'intérêt sur lequel est étudiée la contrôlabilité du système.

Le système (3.1) est défini comme étant contrôlable si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite (Chen, 1984):

- i. Tous les vecteurs lignes formant la matrice  $(sI - A)^{-1}B$  sont linéairement indépendants dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ .
- ii. La matrice définie positive dite grammien de contrôlabilité et définie par:

$$W_{ct} = \int_0^t e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} d\tau \quad (3.2)$$

est une matrice non-singulière pour tout  $t > 0$ .

L'indice (\*) désigne le complexe conjugué transposé de la matrice considérée.

- iii. La matrice contrôlabilité de dimension  $n \times (np)$  définie par:

$$U \triangleq [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] \quad (3.3)$$

est de rang  $n$ .

- iv. Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  (et par conséquent pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ ), la matrice complexe  $[\lambda I - A | B]$  est de rang  $n$ .

## 2.2. OBSERVABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Le concept d'observabilité est défini de façon dual à celle du cas de la contrôlabilité. En gros, la contrôlabilité étudie la possibilité de diriger l'état du système à partir des entrées. Cependant, l'observabilité étudie la possibilité d'estimer l'état connaissant la sortie. En d'autres termes, lorsqu'une équation dynamique est contrôlable, alors tous les modes de cette équation peuvent être excités à partir de l'entrée du système correspondant. D'autre part, lorsqu'une équation dynamique est observable, alors tous ses modes peuvent être observés à partir de la sortie du système. Ces deux concepts supposent la connaissance complète du modèle du système. Donc, on considère que les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont connues à l'avance. Ces matrices définissent le modèle du système dans l'espace d'état sous la forme:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.4a)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.4b)$$

Où,  $y$  est la sortie du système.

Toutefois, le problème d'observabilité est différent de celui de réalisation et d'identification. En effet, l'identification consiste à estimer les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  à partir des informations récupérée à la fois de l'entrée et de la sortie du système.

Alors par dualité avec le concept de contrôlabilité, le système linéaire invariant défini dans (3.4) est observable si et seulement si une des conditions suivantes est remplie (Chen, 1984):

- i. Toutes les colonnes de la matrice  $C(sI - A)^{-1}$  sont linéairement indépendantes dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ .
- ii. La matrice définie positive dite grammien d'observabilité et définie par:

$$W_{ob} = \int_0^t e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau \quad (3.5)$$

est une matrice non-singulière pour tout  $t > 0$ .

- iii. La matrice observabilité de dimension  $(nq) \times n$  définie par:

$$V \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

est de rang  $n$ . Avec,  $q$  la dimension du vecteur de sortie.

- iv. Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  (et par conséquent pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ ), la matrice complexe  $[(\lambda I - A) \ C]^T$  est de rang  $n$ .

Dans le cas du manipulateur flexible faisant le sujet de ce travail, on a examiné la condition (iii) dans le but de s'assurer de la contrôlabilité et l'observabilité du système disposant d'une seule entrée et une seule sortie modélisé au chapitre précédent. Le modèle considéré dans ce chapitre pour le développement des techniques de contrôle classiques est celui obtenu par la méthode considérant la base en rotation comme étant un corps rigide et le bras flexible comme étant un ressort.

### 3. CONTRÔLE PROPORTIONNEL DÉRIVÉ (PD)

Un régulateur Proportionnel Dérivé (PD) est un organe de contrôle qui permet d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un procédé industriel. Le régulateur PD compare une valeur mesurée par le procédé (position de l'extrémité du bras flexible) avec une valeur de consigne, c.à.d. l'angle de référence à l'entrée du système. Le signal erreur étant la différence entre les deux valeurs est utilisé pour calculer une nouvelle valeur d'entrée qui tend à réduire au maximum l'écart entre la mesure et la consigne, donc un signal d'erreur le plus faible possible.

Le diagramme en bloc présenté à la figure (3.1) correspond au système contrôlé à l'aide d'un régulateur PD où  $K_p$  et  $K_D$  sont les gains proportionnels et dérivés, respectivement.  $u(t)$  est l'entrée du système, donc la tension appliquée, et  $r(t)$  est l'angle de référence à la base du bras flexible.

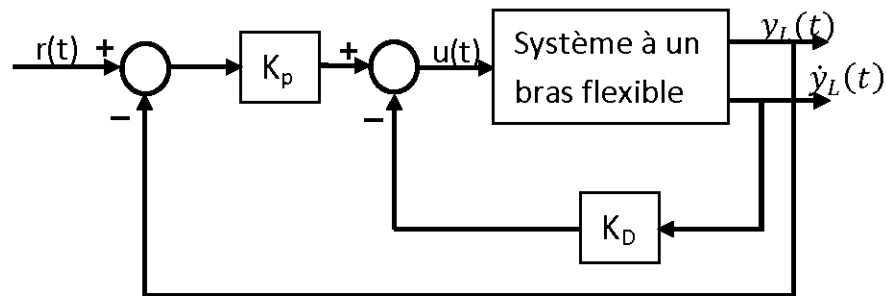


Figure 3.1 Structure du contrôleur PD.

À partir de ce diagramme, la loi de commande  $U(s)$  définie dans le domaine de Laplace est donnée par:

$$U(s) = K_p(R(s) - \theta(s)) - K_D\dot{\theta} \quad (3.7)$$

$s$  étant la variable de Laplace.

Une boucle de réglage PD peut-être caractérisée comme étant un filtre appliqué au système dans le domaine fréquentielle. Pour cela, dans le but de concevoir un régulateur PD, on commence par calculer la fonction de transfert du système à partir de son modèle d'état. Cette fonction est définie comme suit:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.8)$$

Où A, B et C sont les matrices définissant le modèle d'état du système.

Dans ce travail, la conception du contrôleur PD est réalisée à l'aide du logiciel Matlab. Les valeurs des gains  $K_p$  et  $K_D$  sont déterminées graphiquement en se basant sur le principe des lieux d'Évans (lieu des racines). La fonction de transfert du système contrôlé en boucle fermée étant la suivante:

$$\frac{Y_L(s)}{R(s)} = \frac{K_p H(s)}{1 + K_D (s + (K_p/K_D)) H(s)} \quad (3.9)$$

Le tableau (3.1) montre l'effet de l'augmentation de chacune des valeurs des gains  $K_p$  et  $K_D$  sur le comportement du système. Les valeurs optimales obtenues des gains  $K_p$  et  $K_D$  sont présentées dans la suite au paragraphe "7. Application et résultats".

**Tableau 3.1** Effets de l'augmentation des paramètres.

Paramètre	Temps de montée	Dépassement	Erreur statique
Proportionnel – $K_p$	Augmente	Augmente	Diminue
Dérivé – $K_D$	Varie légèrement	Diminue	Varie légèrement

#### 4. CONTRÔLE PAR RETOUR D'ÉTAT

On étudie dans la suite l'effet d'un contrôleur par retour d'état sur le comportement du système décrit par l'équation dynamique (3.10) développée au chapitre de modélisation précédent:

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = V_m \quad (3.10)$$



Où encore, dans l'espace d'état sous la forme:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.11a)$$

$$y = Cx \quad (3.11b)$$

Où,  $u = [V_m \ 0 \dots \ 0]^T$  est le vecteur d'entrée.

Dans le cas du modèle des corps rigides avec lien élastique qu'on a adopté dans ce chapitre, on aura:

$$C = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

#### 4.1. FORME CANONIQUE DE CONTRÔLABILITÉ ET D'OBSERVABILITÉ

Dans l'intention de vérifier la contrôlabilité et de contrôler le système considéré, on commence par déterminer la forme canonique de l'équation linéaire (3.11). La nouvelle équation dynamique est obtenue en introduisant la transformation suivante:

$$\bar{x} = Px = Q^{-1}x \quad (3.12a)$$

Où,  $P \triangleq Q^{-1}$  est une matrice constante non-singulière.

On a alors les transformations suivantes:

$$\bar{A} = PAP^{-1} ; \bar{B} = PB ; \bar{C} = CP^{-1} \quad (3.12b)$$

La dynamique (3.13) est équivalente à celle de (3.8):

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \quad (3.13a)$$

$$y = \bar{C}\bar{x} \quad (3.13b)$$

Les matrices de contrôlabilité pour chacune des équations dynamiques (3.11) et (3.12) sont données respectivement par:

$$U \triangleq [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &\triangleq [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \bar{A}^3\bar{B}] \\ &= P[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \\ &= PU = Q^{-1}U \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans le cas où le système (3.11), et par conséquence (3.13), est contrôlable, alors les matrices de contrôlabilité définies par (3.14) et (3.15) sont des matrices non-singulières. Par suite, à partir de (3.15) on aboutit à:

$$P = \bar{U}U^{-1} \quad ; \quad Q = U\bar{U}^{-1} \quad (3.16)$$

Par dualité, on définit les matrices d'observabilité:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \bar{C}\bar{A}^3 \end{bmatrix} = VP^{-1} = VQ \quad (3.17)$$

Alors, si les systèmes (3.11) et (3.12) sont observables, on aura:

$$P = \bar{V}^{-1}V \quad ; \quad Q = V^{-1}\bar{V} \quad (3.18)$$

Soit le polynôme caractéristique relatif à la matrice  $A$  du modèle (3.11) défini comme suit:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4 \quad (3.19)$$

$\lambda$  étant le paramètre représentant les valeurs propres de la matrice  $A$  donc les valeurs propres relatives au système (3.11) considéré.

Puisque le modèle linéaire (3.11) décrivant le mouvement du manipulateur flexible correspond à un système contrôlable, on peut alors le représenter, à l'aide d'une transformation convenable, sous la forme "*canonique contrôlable*" comme le montre l'expression suivante:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\beta_4 \quad \beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1] \bar{x}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Où  $\alpha_i$  correspondent aux coefficients du polynôme caractéristique défini dans (3.19), et  $\beta_i$  sont les termes calculés à partir de (3.11) et (3.12):  $\bar{C} = CQ \triangleq [\beta_4 \quad \beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1]$

Par dualité à ce qui précède, on détermine la forme "*canonique observable*" suivante:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \bar{x}\end{aligned}\quad (3.21)$$

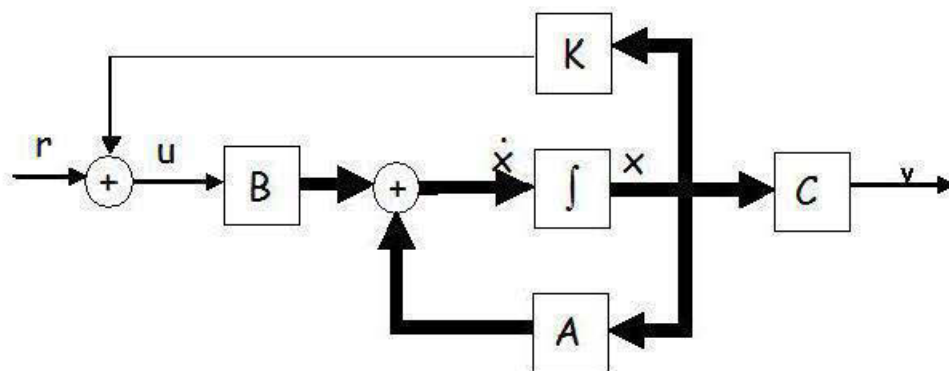
Les formes canoniques de contrôlabilité et d'observabilité qu'on vient de définir présentent une importance particulière dans l'étude du contrôle par retour d'état, ainsi que pour la conception d'un estimateur d'état qui sera étudié par la suite. L'importance de ces formes se manifeste de même lors de la simulation des équations dynamiques du système (3.11).

#### 4.2. CONCEPTION DU CONTRÔLEUR À RETOUR D'ÉTAT

La commande par retour d'état présente aujourd'hui l'aspect le plus important des systèmes de contrôle. Un choix approprié du gain par retour d'état est apte à stabiliser les systèmes instables, à éliminer les vibrations et à améliorer les performances des systèmes oscillatoires.

Le contrôle par retour d'état réalisé est basé sur une des approches les plus reconnues, celle du placement des pôles. Le concept correspondant cherche à déplacer les pôles du système en des lieux précis de notre choix. Le modèle obtenu conserve la

contrôlabilité du système original. En effet, il suffit de remplacer dans le système original l'entrée  $u$  par une nouvelle entrée de la forme:  $r(t) = u(t) - Kx(t)$ . Cela est réalisé en plaçant dans la chaîne de retour un régulateur à gain constant  $K$ , avec  $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$ , quatre (4) étant le nombre des variables d'état du système. La figure (3.2) suivante montre une représentation d'un système contrôlé par un contrôleur à retour d'état.



**Figure 3.2** Système contrôlé par retour d'état.

Le nouveau système contrôlé sera caractérisé par une nouvelle équation dynamique comme on peut le remarquer à partir de la figure (3.2). Cette équation dynamique est définie en remplaçant dans l'équation originale (3.11), l'entrée  $u(t)$  par son expression:

$$u(t) = r(t) + Kx(t) \quad (3.22)$$

$r(t)$  étant l'entrée de référence du nouveau système.

La nouvelle équation dynamique devient alors de la forme suivante:

$$\dot{x} = (A + BK)x + Br$$

$$y = Cx \quad (3.23)$$

À noter que la nouvelle dynamique (3.23) admet les mêmes dimensions et le même espace d'état que celle du système original (3.11).

#### 4.3. CALCUL DU GAIN PAR RETOUR D'ÉTAT

Le déplacement des pôles est plus simple à réaliser lorsque le système est représenté par sa forme canonique de contrôlabilité comme déjà développée dans (3.20). Dans ce cas, si  $K$  est le gain calculé à partir de la forme originale du système, alors relativement à la forme canonique du système ce gain se transforme selon l'expression suivante:

$$u = r + Kx = r + KP^{-1}\bar{x} \triangleq r + \bar{K}\bar{x} \quad (3.24)$$

Où  $P$  est la matrice de transformation calculée à partir de la matrice de contrôlabilité selon l'équation (3.16), et  $\bar{K} = KP^{-1}$  est le gain du contrôleur calculé relativement à la forme canonique du système. Ce gain ayant pour objectif de déplacer les pôles du système en des lieux de notre choix, c.à.d. de modifier les valeurs propres du système, est alors déterminé comme démontré dans la suite.

Ayant les coefficients  $\alpha_i$  du polynôme caractéristique, on détermine à partir des valeurs propres désirées les coefficients  $a_i$  du nouveau polynôme caractéristique qui force au système les valeurs désirées de notre choix. Le gain du contrôleur sera alors calculé à partir de la différence:

$$\bar{K}_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.25)$$

#### 4.4. DÉVELOPPEMENT DE L'ALGORITHME DE CALCUL

Le système décrit par  $\{A, B\}$  étant contrôlable, le problème consiste à trouver le vecteur réel du gain  $K$  de sorte que la matrice  $(A + BK)$  admet comme valeurs propres

un ensemble de valeurs réelles de notre choix. Pour cela, on procède comme suit (Chen, 1984):

- i. Calcul du polynôme caractéristique de la matrice A:

$$\det(sI - A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

Où, n correspond au nombre des états du système.

- ii. Détermination du nouveau polynôme caractéristique:

$$(s - \bar{\lambda}_1)(s - \bar{\lambda}_2) \dots (s - \bar{\lambda}_n) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_n$$

Où,  $\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$  est l'ensemble des valeurs propres désirées, et  $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n\}$  l'ensemble des coefficients représentant le polynôme caractéristique du nouveau système.

- iii. Calcul du gain du contrôleur:

$$\bar{K} = [(\alpha_n - \bar{\alpha}_n) (\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n-1}) \dots (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)]$$

- iv. Calcul des vecteurs  $q_i$ :

$$q_{n-i} = Aq_{n-i+1} + \alpha_i q_n$$

Pour  $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ , et avec  $q_n = B$ .

- v. Former la matrice Q de transformation:

$$Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$$

- vi. Trouver la matrice de transformation P:

$$P \triangleq Q^{-1}$$

vii. Dédurre le gain du contrôleur:

$$K = \bar{K}P$$

## 5. COMMANDE OPTIMALE (CONTRÔLE LINÉAIRE-QUADRATIQUE)

Ce régulateur est encore connu sous le nom de "*Gain de Kalman*". Il consiste à trouver une loi de commande optimale  $u(t)$  en boucle fermée qui permet d'assurer les performances désirées.

La commande LQR en boucle fermée possède les avantages suivants:

- 1) Robustesse par rapport aux perturbations et à l'incertitude sur les paramètres;
- 2) Méthode autorégulée;
- 3) Réduction de la sensibilité.

L'objectif de cette commande est de minimiser une fonction de coût quadratique basée sur les énergies de commande et énergie de sortie. Cette fonction de coût est définie selon l'expression suivante:

$$J = \frac{1}{2} \int \left( \underbrace{y^T E y}_{\substack{\text{énergie} \\ \text{de sortie}}} + \underbrace{u^T R u}_{\substack{\text{énergie de} \\ \text{commande}}} \right) dt \quad (3.26)$$

Où,  $y = Cx$  d'après (3.11b), ainsi l'énergie de sortie pourra être exprimée de la façon suivante:

$$y^T E y = (Cx)^T E (Cx) = x^T C^T E C x = x^T Q x \quad (3.27)$$

La fonction coût à minimiser devient alors:

$$J = \frac{1}{2} \int (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.28)$$

R et Q sont les matrices qui définissent l'indice de performance et le coût à minimiser. Ces matrices sont définies positives et leurs éléments sont choisis de sorte à assurer une pondération relative aux variables d'état individuelles et à la loi de commande à l'entrée du système.

Dans le but de minimiser la fonction de coût quadratique (3.28), on définit le Hamiltonien de cette fonction J comme étant de la forme suivante:

$$H = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (A x + B u) \quad (3.29)$$

$\lambda^T$  est choisit de sorte à avoir:  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

Les conditions d'optimalité se présentent alors comme suit:

- Équation d'état:  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A x + B u \quad (3.30)$

- Équation d'état adjointe (ou coéquation d'état):

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = Q x + A^T \lambda \quad (3.31)$$

- Loi de commande:  $0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R u + B^T \lambda \quad (3.32)$

À partir de l'équation (3.32), on détermine l'expression de la loi de commande:

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (3.33)$$

En remplaçant (3.33) dans l'équation d'état (3.30) on obtient:

$$\dot{x} = A x - B R^{-1} B^T \lambda \quad (3.34)$$

On construit ensuite le système dit Hamiltonien homogène, en associant les équations (3.34) et (3.31):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (3.35)$$



À tout instant  $t$ , on peut écrire :

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \quad (3.36)$$

Où,  $P$  une matrice semi-définie positive à calculer.

En dérivant l'équation (3.36) et utilisant l'expression de l'équation d'état adjointe (3.31), on aboutit à l'expression suivante appelée équation de Lyapunov ou encore équation de Riccati:

$$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (3.37)$$

En régime permanent, l'équation de Riccati en (3.37) devient:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.38)$$

Ainsi, à partir de l'équation de Riccati (3.38) on calcule la matrice de Riccati  $P$ . En utilisant cette matrice dans l'expression (3.36), on sera ensuite capable de calculer la loi de commande en remplaçant (3.36) dans (3.33):

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3.39)$$

$$K = R^{-1}B^T P \quad (3.40)$$

Le système contrôlé par le gain de Kalman ainsi calculé est illustré en schéma bloc à la figure suivante:

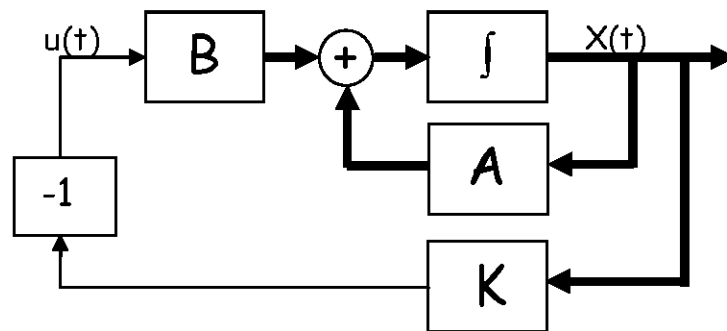


Figure 3.3 Représentation du système contrôlé par un régulateur LQR.

## 6. ESTIMATEUR D'ÉTATS

Le contrôle par retour d'état et la commande optimale supposent que toutes les variables d'état du système sont connues. En pratique, cette supposition n'est pas évidente puisque les différentes variables d'état du système ne sont pas toutes accessibles et mesurables. Pour cela, on cherche à concevoir un estimateur qui procure les informations nécessaires pour l'approximation du vecteur d'état. On peut par la suite procéder à l'application et l'étude des techniques de contrôle qu'on vient de développer.

En fait, la conception de l'estimateur d'état est duale à celle du contrôleur par retour d'état. Il s'agit donc d'appliquer les procédures de conception du contrôleur à retour d'état pour aboutir à la conception de l'estimateur d'état recherché. Pour ce faire, on dispose comme entrées de l'estimateur l'entrée de référence  $u(t)$  et les sorties mesurables  $y(t)$  du système. On suppose de même la connaissance des matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  qui décrivent le modèle du système dans l'espace d'état.

D'autre part, on a vu au début de ce chapitre lors de la définition de la notion d'observabilité que pour pouvoir estimer les différents états d'un système, il faut que ce dernier soit observable. Ainsi, si  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  est l'erreur entre l'état du système

considéré et celui estimé, alors cette erreur est gouvernée par l'expression (3.41), avec  $\hat{x}$  étant le vecteur d'état estimé.

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} \quad (3.41)$$

Où  $L$  est le gain de l'estimateur, c'est donc le vecteur à calculer de sorte que la matrice  $(A - LC)$  ait pour valeurs propres des valeurs de notre choix.

En effet, si  $\{A, C\}$  est observable, on a  $\{A^T, C^T\}$  contrôlable. On peut ensuite procéder d'une façon identique au cas du calcul du gain du contrôleur à retour d'état. Finalement, on peut déduire la dynamique qui régit l'estimateur recherché:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu \quad (3.42)$$

Cela est schématisé à la figure suivante:

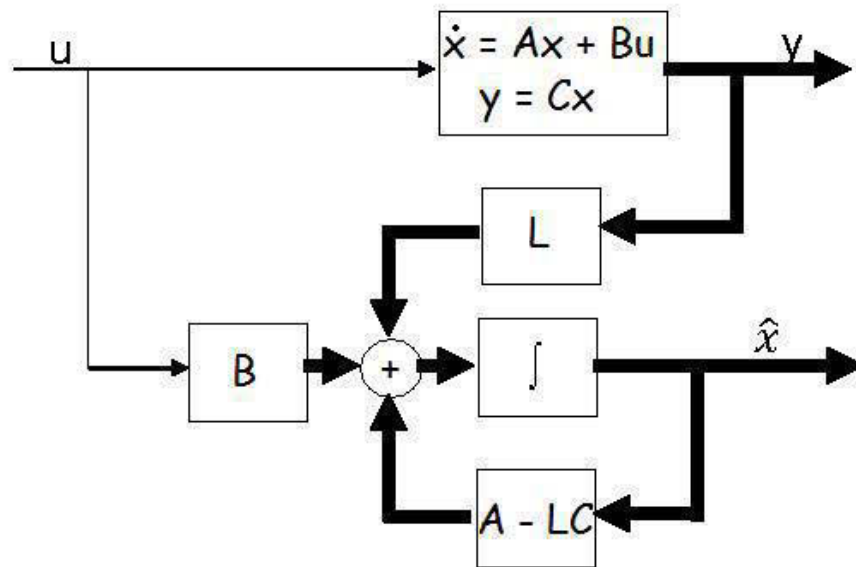


Figure 3.4 Représentation schématique d'un estimateur d'état.

## 7. APPLICATION ET RÉSULTATS

Dans le but de tester ces contrôleurs et de s'assurer de leurs performances, on effectue tout d'abord les simulations convenables jusqu'à obtenir les résultats désirés. Par la suite, on pourra passer à l'application réelle, donc l'expérimentation des contrôleurs conçus sur le système à un bras flexible qu'on dispose.

### 7.1. CONTRÔLE PROPORTIONNEL – DÉRIVÉ (PD)

Les figures (3.5) et (3.6) montrent les variations de la position angulaire de l'extrémité du bras flexible dans le cas de la simulation du système contrôlé par le régulateur PD et son application expérimentale, respectivement. L'angle de référence est un échelon de 30 degrés, et les valeurs des paramètres correspondant aux meilleures performances sont les suivantes:

$$K_p = 2; \quad K_D = 0.01.$$

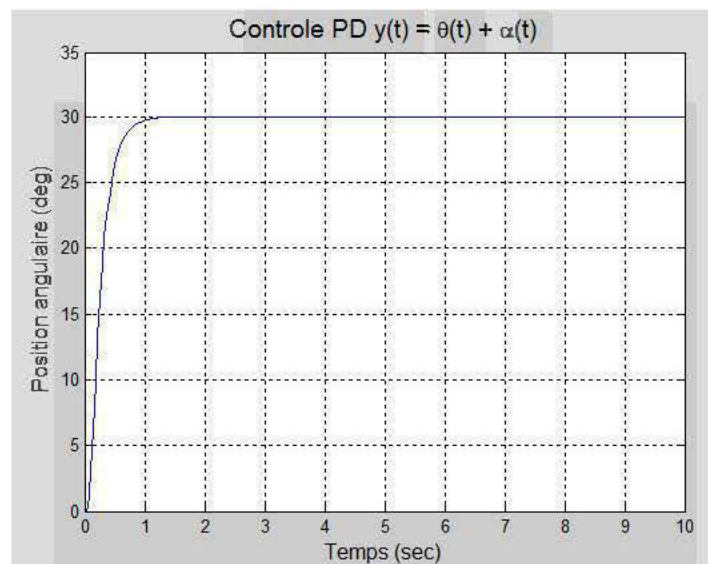
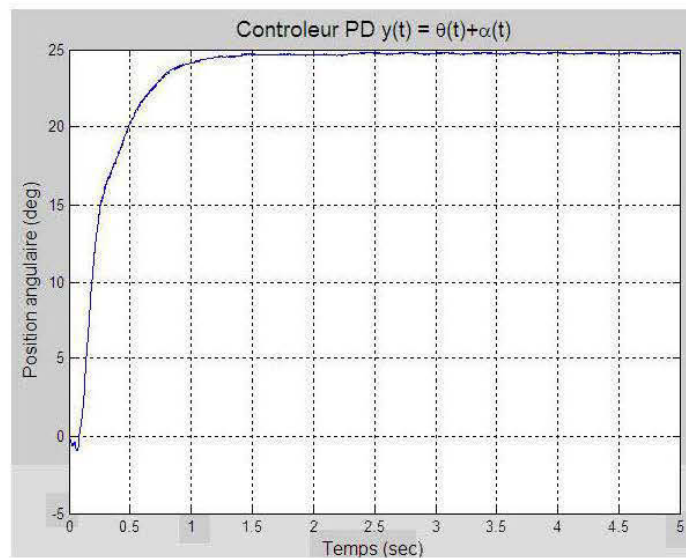


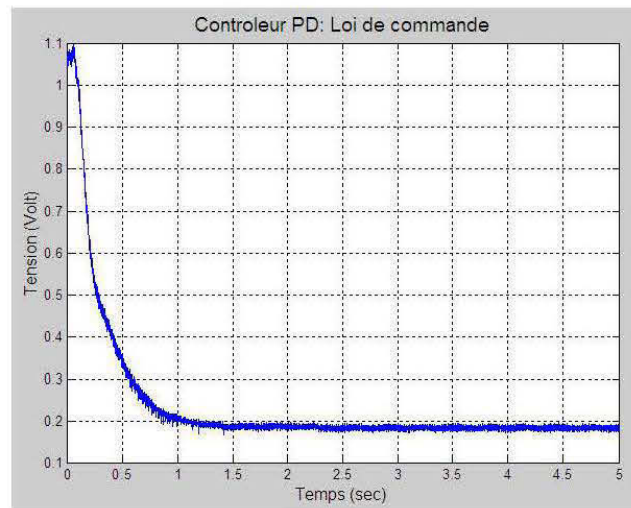
Figure 3.5 Résultat de la simulation.



**Figure 3.6** Résultat expérimental.

À partir des figures ci-haut, on remarque que dans le cas de l'application du contrôleur sur le montage réel, bien que les oscillations soient bien réduites, l'erreur statique en régime permanent est de plus de 5 degrés et la position désirée de l'extrémité du bras flexible n'est pas atteinte. Cette erreur stationnaire peut-être due à plusieurs facteurs, soient les erreurs de mesure, les frottements secs, imperfections du système et du calibrage...

La figure (3.7) présente la loi de commande calculée par ce régulateur PD, c'est alors la tension appliquée à l'entrée du système.

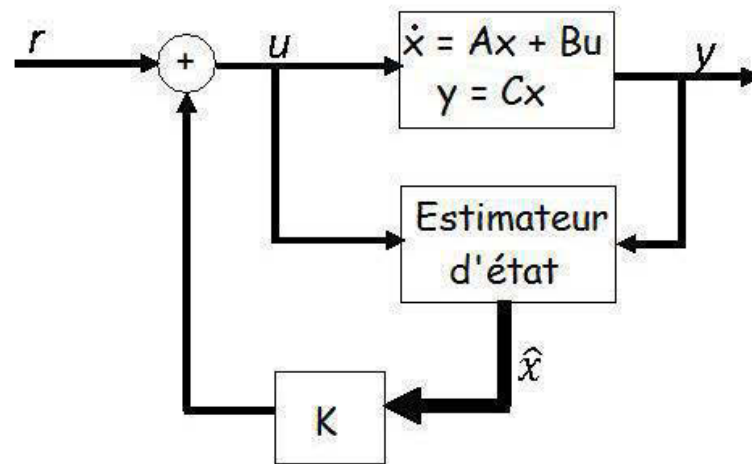


**Figure 3.7** Loi de commande appliquée à l'entrée du système.

## 7.2. CONTRÔLE PAR RETOUR D'ÉTAT ET COMMANDE OPTIMALE

Dans la suite on présente les différents résultats obtenus par simulation et par application pratique des systèmes contrôlés par la méthode du contrôle par retour d'état et la méthode du contrôle linéaire – quadratique.

Dans une première étape, on cherche à connecter le modèle du système au contrôleur et à l'estimateur d'état. La figure (3.8) illustre le schéma du système contrôlé en utilisant l'estimateur d'état:



**Figure 3.8** Système contrôlé disposant d'un estimateur d'état.

### 7.2.1. Simulation

La simulation du système est effectuée à l'aide du logiciel MATLAB (7.4.0)/SIMULINK (V7.0) ®. L'implémentation du modèle contrôlé du système est réalisée conformément à ce qui est vu à la figure (3.8) ci-haut. Ce modèle implanté dans Simulink est présenté à la figure suivante:

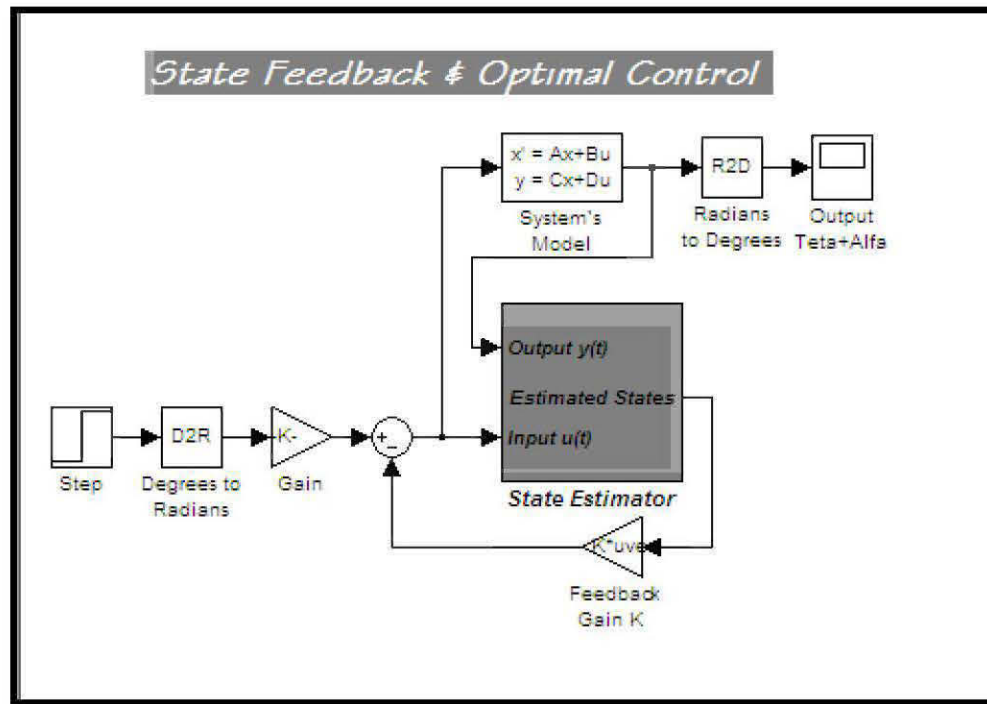


Figure 3.9 Implémentation du système dans MATLAB/SIMULINK.

Le bloc "System's Model" présente le modèle du système dans l'espace d'état, ce modèle considéré pour l'étude des techniques classiques de contrôle est celui obtenu par la méthode assimilant le bras flexible à un ressort d'élasticité constante.

Le bloc "State Estimator" correspond à l'estimateur d'état conçu de façon équivalente à ce qui est présenté à la figure (3.3). Le gain L est calculé de sorte que les valeurs propres désirées relatives à la dynamique de l'estimateur (3.39) soient les suivantes (Baroudi, Saad et Ghié, 2009):

$$\{-50, -15; -5 + 15i; -5 - 15i\}$$

Ainsi, les valeurs des gains constituant le paramètre L de l'estimateur sont:

$$L = 1.0e+03 * [0.0337, 0.0061, 0.8388, -1.6125]^T$$



L'entrée de référence considérée dans notre travail est un signal échelon de 30 degrés.

La sortie du système contrôlé est décrite par la position angulaire de l'extrémité. C'est donc la somme de l'angle à la base du bras flexible mesuré à l'aide d'un encodeur et la déformation angulaire de l'extrémité. Cette dernière est calculée à partir du déplacement de l'extrémité fournis par une jauge placée à la base.

#### A) Contrôle par retour d'état

Dans le cas du contrôle par retour d'état, des contrôleurs correspondant à plusieurs paramètres ont été testé. Deux parmi ces contrôleurs ont donnés des résultats satisfaisants. Sachant que les valeurs propres du système original sont les suivantes (Baroudi, Saad et Ghié, 2009):

$$\{0, -17.2072, -8.9629+25.1850i, -8.9629-25.1850i\}$$

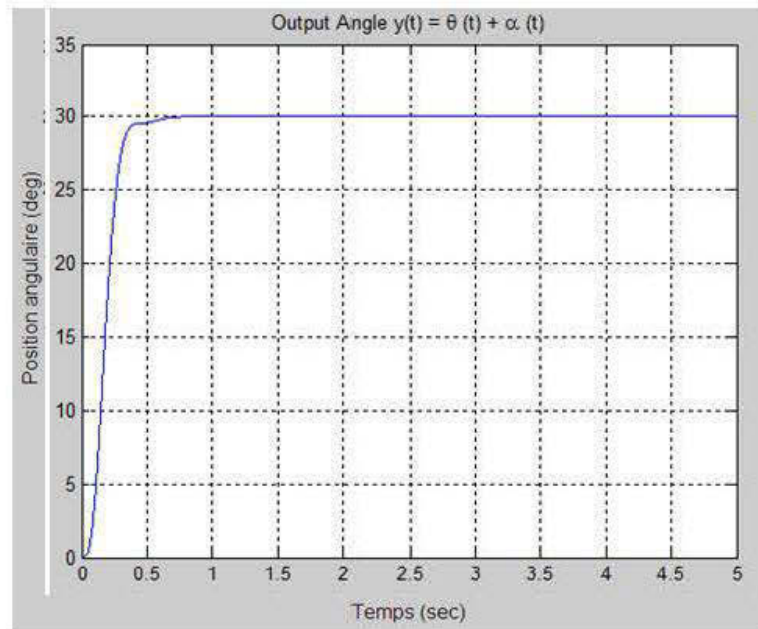
Les deux ensembles de valeurs propres désirées et les gains définissant chacun des deux contrôleurs mentionnés sont les suivantes:

i) Valeurs propres désirées:  $\{-35; -10; -10 + 15i; -10 - 15i\}$

Le vecteur gain caractérisant le contrôleur qui force au nouveau système les valeurs propres désirées ci-haut est:

$$\mathbf{K}_1 = [5.2647, -3.6761, 0.4317, -0.0521]^T$$

La position de l'extrémité dans ce cas est donnée par la courbe de la figure (3.10):



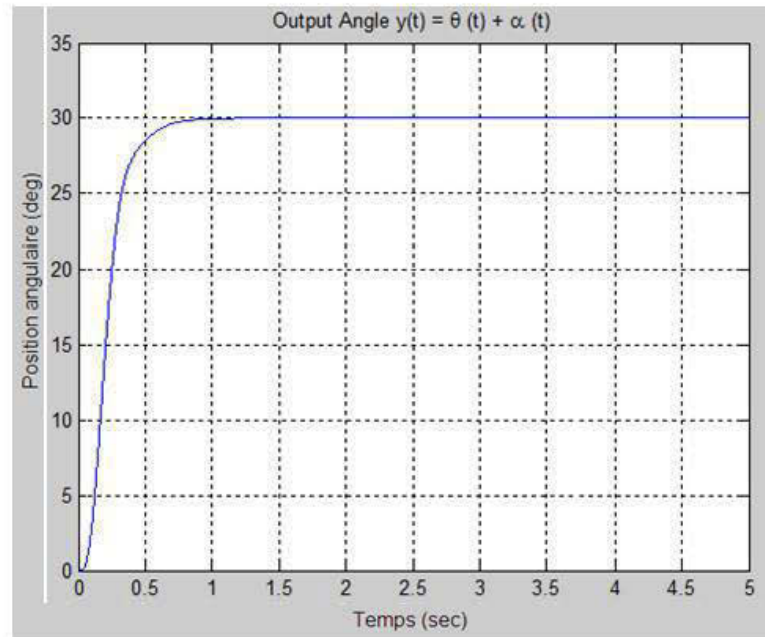
**Figure 3.10** Position de l'extrémité du bras  
pour les valeurs  $K_1$  du gain.

ii) Valeurs propres désirées:  $\{-35; -7; -10 + 15i; -10 - 15i\}$

Le vecteur gain caractérisant ce nouveau contrôleur est le suivant:

$$K_2 = [3.6853, -2.5826, 0.2894, -0.1458]^T$$

La position de l'extrémité devient alors comme le montre la courbe de la figure (3.11) suivante:



**Figure 3.11** Position de l'extrémité du bras pour les valeurs  $K_2$  du gain.

On remarque que le temps d'établissement de la réponse présentée à la figure (3.10) est légèrement inférieur à celui de la réponse à la figure (3.11).

#### A) Commande Optimale LQR

Pour le calcul et la simulation du régulateur LQR, les matrices caractérisant l'indice de performance  $Q$  et  $R$  sont choisies comme suit (Baroudi, Saad et Ghié, 2009):

$$Q = \text{diag}(12,12,0,0), \quad R = 1.$$

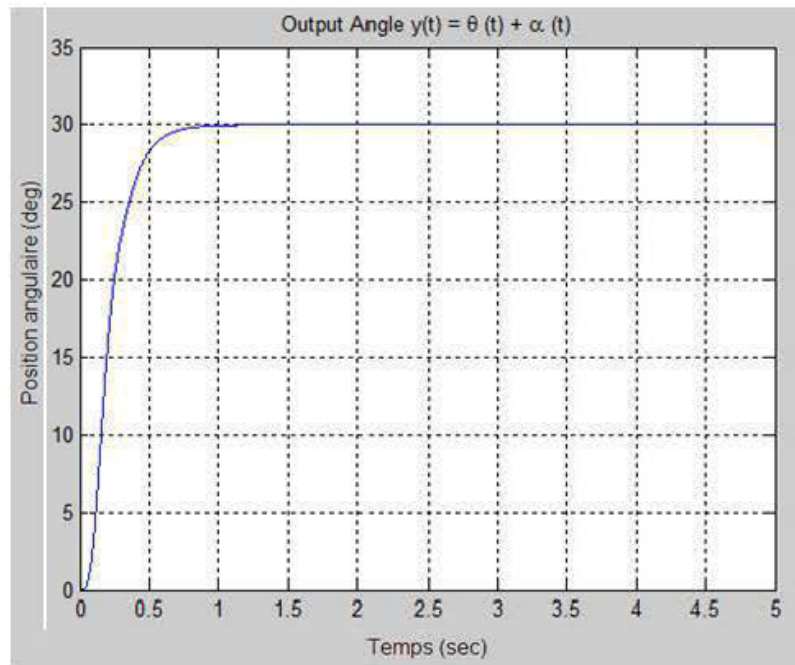
Le gain de Kalman obtenu possède alors les valeurs suivantes:

$$K = [3.4641, -0.2134, 0.2409, 0.1444]$$

Dans ce cas les valeurs propres qu'on obtient en boucle fermée sont les suivantes:

$$\{-13.8818, -7.4325, -9.8877 + 25.0529i, -9.8877 - 25.0529i\}$$

La réponse du système commandé par le régulateur LQR est présentée par la figure (3.12) qui montre la position de l'extrémité du bras pour une entrée référence de  $30^\circ$ .



**Figure 3.12** Position de l'extrémité du bras contrôlé par le régulateur LQR.

Les résultats ainsi obtenus par la simulation du manipulateur flexible contrôlé par deux techniques classiques différentes montrent la performance et l'efficacité de ces contrôleurs. Il reste alors à vérifier ces résultats sur le montage réel. Pour cela, on montre dans la suite les résultats obtenus par l'expérimentation de chacun de ces contrôleurs sur le montage réel à un bras flexible.

### 7.2.2. Résultats expérimentaux

Dans l'intention de réaliser les expérimentations sur le montage réel, on modifie l'implémentation du système contrôlé présentée à la figure (3.9) en utilisant le toolbox

de Quanser dans Simulink. Cela permet d'assurer la communication entre le bras flexible de Quanser et le logiciel de programmation c.à.d. Matlab/Simulink. En effet, ce toolbox contient les blocs nécessaires pour la lecture des sorties du système donc l'encodeur et la jauge. Celui-ci permet de même d'envoyer le signal de référence, donc l'entrée désirée, dans le but de commander le système. La figure (3.13) suivante montre la nouvelle implémentation considérée:

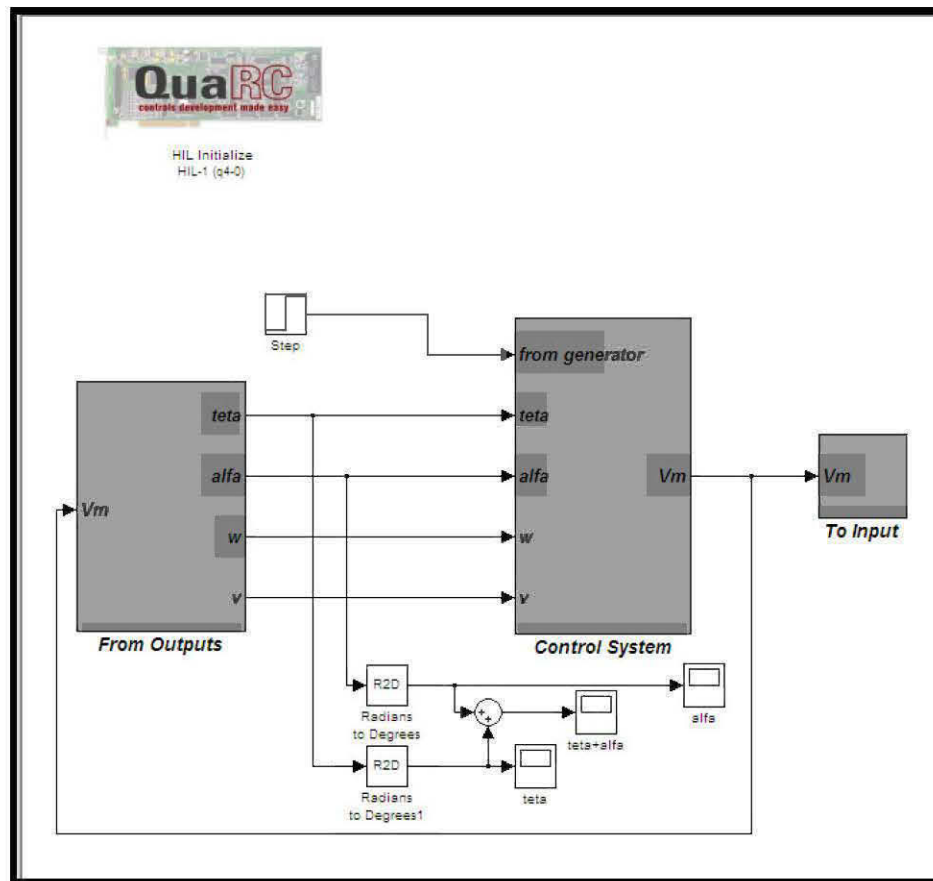
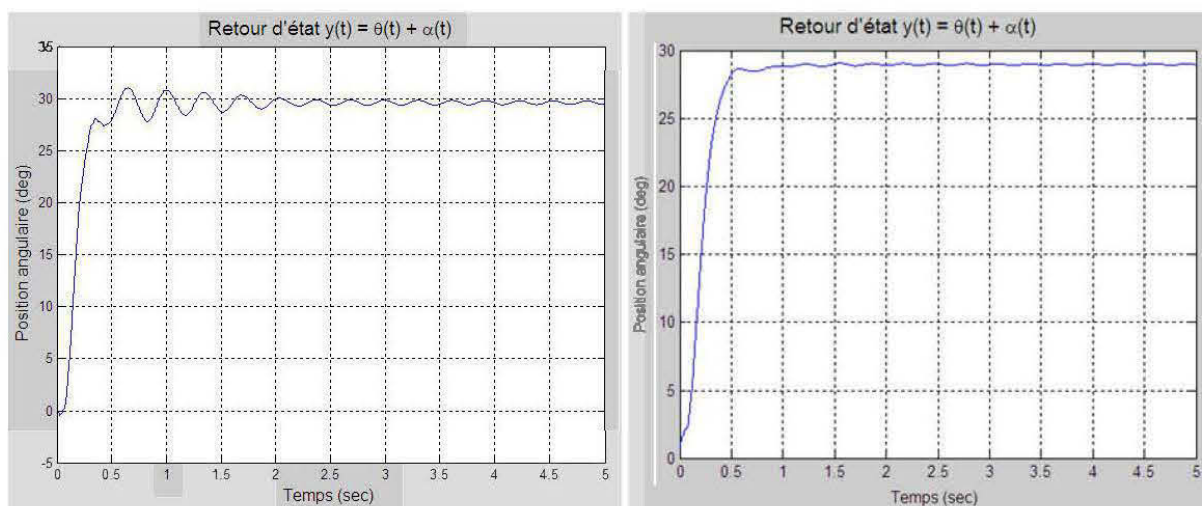


Figure 3.13 Implémentation du contrôleur dans Matlab/Simulink.

Le bloc "From Outputs" reçoit les sorties de l'encodeur et de la jauge pour déterminer les valeurs de l'angle de rotation à la base  $\theta(t)$  et la déformation angulaire de l'extrémité  $\alpha(t)$ . On introduit dans ce bloc l'estimateur d'état pour estimer les variables

d'état non-mesurables, c.à.d. les dérivées de l'angle de rotation  $\theta(t)$  et de la déformation angulaire  $\alpha(t)$ . C'est dans le bloc "Control System" qu'est introduit le gain calculé par l'une des méthodes qu'on vient de développer. "To Input" envoie la loi de commande calculée vers le servomoteur sous forme d'une tension  $V_m$ .

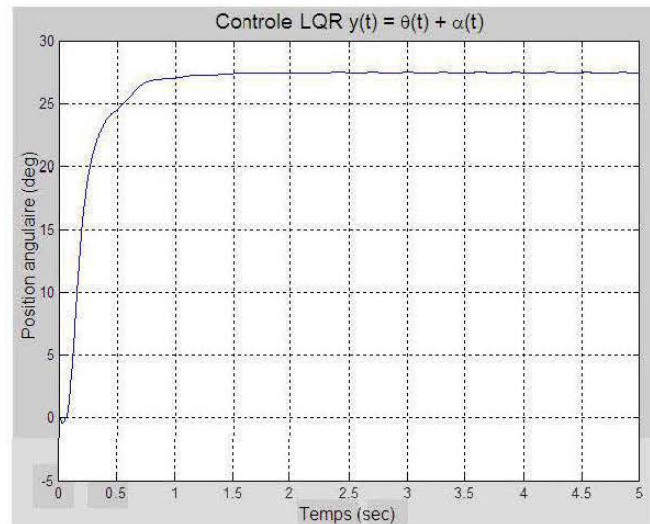
Les figures (3.14a), (3.14b) et (3.15) montrent les réponses du système pour chacun des deux cas du contrôle par retour d'état et le contrôle linéaire-quadratique.



(a) Les valeurs  $K_1$  du gain

(b) Les valeurs  $K_2$  du gain

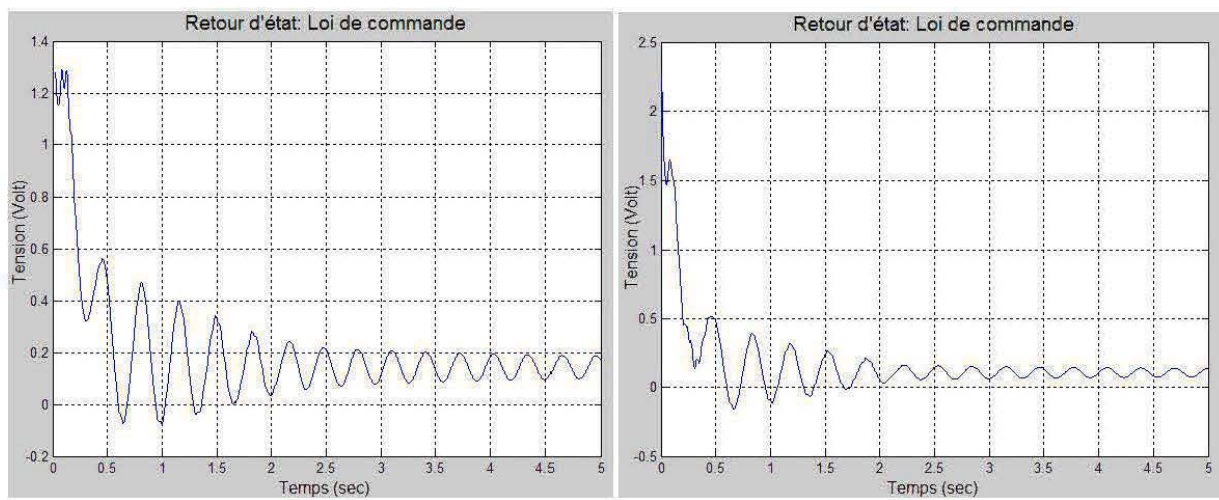
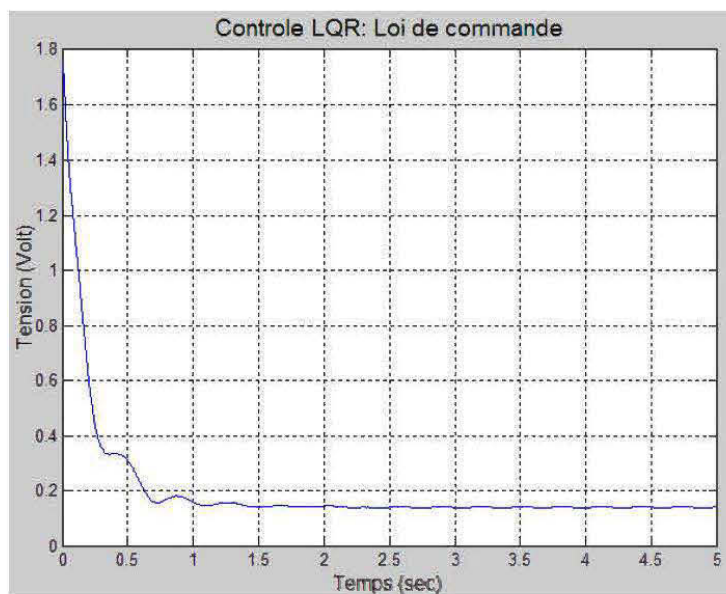
**Figure 3.14** Position de l'extrémité du bras dans le cas du contrôle par retour d'état.



**Figure 3.15** Position de l'extrémité du bras contrôlé par LQR.

Ces résultats expérimentaux permettent de remarquer que dans le cas du contrôle par retour d'état et pour les valeurs  $K_1$  du gain du contrôleur, de larges oscillations se présentent autour de la position désirée. Par contre, ces vibrations sont bien réduites dans le cas du gain  $K_2$  du contrôleur par retour d'état ainsi que pour le contrôle LQR. Cependant, l'erreur en régime permanent ne s'annule pas dans ces derniers cas, et la position désirée n'est pas atteinte pendant un temps limité. Cela peut-être du aux erreurs de mesure, aux erreurs de calibrage du système, aux bruits de mesure supposés négligeables...

Dans ce cas les lois de commande calculées par chacun des contrôleurs appliqués sont montrées aux figures (3.16) et (3.17).

(a) Les valeurs  $K_1$  du gain(b) Les valeurs  $K_2$  du gain**Figure 3.16** Lois de commande appliquées dans le cas du contrôle par retour d'état.**Figure 3.17** Loi de commande appliquée dans le cas du contrôle LQR.

À partir de ces figures représentant les lois de commande dans les différentes applications, on remarque que plus la loi de commande présente des oscillations alors plus fortes sont les vibrations sur la position de l'extrémité du bras flexible.



## 8. CONCLUSION

Ce chapitre présente l'étude de trois techniques de commande classiques. Le développement de ces techniques est réalisé en se basant sur le modèle linéaire du bras flexible modélisé par la méthode assimilant le bras flexible à un ressort d'élasticité constante.

On a commencé par introduire la notion de contrôlabilité et d'observabilité, une étude brève sur le contrôle proportionnel – dérivé est présentée. Par la suite, le développement et la conception du contrôleur par retour d'état est effectué en se basant sur la représentation du modèle du système sous sa forme canonique de contrôlabilité. L'idée de base traitée pour le développement de ce contrôleur est celle du déplacement des pôles en des lieux précis de notre choix. Dans la suite, la commande optimale est étudiée, cette technique est encore reconnue sous le nom de la régulation linéaire quadratique du fait qu'elle consiste à régler un modèle linéaire en minimisant une fonction de coût quadratique. Ces deux types de contrôle supposent que l'état du système est accessible, ce qui n'est pas le cas en pratique. Il a fallu alors concevoir un estimateur d'état.

Les résultats expérimentaux sont obtenus par application de ces contrôleurs au manipulateur robotique qu'on dispose. Ces résultats présentent une certaine ressemblance entre les trois techniques de contrôle étudiées. Mais, comme la position désirée n'est pas atteinte en un temps limité, cela nous sollicite à poursuivre ce projet en effectuant l'étude et le développement de techniques modernes de contrôle. Le sujet du chapitre suivant est alors le développement et la conception des techniques de contrôle modernes.

## CHAPITRE 4

### TECHNIQUES MODERNES DE CONTRÔLE

**J**USQU'À présent, le développement et la réalisation de trois techniques de contrôle classiques sont présentés. Le chapitre précédent montre l'importance de disposer d'un gain dans la chaîne de retour du système à contrôler et étudie son effet sur la réponse de ce dernier. Les résultats obtenus ont montré qu'une erreur en régime permanent subsiste toujours et la position désirée de l'extrémité du bras flexible n'est pas atteinte dans un temps limité. Cela nous a incités à étudier et concevoir des techniques de contrôle modernes. Dans ce chapitre, les études détaillées de deux techniques modernes sont alors présentées: la linéarisation entrée/sortie et la commande par modes de glissement. Des simulations avec le logiciel MATLAB (7.5.0) /SIMULINK (V7.0) ® ont été réalisées et exposées dans ce chapitre.

## 1. INTRODUCTION

Deux techniques de contrôle modernes sont étudiées, la linéarisation entrée – sortie et la commande par mode de glissement. À cause des simplifications considérées dans le cas du modèle conçu par la méthode des corps rigides avec lien élastique, il était impossible d'appliquer la linéarisation entrée – sortie sur ce modèle comme il fallait mesurer la dérivée d'ordre quatre (4) de la sortie. Cela nous a incités à employer le modèle obtenu par la méthode des modes supposés. Les fonctions de formes choisies pour la conception de ce modèle sont les fonctions propres d'une poutre encastrée sans charge. Avant de détailler le développement des contrôleurs modernes, on commence par une étude brève de la stabilité de Lyapunov (Khalil, 1996).

## 2. STABILITÉ DE LYAPUNOV

Face à un ensemble d'équations différentielles (pouvant être non-linéaire), la méthode directe de Lyapunov consiste à choisir une fonction scalaire, qui prend la forme d'une fonction d'énergie, dite fonction candidate de Lyapunov, relative à la dynamique du système, puis examiner la variation temporelle de cette fonction scalaire dans le but de vérifier la stabilité du système ainsi défini par ces équations différentielles.

La fonction candidate de Lyapunov  $V(x)$  est en fonction de l'état du système considéré  $x$  et sa dérivée temporelle  $\dot{x}$ , et doit vérifier deux propriétés. La première est une propriété de la fonction elle-même: cette dernière doit-être une fonction définie positive, donc pour  $x$  et  $\dot{x}$  non nulles la fonction candidate de Lyapunov doit-être positive. L'autre propriété est associée à la dynamique du système considéré: la fonction candidate est une fonction décroissante de façon monotone lors de la variation de l'état du système et de sa dérivée. En d'autres termes, la dérivée temporelle de cette fonction reste négative pour toute variation de  $x$  et  $\dot{x}$ .

## 2.1. STABILITÉ LOCALE

La stabilité locale est définie autour d'un point d'équilibre et implique l'usage d'une fonction candidate définie positive localement. Alors dans ce cas les conditions de stabilité locale deviennent:

- $V(x)$  est définie positive autour du point d'équilibre étudié
- $\dot{V}(x)$  est semi-définie négative au voisinage du point d'équilibre.

Si de plus la dérivée est localement définie négative, alors la stabilité est dite asymptotique.

## 2.2. STABILITÉ GLOBALE

Dans le but de généraliser la stabilité locale déjà définie, il n'est pas suffisant d'étendre le domaine d'étude au voisinage du point d'équilibre à l'espace d'état tout entier. En effet, une condition additionnelle s'ajoute à celles énoncées ci-haut, et la stabilité est alors déterminée par les conditions suivantes:

- $V(x)$  est définie positive
- $\dot{V}(x)$  est définie négative
- $V(x) \rightarrow \infty$  si  $\|x\| \rightarrow \infty$ , c.à.d. lorsque  $x$  tend vers l'infini dans n'importe quelle direction.

La stabilité ainsi définie est dite stabilité asymptotique globale.

## 3. LINÉARISATION ENTRÉE – SORTIE

La linéarisation par retour d'état est une approche concernant surtout la conception des contrôleurs non-linéaires. Durant les années récentes, cette approche a attiré l'attention d'un grand nombre de chercheurs. L'idée de base consiste à transformer algébriquement la dynamique non-linéaire du système considéré en une dynamique

linéaire de sorte à pouvoir appliquer les techniques de contrôle classique. Cela diffère complètement de la linéarisation conventionnelle puisque la linéarisation par retour d'état s'effectue à l'aide des transformations exactes des différents états du système. En d'autres termes, la linéarisation par retour d'état est vue comme étant une méthode de transformation du modèle du système original en un modèle équivalent de forme plus simple.

Cette technique de contrôle moderne a été utilisée avec succès pour la résolution pratique des problèmes de contrôle. Cela inclus non seulement le contrôle des manipulateurs robotiques mais aussi le contrôle des avions, des appareils biomédicaux et autres domaines de contrôle. Dans la suite, on présente une description de la technique de contrôle par linéarisation entrée – sortie et la conception du contrôleur correspondant.

### 3.1. CONCEPTION DU CONTRÔLEUR (Slotine et Li, 1991)

La linéarisation entrée – sortie appliquée au modèle simplifié basé sur la méthode des corps rigides nécessite une dérivation de la sortie du système jusqu'à l'ordre quatre. Cela étant inconcevable dans le cas de l'application réelle, on a choisi d'étudier ce type de contrôle sur le modèle obtenu par la méthode des modes supposés utilisant les fonctions propres d'une poutre encastree sans charge comme fonctions de forme. Le modèle considéré est celui dont la dynamique est présentée par l'expression (2.32) et utilisant comme fonctions de forme les fonctions propres d'une poutre encastree libre:

$$\begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{eq} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_L \\ \vec{0}_f \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ce dernier est donné pour un mode flexible comme suit:

$$\begin{bmatrix} m_{rr} & m_{rf} \\ m_{rf} & m_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

En remplaçant  $\tau_L$  par son expression donnée dans (2.67), les états du système seront définis de la façon suivante:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} = -M^{-1} \left( B \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} - \frac{1}{v_{m1}} (V_m - V_{m2} \cdot \dot{q}_r) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.3)$$

Avec,  $\frac{1}{v_{m1}} = \frac{\eta_m \eta_g K_m K_g}{R_m}$  et  $V_{m2} = K_m K_g$

On pose,  $M^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{eq} + \frac{V_{m2}}{v_{m1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}$$

Et on considère la sortie du système de la forme suivante:

$$y(t) = q_r + k_\alpha \frac{\phi_L}{L} q_f = \theta(t) + k_\alpha \alpha(t) \quad (4.4)$$

Où,  $k_\alpha$  est une constante appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ .

Pour des besoins de contrôle, on choisit la sortie  $y(t)$  comme étant l'angle de rotation à la base, c.à.d.  $k_\alpha = 0$ . Et la déformation angulaire de l'extrémité  $\alpha(t)$  est exprimée par:  $\alpha(t) = \frac{\phi_L}{L} q_f$

L'objectif du contrôle par la méthode de linéarisation entrée – sortie est de positionner la sortie  $y(t)$  sur une trajectoire désirée notée  $y_d(t)$ . La trajectoire désirée  $y_d(t)$  et ses dérivées temporelles jusqu'à un certain ordre suffisamment élevé sont supposées connues et limitées. Le problème alors réside dans le fait que la relation entre la sortie  $y_L(t)$  et la loi de commande  $V_m$  appliquée à l'entrée du système est indirecte. Pour

cela, on cherche à trouver une relation directe et simple entre la sortie désirée du système et la loi de commande appliquée à son entrée.

Dans le but de générer une relation directe entre la sortie  $y(t)$  du système et son entrée  $V_m$ , on commence par la dérivation de (4.4):

$$\dot{y} = \dot{q}_r + k_\alpha \frac{\phi_L}{L} \dot{q}_f \quad (4.5)$$

L'expression ainsi obtenue ne présente pas une relation directe entre l'entrée du système et la sortie correspondante, pour cela on effectue une deuxième différentiation. On obtient alors l'expression suivante:

$$\ddot{y} = \ddot{q}_r + k_\alpha \frac{\phi_L}{L} \ddot{q}_f \quad (4.6)$$

Si on remplace  $\ddot{q}_r$  et  $\ddot{q}_f$  par leurs expressions (4.3), l'équation (4.6) représente ainsi une relation explicite entre la sortie  $y$  et l'entrée du système  $\tau$ . Si on choisit ensuite que la loi de commande donnant la tension appliquée à l'entrée prend la forme suivante:

$$V_m = G_{c1}(v + G_{c2}q_f + G_{c3}\dot{q}_r) \quad (4.7)$$

Où,  $G_{c1}$ ,  $G_{c2}$  et  $G_{c3}$  sont des gains qui dépendent uniquement des paramètres définissant le modèle du système:

$$\begin{cases} G_{c1} = \frac{v_{m1}}{D_{11} + k_\alpha \frac{\phi_L}{L} D_{12}} \\ G_{c2} = \left( D_{12} + k_\alpha \frac{\phi_L}{L} D_{22} \right) K_{ff} \\ G_{c3} = \left( D_{11} + k_\alpha \frac{\phi_L}{L} D_{12} \right) \left( B_{eq} + \frac{v_{m2}}{v_{m1}} \right) \end{cases} \quad (4.8)$$

Et  $v$  est la nouvelle entrée du système, c.à.d. l'entrée à déterminer. La relation ainsi obtenue est une relation simple de double-intégration reliant la sortie  $y$  du système à la nouvelle entrée  $v$ :

$$\ddot{y} = v \quad (4.9)$$

La conception d'un contrôleur relative à cette relation de double-intégration est ensuite effectuée à l'aide des techniques classiques de contrôle. Si on considère l'erreur donnée par la forme suivante  $e = y(t) - y_d(t)$ , on définit la nouvelle entrée  $v$  du système comme suit:

$$v = \ddot{y}_d - K_1 \dot{e} - K_2 e \quad (4.10)$$

Avec  $K_1$  et  $K_2$  les gains à valeurs constantes positives.

Ces gains sont choisis de sorte à stabiliser la dynamique de l'erreur du système en boucle fermée. Cette dernière est donnée par l'expression suivante:

$$\ddot{e} + K_2 \dot{e} + K_1 e = 0 \quad (4.11)$$

Avec  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$ .

L'équation (4.11) représente une dynamique d'erreur exponentiellement stable. Cela implique que si à l'instant initial on a  $e(0) = \dot{e}(0) = 0$  alors on aura  $e(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ . Autrement,  $e(t)$  converge exponentiellement vers zéro.

Ainsi, la loi de commande est obtenue en remplaçant dans (4.7) l'entrée  $v$  par son expression exprimée dans (4.10):

$$V_m = G_{c1}(\ddot{y}_d - K_1 \dot{e} - K_2 e + G_{c2} \dot{q}_f + G_{c3} \dot{q}_r) \quad (4.12)$$



#### 4. CONTRÔLE PAR MODES DE GLISSEMENT

Dans le cas du contrôle basé purement sur le modèle du système, tel que la linéarisation entrée – sortie, la loi de commande est conçue convenablement au modèle nominal représentant le système physique. En d'autres termes, la réaction du contrôleur en présence des incertitudes ne peut pas être prévue pendant la conception de ce type de contrôleur.

La commande par mode de glissement (Slotine et Li, 1991) est une technique de commande robuste qui, lors de sa conception, prend en considération à la fois le modèle nominal représentant le système physique et quelques caractéristiques des incertitudes qui peuvent interférer. Ce type de contrôle est basé sur le fait que le contrôle des systèmes du premier ordre est plus simple que le contrôle des systèmes d'ordre supérieur. Pour cela, le contrôle par mode de glissement consiste à remplacer un problème d'ordre  $n$  par son équivalent du premier ordre.

##### 4.1. ÉTUDE THÉORIQUE

Le manipulateur flexible est représenté par son modèle linéaire sous la forme matricielle obtenue dans (2.32) par la méthode des modes supposés considérant les fonctions propres d'une poutre encadrée sans charge comme fonctions de forme. Ce modèle est présenté dans le cas d'un seul mode de flexibilité par l'expression (4.13):

$$\begin{bmatrix} m_{rr} & m_{rf} \\ m_{rf} & m_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Dans la suite, on fait l'étude du contrôleur à structure variable. Ce contrôle se résume comme étant une commutation de la loi de commande selon les modes de glissement. Cela veut dire que le gain par retour d'état commute entre deux valeurs selon la variation des valeurs mesurées des différents états du système.

Il s'agit alors d'appliquer une loi de commande qui amène le système sur un hyperplan de commutation stable. Une fois sur l'hyperplan, une phase de glissement consiste à faire glisser les états du système vers le point d'équilibre. Cet hyperplan, encore appelé surface de glissement, est représenté à la figure (4.1):

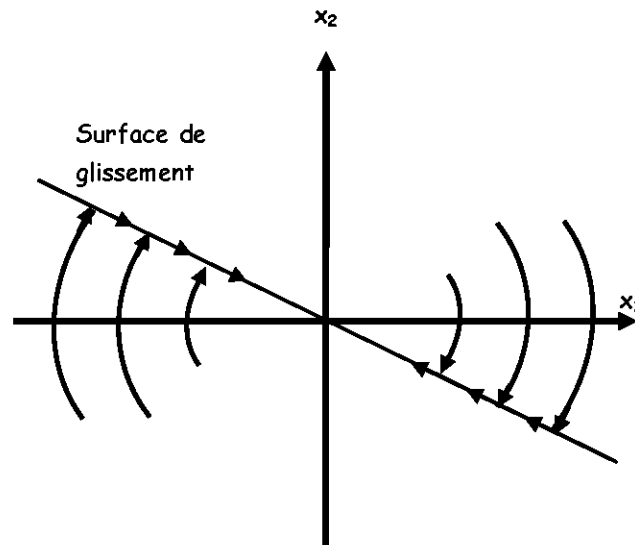


Figure 4.1 Hyperplan de commutation.

L'idée exploitée consiste à concevoir une loi de commande qui conduit l'état du système vers la surface de glissement et le maintient sur cette surface. Cela est réalisé en se basant sur l'approche de Lyapunov.

La surface de glissement est définie dans l'espace d'état  $R^n$  par l'équation de la variable  $s(x;t)$  suivante:

$$s(x;t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e(t) \quad (4.14)$$

Avec,  $\lambda$  une constante strictement positive;

Et,  $e(t) = x(t) - x_d(t)$ ; où,  $x_d(t)$  correspond au vecteur d'état désiré;

Dans le but d'évaluer la stabilité du système, on considère la fonction candidate de Lyapunov de la forme suivante:

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (4.15)$$

Alors, le système est stable si la condition suivante est remplie:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s| \quad (4.16)$$

Où,  $\eta$  est une constante strictement positive.

#### 4.2. CONCEPTION DU CONTRÔLEUR

La dynamique du système peut-être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} = -M^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} B_{eq} + \frac{v_{m2}}{v_{m1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} - \frac{v_m}{v_{m1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.17)$$

Avec,  $M^{-1} = D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}$

On remplace la matrice  $M^{-1}$  dans (4.17), on obtient alors les expressions suivantes:

$$\ddot{q}_r = -D_{11} \left( B_{eq} + \frac{v_{m2}}{v_{m1}} \right) \dot{q}_r - D_{12} K_{ff} q_f + D_{11} \frac{v_m}{v_{m1}} \quad (4.18)$$

$$\ddot{q}_f = -D_{12} \left( B_{eq} + \frac{v_{m2}}{v_{m1}} \right) \dot{q}_r - D_{22} K_{ff} q_f + D_{12} \frac{v_m}{v_{m1}} \quad (4.19)$$

Les surfaces de glissement sont définies comme suit:

$$s = \dot{e} + \lambda e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_r \\ s_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_r + \lambda_r e_r \\ \dot{e}_f + \lambda_f e_f \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Avec,  $e_r = q_r - q_r^d$ ; et  $e_f = q_f - q_f^d$

$$\dot{s} = \begin{bmatrix} \dot{s}_r \\ \dot{s}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{q}_r^d \\ \ddot{q}_f^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r - \dot{q}_r^d \\ \dot{q}_f - \dot{q}_f^d \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\dot{s}_r = -D_{11} \left( B_{eq} + \frac{V_{m2}}{V_{m1}} \right) \dot{q}_r - D_{12} K_{ff} q_f + D_{11} \frac{V_m}{V_{m1}} - \ddot{q}_r^d + \lambda_r (\dot{q}_r - \dot{q}_r^d) \quad (4.22)$$

$$\dot{s}_f = -D_{12} \left( B_{eq} + \frac{V_{m2}}{V_{m1}} \right) \dot{q}_r - D_{22} K_{ff} q_f + D_{12} \frac{V_m}{V_{m1}} - \ddot{q}_f^d + \lambda_f (\dot{q}_f - \dot{q}_f^d) \quad (4.23)$$

Durant le mode de glissement, la dynamique considérée correspond à:  $\dot{s} = 0$

Donc,  $\dot{s}_r = 0$  et  $\dot{s}_f = 0$

On obtient ainsi deux expressions de la tension appliquée  $V_m$ . La première expression permet à  $q_r$  de suivre sa trajectoire désirée, alors que la deuxième tend à rendre  $q_f$  vers sa valeur désirée.

$$V_{mr} = V_{m1} \left( \left( B_{eq} + \frac{V_{m2}}{V_{m1}} \right) \dot{q}_r + D_{11}^{-1} D_{12} K_{ff} q_f + D_{11}^{-1} \ddot{q}_r^d - D_{11}^{-1} \lambda_r (\dot{q}_r - \dot{q}_r^d) \right) \quad (4.24)$$

$$V_{mf} = V_{m1} \left( \left( B_{eq} + \frac{V_{m2}}{V_{m1}} \right) \dot{q}_r + D_{12}^{-1} D_{22} K_{ff} q_f + D_{12}^{-1} \ddot{q}_f^d - D_{12}^{-1} \lambda_f (\dot{q}_f - \dot{q}_f^d) \right) \quad (4.25)$$

Différents essais ont montré que la tension  $V_{mf}$  n'affecte pas le trajet de l'extrémité du bras, pour cela on a choisi d'appliquer uniquement la tension  $V_{mr}$  à l'entrée du montage.

D'autre part, pour assurer la stabilité du système, on pose:

$$V_m = V_{mr} - K \operatorname{sgn}(s) \quad (4.26)$$

Où  $K$  est une constante strictement positive correspondant au gain du contrôleur;

Et  $sgn(s)$  est la fonction signe définie par:

$$sgn(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

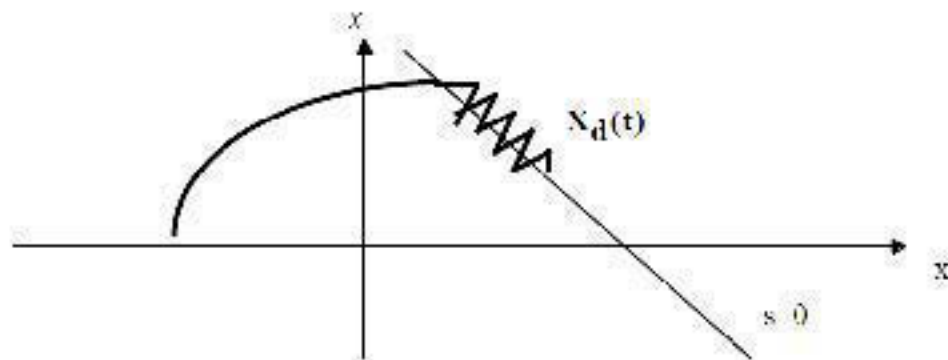
#### 4.3. AMÉLIORATION DE LA COMMANDE

Un problème de la commande par mode de glissement est le phénomène de battement (chattering) qui se présente lors de la phase de glissement comme le montre la figure (4.2). On cherche alors à éliminer ou réduire ce phénomène en remplaçant la fonction de signe ( $sgn(s)$ ) par la fonction de saturation ( $sat(s)$ ). La nouvelle loi de commande devient alors:

$$V_m = V_{mr} - Ksat(s/\epsilon) \quad (4.28)$$

Où,  $\epsilon > 0$  (faible);

$$sat(s/\epsilon) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > \epsilon \\ -1 & \text{si } s < -\epsilon \\ s/\epsilon & \text{si } |s| \leq \epsilon \end{cases} \quad (4.29)$$



**Figure 4.2** Phénomène de battement dû à l'imperfection du contrôleur lors de la commutation.

## 5. APPLICATION ET RÉSULTATS

Dans le but de pouvoir comparer les performances des contrôleurs classiques et modernes, les résultats déjà obtenus par l'emploi des contrôleurs classiques sont reproduits en considérant le système modélisé par la méthode des modes supposés.

### 5.1. SIMULATION

Dans la suite, une simulation est effectuée dans le but de tester les performances des différentes techniques de contrôle. Identiquement au cas des techniques classiques de contrôle, les techniques modernes supposent que tous les états du système sont accessibles, pour cela il a fallu employer l'estimateur d'état conçu au chapitre (3) précédent.

D'autre part, la trajectoire désirée est donnée à l'entrée et défini par l'expression suivante:

$$\begin{cases} q_r^d(t) = \frac{\pi}{2} \left( 5 \left( \frac{t}{T_f} \right)^3 - \frac{15}{2} \left( \frac{t}{T_f} \right)^4 + 3 \left( \frac{t}{T_f} \right)^5 \right) & \text{pour } 0 \leq t \leq T_f \\ q_r^d(t) = \frac{\pi}{4} & \text{pour } t \geq T_f \end{cases} \quad (4.30)$$

Les variables d'état désirées du système relatives à la déformation sont considérées comme nulles.

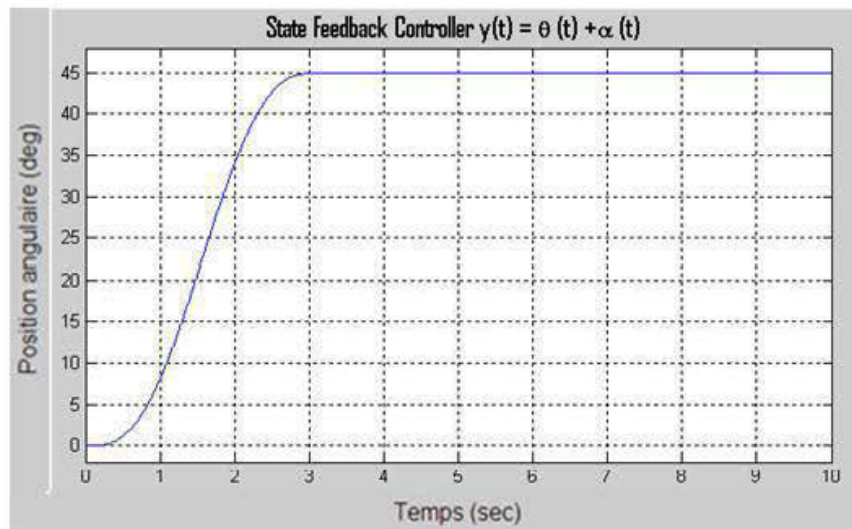
La programmation et l'implémentation de ces modèles sont réalisées sous Matlab(7.4.0) / Simulink(V7.0).

#### 5.1.1. Techniques classiques de contrôle

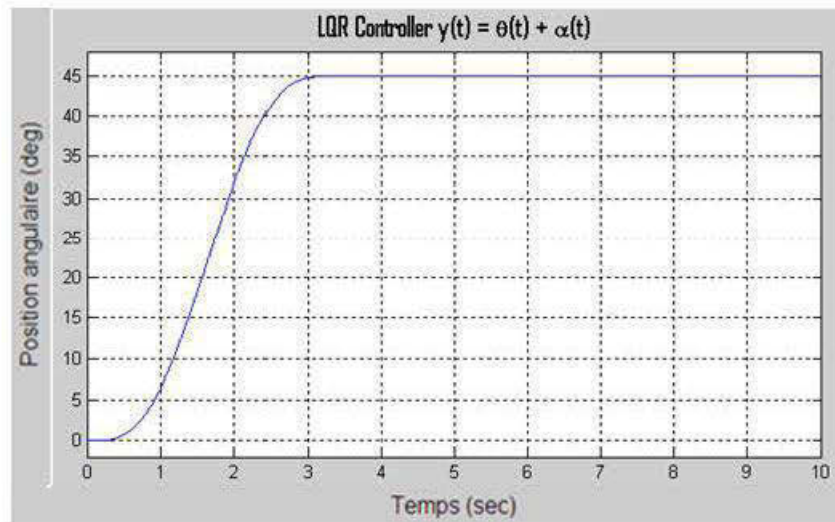
Dans le but d'effectuer la comparaison entre les différentes réponses du système, il fallu tout d'abord reprendre les résultats obtenus dans le cas des contrôleurs classiques, appliqués sur le modèle obtenu par la méthode des modes supposés avec

la fonction propre d'une poutre encastrée libre comme fonction de forme. L'entrée du système dans ce cas est celle décrivant la trajectoire définie dans (4.30).

Les figures (4.3) et (4.4) montrent les résultats de la simulation du système contrôlé par retour d'état et celui contrôlé par le régulateur LQR respectivement. Ces graphes montrent clairement la ressemblance de l'effet de ces deux contrôleurs sur le système. De plus, et se basant sur ces résultats de simulation, les deux contrôleurs semblent être performants puisque la position désirée est bien atteinte pendant in temps fini et l'erreur statique en régime permanent est annulée.



**Figure 4.3** Position de l'extrémité du bras contrôlé par retour d'état.



**Figure 4.4** Position de l'extrémité du bras contrôlé par le régulateur LQR.

### 5.1.2. Techniques modernes de contrôle

Dans le cas du contrôle par linéarisation entrée – sortie, l'implémentation est montrée à la figure (4.5). La forme globale est exposée à la figure (4.5a). Cette forme étant la même que celle du contrôle par mode de glissement. C'est uniquement le bloc constituant le contrôleur qui sera modifié. La figure (4.5b) présente une description détaillée du contrôleur employé.



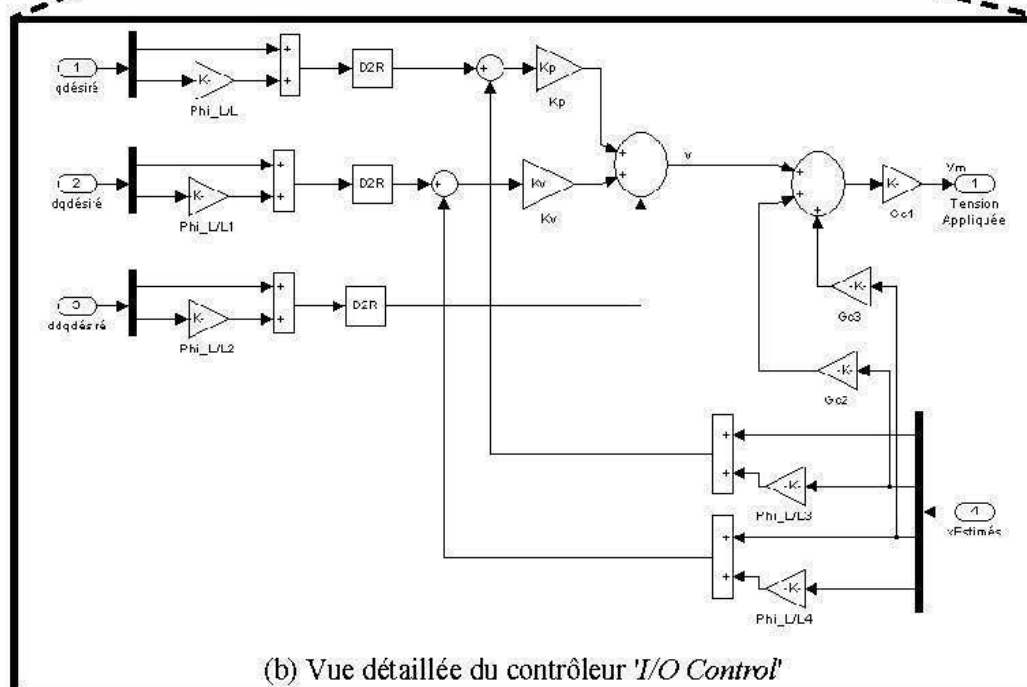
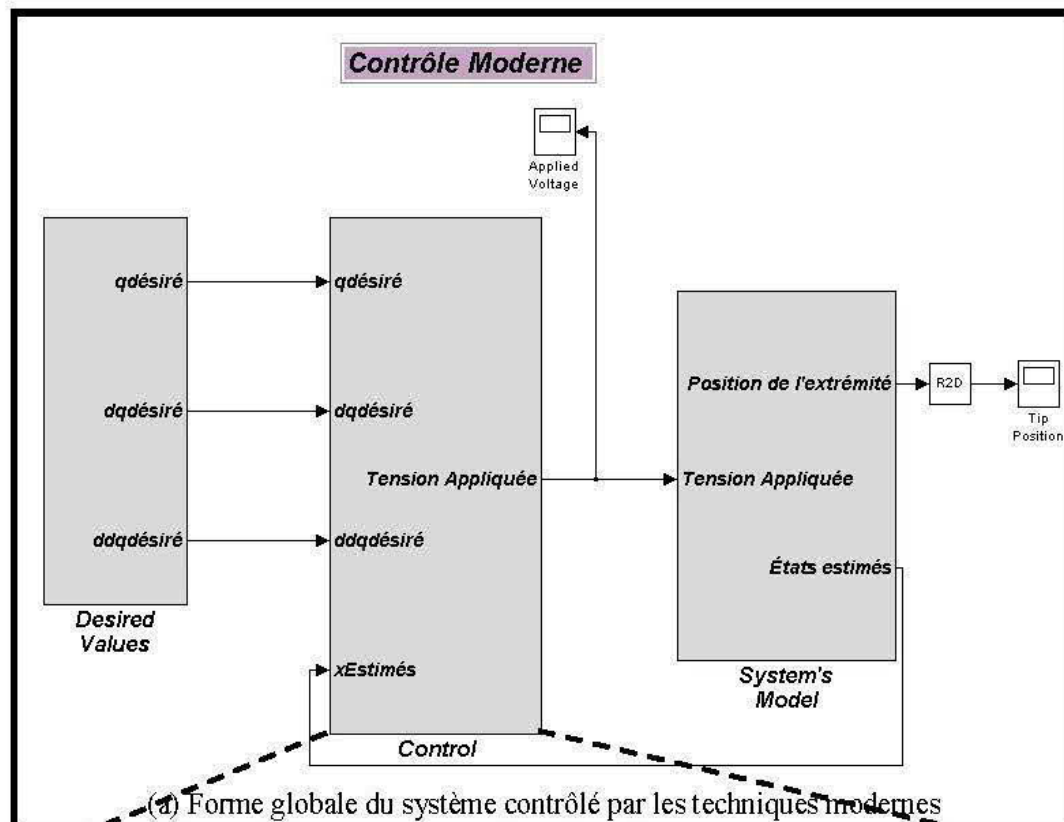


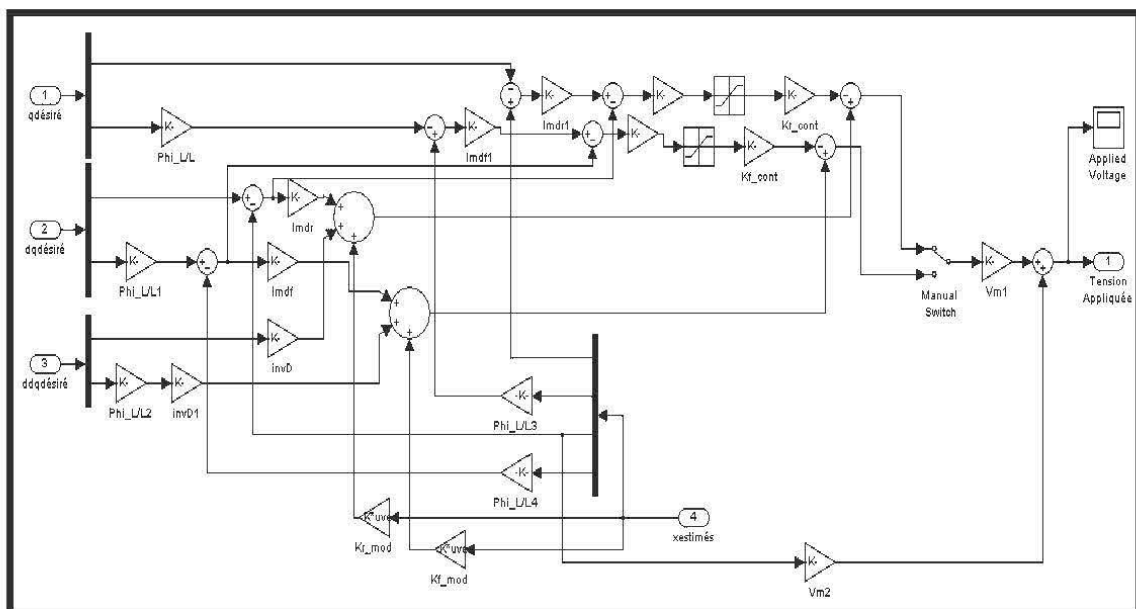
Figure 4.5 Implémentation du contrôleur par linéarisation entrée - sortie

Le bloc "*Desired Values*" correspond à la définition de la trajectoire désirée calculée conformément à l'expression (4.30). Cette dernière définit un angle de référence égale à  $45^\circ$ . Le bloc "*System's Model*" comprend le modèle du système dans l'espace d'état obtenu par la méthode des modes supposés ayant pour fonctions de forme les fonctions propres d'une poutre encastrée sans charge, et un estimateur d'état conçu identiquement à celui utilisé dans le cas du contrôle classique.

Le contrôle par linéarisation entrée – sortie illustré dans (4.5b) montre les gains  $K_p$  et  $K_v$  correspondants aux paramètres du contrôleur. Les valeurs optimales qu'on a obtenues pour ces gains et qui permettent d'aboutir aux performances les plus satisfaisantes sont les suivantes :

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_p = 35; \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_v = 1.5$$

La figure suivante montre la conception du contrôleur par modes de glissement implémenté sous Matlab/ Simulink :

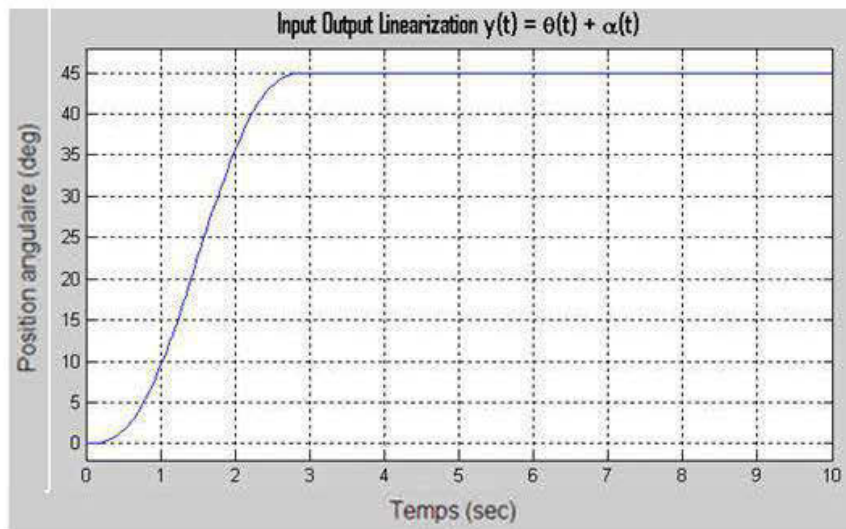


**Figure 4.6** Vue détaillée du contrôleur '*Sliding Mode Control*'

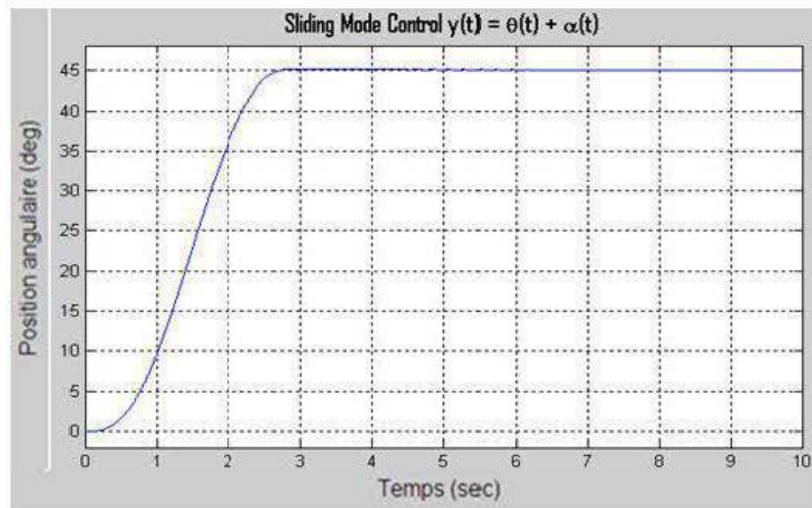
Dans ce cas, les valeurs des paramètres du contrôleur correspondant aux performances les plus satisfaisantes sont choisies comme suit:

$$\lambda = [\lambda_r; \lambda_f] = [1.5; 0.6]; \quad K = [K_r; K_f] = [25; 1.5]; \quad \varepsilon = 0.5$$

Les figures (4.7) et (4.8) correspondent à la variation de la position de l'extrémité du bras flexible dans le cas de la simulation du système contrôlé par la méthode de linéarisation entrée – sortie et le contrôle par modes de glissement, respectivement. L'entrée de référence étant toujours la trajectoire définie dans (4.30).

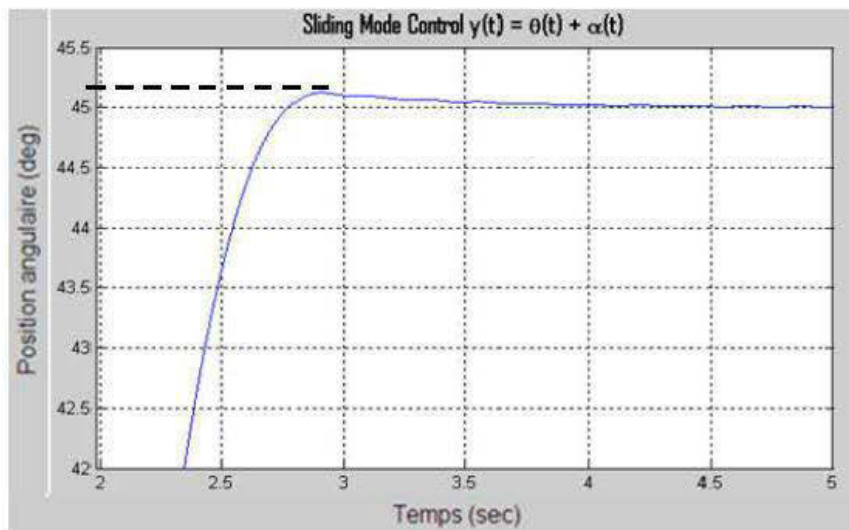


**Figure 4.7** Position de l'extrémité du bras flexible contrôlé par la technique de linéarisation entrée – sortie.



**Figure 4.8** Position de l'extrémité du bras contrôlé par modes de glissement.

La figure (4.8) montre un faible dépassement juste avant l'établissement du régime permanent. Dans le but de mieux visualiser ce dépassement, la figure (4.9) présente un agrandissement de la réponse du système à ces instants.



**Figure 4.9** Dépassement à l'instant d'établissement du régime permanent.

## 5.2. EXPÉRIMENTATION

Les résultats de la simulation présentés ci-haut sont suffisamment satisfaisantes du point de vue des performances: position désirée bien atteinte et erreur nulle en régime permanent. Cela sollicite l'application de ces contrôleurs sur le système réel en vu d'effectuer une vérification et de s'assurer des performances.

### 5.2.1 Application des contrôleurs classiques

Avant de passer à l'application des contrôleurs modernes, il a fallu reproduire les résultats du contrôle par les techniques classiques. La figure (4.10) correspond à l'implémentation du contrôleur classique monté sur le système réel. Le gain du contrôleur, ainsi que l'estimateur, sont calculé en se basant sur le système modélisé par la méthode des modes supposés. La position désirée en régime permanent est de  $45^\circ$ .

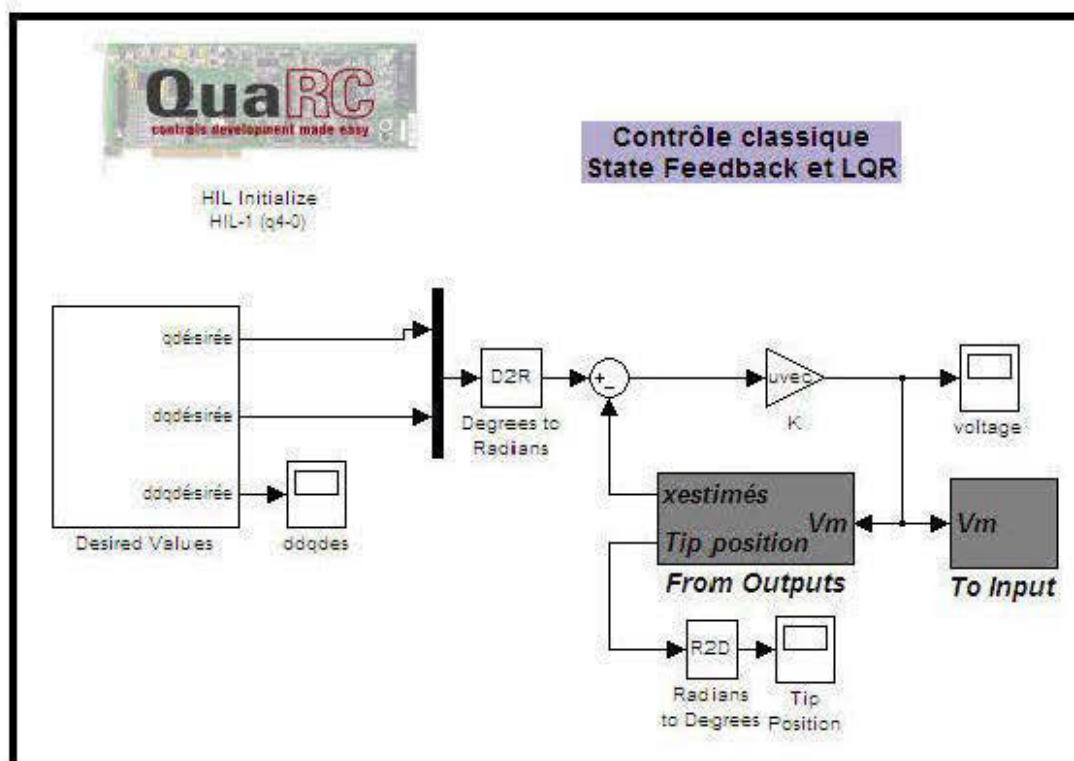
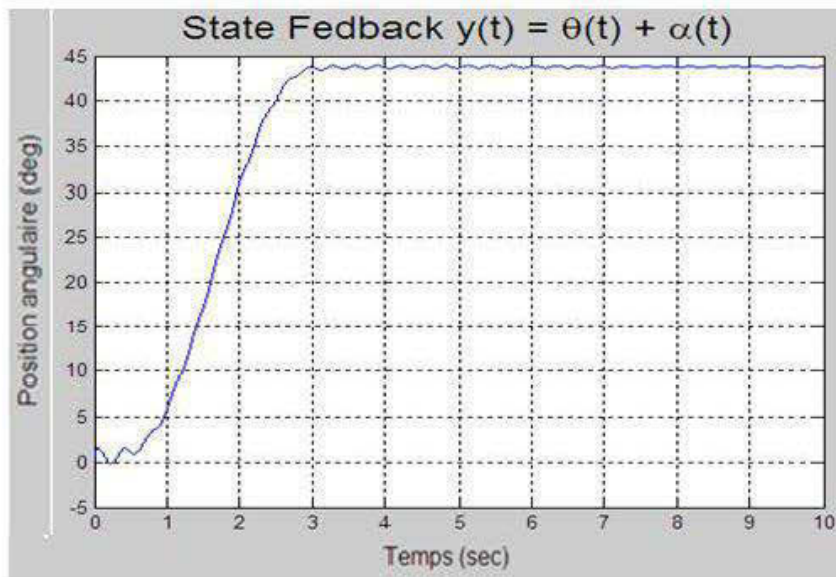


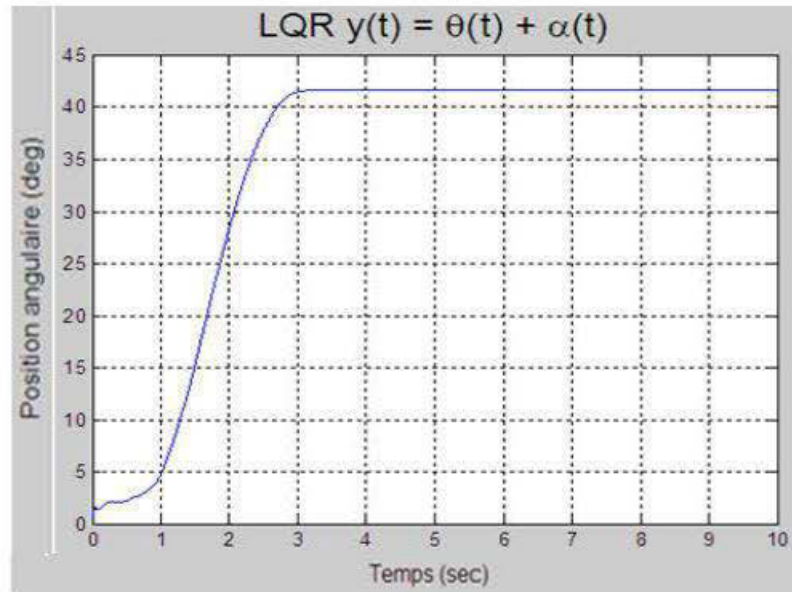
Figure 4.10 Implémentation du contrôle classique sur le système réel

L'application du contrôleur linéaire – quadratique (LQR) conçu conformément au modèle calculé par la méthode des modes supposés (MMS) a causé la divergence de la position de l'extrémité. Or, le fonctionnement des contrôleurs classiques est satisfaisant dans le cas du système modélisé par la méthode des corps rigides avec lien élastique, ce qui permet de conclure que contrairement au modèle simplifié, le modèle obtenu par la méthode des modes supposés est inadapté avec le système réel.

Les figures (4.11) et (4.12) montrent les réponses des contrôleurs classiques dans le cas du modèle des corps rigides avec un lien élastique et pour le cas de la trajectoire désirée définie dans (4.30).



**Figure 4.11** Position de l'extrémité du bras contrôlé par retour d'état.

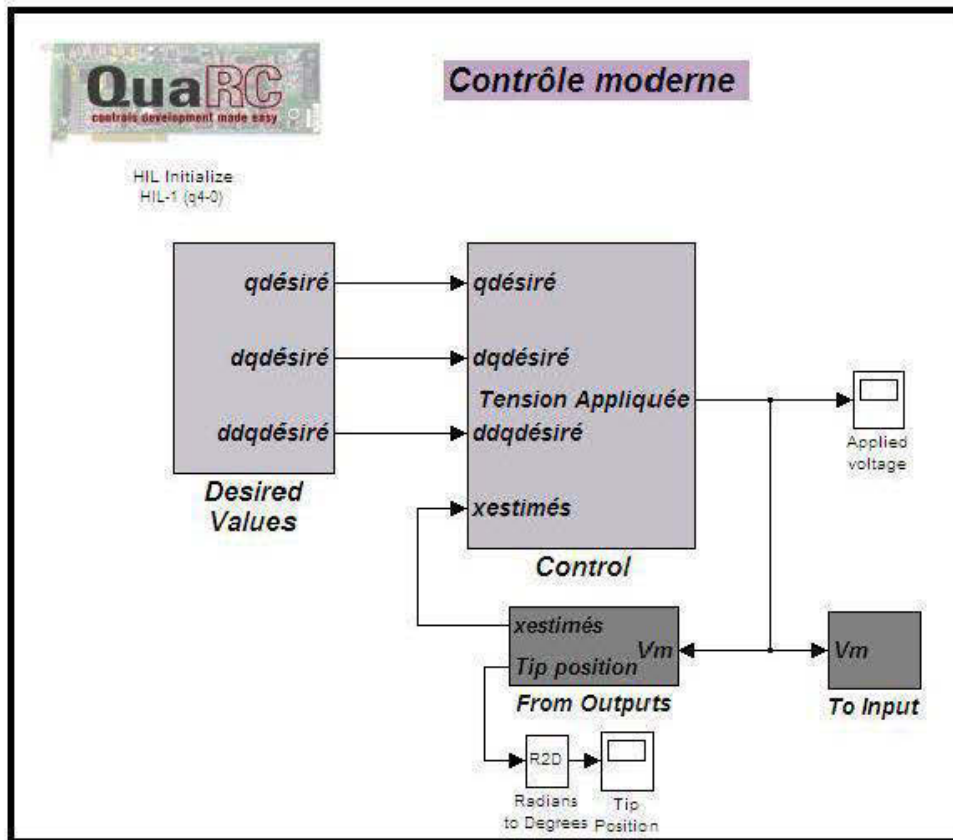


**Figure 4.12** Position de l'extrémité du bras contrôlé par LQR.

### 5.2.2. Application des contrôleurs modernes

L'application des contrôleurs modernes obtenus en se basant sur le modèle calculé par la méthode des modes supposés a abouti à la divergence du système réel. Pour cela, on choisit de modifier le contrôle par mode de glissement en considérant le modèle simplifié des corps rigides avec lien élastique.

La figure suivante représente l'implémentation de ce contrôleur sous Matlab/Simulink. Le bloc '*Control*' correspond au contrôleur par modes de glissement implémenté conformément à la figure (4.6).



**Figure 4.13** Implémentation du contrôleur par modes de glissement monté sur le système réel.

L'application de ce contrôleur sur le système réel à un bras flexible de Quanser a entraîné encore une fois à la divergence. En effet, au début de ce mémoire, on a mentionné que la commande par modes de glissement rend le comportement du système insensible aux perturbations sur la sortie et aux variations paramétriques. Cependant, les problèmes de "battement" (ou chattering) inhérents à ce type de commande discontinue apparaissent rapidement. Cela peut exciter des dynamiques haute-fréquences négligées menant parfois à l'instabilité. Alors, dans notre cas, la divergence peut-être due à ce phénomène qu'on n'a pas réussi à éliminer parfaitement.



## 6. CONCLUSION

Ce chapitre présente l'étude de deux techniques de contrôle modernes basées sur le principe de la stabilité de Lyapunov. Le développement de ces techniques est réalisé sur le modèle du système modélisé par la méthode des modes supposés considérant comme fonctions de forme les fonctions propres d'une poutre encastree sans charge.

On a commencé par présenter l'étude du contrôle par linéarisation entrée-sortie. Ensuite, il s'agit de l'étude de la technique de contrôle par modes de glissement.

La simulation de ces techniques de contrôle a montré que les réponses du système contrôlé par l'une ou l'autre de ces techniques présentent une grande ressemblance. Ces résultats ont montrés que les performances de ces contrôleurs sont satisfaisants tant dans le cas de la linéarisation entrée – sortie, que le cas du contrôle par modes de glissement. Par contre, les résultats expérimentaux ne se rencontrent pas avec ceux de la simulation. Puisque l'application de ces techniques de contrôle modernes sur le système réel a entraîné la divergence du bras flexible.

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

**C**E projet s'inscrit dans le cadre des travaux de recherche dans le domaine de la modélisation et du contrôle actif des manipulateurs robotiques flexibles. En fait, l'analyse dynamique et le contrôle des manipulateurs à un bras flexible est un domaine de recherche émergent dans les domaines de la fabrication, l'automatisation et la robotique, vu la large gamme d'applications des robots industriels allant des simples opérations de déplacement des matériaux et des pièces, jusqu'aux applications plus délicates telles que l'entretien des centrales nucléaires et les applications spatiales.

Le manipulateur robotique à un bras flexible considéré dans ce travail est développé par la compagnie Quanser, et ressemble en nature aux cas des grandes structures spatiales. Ce système expérimental est idéal pour modéliser une membrure flexible qui sera montée sur un robot rigide ou dans les structures spatiales légères.

Dans ce projet, on a cherché à assurer le positionnement de l'extrémité du bras flexible avec le plus de précision et le minimum d'oscillations. Cela a été réalisé en deux étapes: la modélisation du bras flexible, puis la conception de différents

contrôleurs dont trois sont basés sur des techniques classiques et deux sur des techniques modernes. L'effet de plusieurs combinaisons entre les méthodes de modélisation et les techniques de contrôle ont été testé. Les résultats des simulations et les résultats expérimentaux sont présentés au cours de ce mémoire.

Comme travaux futurs, on propose de poursuivre ce projet en considérant l'implémentation des contrôleurs étudiés dans le cas d'un manipulateur à plusieurs bras flexibles. On pourra de même considérer l'ajout d'une charge variable à l'extrémité du bras. D'ailleurs, il sera intéressant d'étudier l'effet de la friction et la présence d'autres éléments non-linéaires. En effet, les contrôleurs deviennent plus performants dans le cas où le système considéré est présenté par un modèle plus compliqué tenant compte d'un nombre supérieur de degrés de liberté. Le comportement du système varie en présence d'une charge. En outre, toutes les études actuellement disponibles traitent le cas des petites déformations. Alors, en présence de larges déformations, les modèles disponibles sont beaucoup plus complexes et les méthodes de contrôles doivent prendre en considération ces contraintes.

Dans le but de vérifier que les objectifs de ce projet énoncés dans le premier chapitre ont été bien remplis, on conclut par notre contribution réalisée au cours de ce travail:

- Modélisation, du manipulateur à un bras flexible fabriqué par compagnie Quanser, par différentes méthodes:
  - Méthode des éléments finis – MEF:
    - Cas d'un seul élément
    - Cas de deux éléments
  - Méthode des modes supposés – MMS:
    - Cas des fonctions de forme polynomiales
    - Cas des fonctions propres d'une poutre encastree libre
  - Méthode simplifiée proposée par Quanser

- Étude de la contrôlabilité et l'observabilité du système considéré (Baroudi et al., 2010)
- Conception des contrôleurs basés sur différentes techniques:
  - Techniques classiques:
    - Contrôle proportionnel-dérivé – PD
    - Contrôle par retour d'état (Baroudi, Saad et Ghié, 2009)
    - Contrôle linéaire quadratique – LQR (Baroudi, Saad et Ghié, 2009)
  - Techniques modernes:
    - Linéarisation entrée/sortie
    - Commande par modes de glissement
- Simulations à l'aide du logiciel Matlab/Simulink, puis applications pratiques sur le manipulateur à un bras flexible procuré par Quanser.

## BIBLIOGRAPHIE

- Ahmad, M. A., Z. Mohamed, H. Ishak, et A. N. K. Nasir. 2008 "*Vibration Suppression Techniques in Feedback Control of a very Flexible Robot Manipulator.*" 2nd Asian International Conference on Modeling and Simulation, p. 469-474.
- Aoustin, Y., C. Chevallereau, A. Glumineau, et C. H. Moog. 1994 "*Experimental Results for the End-Effector Control of a Single Flexible Robotic Arm.*" IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 2, no. 4, p. 371-381.
- Banavar, R. N., et P. Dominic. 1995 "*LQG/H $\infty$  controller for a flexible manipulator.*" IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 3, no. 4 p. 409-416.
- Baroudi, M., M. Saad, et W. Ghié. 2009 "*State-Feedback and Linear-Quadratic Regulator Applied to a Single-Link Flexible Manipulator.*" IEEE International Conference on Robotics and Biomemtics (ROBIO2009).
- Baroudi, M., M. Saad, W. Ghié, A. Kaddouri, et H. Ziade. 2010 "*Vibration Controllability and Observability of a Single-Link Flexible Manipulator.*" International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (Systems, Analysis & Automatic Control).
- Benosman, M., et G. Le Vey. 2004 "*Control of Flexible Manipulators: A Survey.*" vol. 22, p. 533-545: Robotica.
- Chaichanavong, P., et D. Banjerdpongchai. 1999 "*A Case Study of Robust Control Experiment on One-Link Flexible Robot Arm.*" Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, p. 4319-4324.

- Chang, P. M., et S. Jayasuriya. 1995 "Evaluation of several controller synthesis methodologies using a rotating flexible beam as a test bed." *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 117, no. 3, p. 360-373.
- Chen, C. T. 1984. *Linear Systems Theory and Design*. New York Montreal Holt, Rinehart, and Winston.
- Cho, K. S., J. Angeles, et N. Hori. 1994 "A Robust Model for the Descretization of Flexible Links Based on Cubic Splines." IUTAM Symposium on the Active Control of Vibration, p. 225-232.
- Cho, K., N. Hori, et J. Angeles. 1991 "On the Controllability and Observability of Flexible Beams Under Rigid-Body Motion." IECON Proceedings, Industrial Electronics Conference, p. 455-460.
- Dancose, S., J. Angeles, et N. Hori. 1989 "Optimal Vibration Control of a Rotating Flexible Beam." *American Society of Mechanical Engineers*, no. 18, p. 259-265.
- Dwivedy, S. K., et P. Eberhard. 2006 "Dynamic Analysis of Flexible Manipulators, a Litterature Review." *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, no. 7, p. 749-777.
- Fareh, R., M. Saad, et M. Saad. 2009 "Adaptive Control for a Single Flexible Link Manipulator Using Sliding Mode Technique." 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, 2009.
- Fukuda, T., et A. Arakawa. 1989 "Optimal Control and Sensitivity Analysis of Two-Links Flexible Arm with Three Degrees of Freedom." *IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2101-2106.

Geniele, H., R. V. Patel, et K. Khorasani. 1997 "*End-Point Control of a Flexible Link Manipulator: Theory and Experiments.*" *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 5, no. 6, p. 556 - 570.

Khalil, H. 1996. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, N.J. Prentice-Hall.

Konno, A., M. Uchiyama, Y. Kito, et M. Murakami. 1994 "*Vibration Controllability of a Flexible Manipulators.*" *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 308-314.

Lammerts, I. M. M., F. E. Veldpaus, M. J. G. Van de Molengraft, et J. J. Kok. 1995 "*Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots.*" *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 117, no. 1, p. 31-36.

Meirovitch, L. 1980. *Computational Methods in Structural Dynamics*. Alphen aan den Rijn, The Netherlands Rockville, Md., U.S.A. Sijthoff & Noordhoff.

Moallem, M., K. Khorasani, et R. V. Patel. 1997 "*An Inverse Dynamics Sliding Control Technique for Flexible Multi-Link Manipulators.*" *Proceedings of the American Control Conference*, p. 1407-1411.

Mohamed, Z., J. M. Martins, M. O. Tokhi, J. Sa Da Costa, et M. A. Botto. 2005 "*Vibration control of a very flexible manipulator system.*" *Control Engineering Practice*, vol. 13, no. 3, p. 267-277.

Ozcelik, S., S. M. Yesiloglu, et H. Temeltas. 2006 "*Direct Adaptive Control of Flexible Manipulators.*" *Proceedings of the American Control Conference 2006*, p. 2694-2699.

Pal, S., H. E. Stephanou, et G. Cook. 1988 "*Optimal Control of a Single-Link Flexible Manipulator.*" *International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 171 - 175.

- Piedboeuf, J. C. 1992 *Introduction à la modélisation des robots flexibles*. Montréal: École Polytechnique de Montréal.
- Piedboeuf, J. C., D. Dochain, R. Hurteau, et K. Benameur. 1991 "Optimal Control of the Tip of a Flexible Arm." Congrès canadien en génie électrique et informatique, p. 73.2.1-73.2.4.
- Popescu, D., D. Sendrescu, et E. Bobasu. 2008 "Modeling and Robust Control of a Flexible Beam Quanser Experiment." Acta Montanica Slovaca, vol. 13, no. 1, p. 127-135. Romania.
- Quanser. "SRV02 User Manuals." et "FLEXGAGE Flexible Link User Manuals" Quanser Documentations.
- Saad, M. 2004. *Modélisation et commande par la passivité d'un système à un bras flexible*. Montréal: École Polytechnique de Montréal.
- Saad, M., J. C. Piedboeuf, O. Akhrif, et L. Saydy. 2006 "Modal Analysis of Assumed-Mode Models of a Flexible Slewing Beam." *International Journal of Modelling, Identification and Control* , vol. I, no. 4, p. 325 - 337.
- Slotine, J. J. E., et W. Li. 1991. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey Prentice Hall.
- Theodore, R. J., et A. Ghosal. 1995 "Comparison of the Assumed Modes and Finite Element Models for Flexible Multilink Manipulators." *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, no. 2, p. 91-111.
- Tokhi, M. O., et Z. Mohamed. 1999 "Finite Element Approach to Dynamic Modeling of a Flexible Robot Manipulator: Performance Evaluation and Computational Requirements." *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 15, no. 9, p. 669-678.



- Usoro, P. B., R. Nadira, et S. S. Mahil. 1986 "*A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators.*" *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 108, no. 3, p. 198-205.
- Xu, J. X., et W. J. Cao. 2000 "*Synthesized sliding mode control of a single-link flexible robot.*" *International Journal of Control*, vol. 73, no. 3, p. 197-209.
- Zhu, W. D., et C. D. Mote. 1997 "*Dynamic Modeling and Optimal Control of Rotating Euler-Bernoulli Beams.*" *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 119, no. 4, p. 802-808.
- Ziarati, K. 1993. *Mise au point d'un contrôleur anticipatif pour un manipulateur flexible.* Montréal : École Polytechnique de Montréal.

## ANNEXE – A

**VALEURS NUMÉRIQUES DES MATRICES DE MASSE ET DE RIGIDITÉ  
CALCULÉES PAR LA MEF**

## A.1. CAS D'UN SEUL ÉLÉMENT

Pour  $n = 1$ , la dimension des matrices globales est:  $m = 2*n + 1 = 3$

a) Matrice de masse

$$M = \begin{pmatrix} 4.3012e+001 & 5.7194e+001 & 2.1506e+000 \\ 5.7194e+001 & 2.4122e-007 & 7.1269e-009 \\ 2.1506e+000 & 7.1269e-009 & 2.7147e-010 \end{pmatrix}$$

b) Matrice de rigidité

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.2063e+002 & 4.4061e+001 \\ 0 & 4.4061e+001 & 6.1539e+000 \end{pmatrix}$$

c) Valeurs propres

$$\text{val\_p} = 1.0\text{e}+010 * [ 0 \quad 0.0000 \quad -4.4867 ]^T$$

## A.2. CAS DE DEUX ÉLÉMENTS

Pour  $n = 2$ , la dimension des matrices globales est:  $m = 2*n + 1 = 5$

a) Matrice de masse

$$M = \begin{pmatrix} 4.3012\text{e}+001 & 7.4791\text{e}+001 & -2.4579\text{e}+000 & 0 & 0 \\ 7.4791\text{e}+001 & 4.8245\text{e}-007 & 0 & 8.3501\text{e}-008 & -4.2114\text{e}-009 \\ -2.4579\text{e}+000 & 0 & 5.4294\text{e}-010 & 4.2114\text{e}-009 & -2.0360\text{e}-010 \\ 0 & 8.3501\text{e}-008 & 4.2114\text{e}-009 & 2.4122\text{e}-007 & -7.1269\text{e}-009 \\ 0 & -4.2114\text{e}-009 & -2.0360\text{e}-010 & -7.1269\text{e}-009 & 2.7147\text{e}-010 \end{pmatrix}$$

b) Matrice de rigidité

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.4127\text{e}+002 & 0 & -4.2063\text{e}+002 & 4.4061\text{e}+001 \\ 0 & 0 & 1.2308\text{e}+001 & -4.4061\text{e}+001 & 3.0769\text{e}+000 \\ 0 & -4.2063\text{e}+002 & -4.4061\text{e}+001 & 4.2063\text{e}+002 & -4.4061\text{e}+001 \\ 0 & 4.4061\text{e}+001 & 3.0769\text{e}+000 & -4.4061\text{e}+001 & 6.1539\text{e}+000 \end{pmatrix}$$

c) Valeurs propres

$$\text{val\_p} = 1.0\text{e}+011 * [ 0 \quad -1.5104 \quad -0.1042 \quad 0.0000 \quad -0.0019 ]^T$$

## ANNEXE – B

### VALEURS NUMÉRIQUES DES MATRICES DE MASSE ET DE RIGIDITÉ CALCULÉES PAR LA MMS

On dispose dans cet annexe les valeurs numériques des matrices de masse et de rigidité obtenues par la méthode des modes supposés pour deux types de fonctions de forme: les fonctions polynomiales et les fonctions propres d'une poutre encastrée libre. On considère comme cas général quatre modes flexibles:

Pour  $n = 4$ , la dimension des matrices globales est:  $m = n + 1 = 5$

#### B.1. FONCTIONS DE FORME POLYNOMIALES

a) Matrice de masse

$$M = \begin{pmatrix} 0.0059 & 0.0068 & 0.0054 & 0.0045 & 0.0039 \\ 0.0068 & 0.0130 & 0.0108 & 0.0093 & 0.0081 \\ 0.0054 & 0.0108 & 0.0093 & 0.0081 & 0.0072 \\ 0.0045 & 0.0093 & 0.0081 & 0.0072 & 0.0065 \\ 0.0039 & 0.0081 & 0.0072 & 0.0065 & 0.0059 \end{pmatrix}$$

b) Matrice de rigidité

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17.5264 & 26.2895 & 35.0527 & 43.8159 \\ 0 & 26.2895 & 52.5791 & 78.8686 & 105.1582 \\ 0 & 35.0527 & 78.8686 & 126.1898 & 175.2636 \\ 0 & 43.8159 & 105.1582 & 175.2636 & 250.3766 \end{pmatrix}$$

c) Valeurs propres

$$\text{val\_p} = 1.0\text{e}+006 * [0 \quad -5.3540 \quad -0.2723 \quad -0.0347 \quad -0.0022]^T$$

## B.2. FONCTIONS PROPPRES D'UNE POUTRE ENCASTRÉE SANS CHARGE

a) Matrice de masse

$$M = \begin{pmatrix} 0.005880603 & 0.060738788 & 0.009692009 & 0.003461396 & 0.001766377 \\ 0.060738788 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.009692009 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.003461396 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.001766377 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Matrice de rigidité

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 834.04118149 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32756.090155 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.56813e+005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.86171e+005 \end{pmatrix}$$

c) Valeurs propres

$$\text{val\_p} = 1.0e+005 * [ 0 \quad -9.8766 \quad -2.5831 \quad -0.0223 \quad -0.3429 ]^T$$

