

**UNIVERSITÉ DU QUÉBEC**

**MÉMOIRE**

**PRÉSENTÉ À**

**L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI**

**COMME EXIGENCE PARTIELLE**

**DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE**

**PAR**

**ZOUHEIR ANNASABI**

**MODÉLISATION DE CHAUFFAGE DU BOIS PAR MICRO-ONDES**

**NOVEMBRE 2010**



**Cégep** de l'Abitibi-Témiscamingue  
**Université** du Québec en Abitibi-Témiscamingue

### **Mise en garde**

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

**CE MÉMOIRE A ÉTÉ RÉALISÉ  
À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE  
DANS LE CADRE DU PROGRAMME  
DE MAÎTRISE EN INGÉNIERIE  
DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
OFFERT PAR EXTENSION À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-  
TÉMISCAMINGUE**

## RÉSUMÉ

Les échanges des produits commerciaux en bois (structures, emballages, etc.) à l'échelle internationale sont devenus une manière importante à introduire des espèces envahissantes et particulièrement au Canada et aux États-Unis. Cette problématique est derrière la réglementation qui exige le traitement phytosanitaire de ces produits. Le chauffage par micro-ondes semble être une alternative potentielle pour réduire le temps de traitement. C'est une technique de chauffage par agitation de molécules d'eau contenues dans le bois à l'aide des ondes électromagnétiques courtes (micro-ondes). Toutefois, la prédiction de l'évolution de la température en fonction de temps au sein des espèces en bois n'a pas encore été suffisamment élucidée. Pour cela, il est souhaitable d'utiliser la modélisation comme outil pour simuler la progression de la température dans ces matériaux lors du traitement phytosanitaire. À cet effet, une approche, qui couple l'équation d'énergie 3D (en termes d'enthalpie volumique) et les équations de Maxwell (1D) a été développée et validée. Ensuite, nous avons étudié le chauffage par micro-ondes de quatre variétés de bois (peuplier faux tremble, bouleau blanc, bouleau jaune et l'érable à sucre) en fonction de l'humidité et de la fréquence des micro-ondes.

**Mots-clés :** chauffage par micro-ondes, bois, propriétés diélectriques, propriétés thermophysiques, enthalpie volumique, méthode des éléments finis 3D, équations de Maxwell.

## REMERCIEMENTS

Il me fait plaisir d'adresser mes remerciements à:

M. Fouad Erchiqui, mon directeur de recherche pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet; pour sa très étroite collaboration; pour ses compétences scientifiques et son professionnalisme et son aide à tout moment qui m'ont permis de mener à bien cette étude et la rédaction de ce mémoire. Aussi, pour son soutien financier.

M. Ahmed Koubaa, professeur à l'UQAT, mon codirecteur; pour son apport apprécié et les encouragements constants et les suggestions éclairées qu'il m'a apportés.

Me Duygu Kocafe, professeure à l'UQAC, ma codirectrice; pour son intérêt et ses conseils qu'elle m'a apportés.

Les professeurs du département des sciences appliquées de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) qui ont intervenu dans cette maîtrise en ingénierie; pour la qualité de leur enseignement.

Mes collègues de la maîtrise pour leur amitié et leur soutien moral.

Tout le personnel du service des étudiants de l'UQAT pour l'aide et le soutien qu'il m'a apportés durant mes études.

Tous ceux ou celles qui de près ou de loin m'ont soutenu durant ma formation.

Ma famille au Maroc; pour leur patience et leur soutien moral. Qu'elle trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude et de toute ma reconnaissance.

A mon regretté cher père à qui je dédie ce travail, Omar Annasabi. Hommage respectueux.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ .....	i
REMERCIEMENTS .....	ii
TABLE DES MATIÈRES .....	iii
LISTE DES SYMBOLES .....	vi
LISTE DES FIGURES.....	viii
LISTE DES TABLEAUX.....	xi
LISTE DES ANNEXES.....	xii
INTRODUCTION GÉNÉRALE .....	1
1. Généralité sur le traitement phytosanitaire des matériaux.....	1
2. Objectif de l'étude .....	3
3. Plan du mémoire .....	4
CHAPITRE I : DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE ET MISE EN ÉQUATIONS .....	6
I.1. Transfert de chaleur avec changement de phase d'un milieu continu .....	6
I.1.1. Formulation en enthalpie volumique de l'équation d'énergie.....	7
I.1.2. Formulation intégrale faible .....	10
I.1.3. Fonctionnelle de l'équation de conductivité thermique .....	12

I.2.	Formulation par éléments finis de la fonctionnelle de la structure.....	13
I.2.1	Discrétisation par éléments finis .....	13
I.2.2	Expression du flux.....	16
I.2.3	Matrice de capacité thermique .....	17
I.2.4	Schéma implicite d'intégration du temps.....	17
I.3.	Validation analytique et numérique.....	17
I.3.1	Validations analytique 1D-numérique 2D.....	18
I.3.1.1	Température imposée .....	19
I.3.1.2	Flux imposé.....	21
I.3.1.3	Convection .....	23
I.3.1.4	Solidification d'une plaque d'aluminium semi-infinie .....	25
I.3.2	Validations numérique 2D vis-à-vis 3D.....	28
I.3.2.1	Température imposée .....	28
I.3.2.2	Flux imposé.....	30
I.3.2.3	Convection .....	32
I.3.2.4	Génération de la chaleur interne .....	34
I.3.3	Conclusion.....	36

I.4. Validation expérimentale et numérique.....	37
CHAPITRE II : ÉNERGIE DISSIPÉE DANS LE BOIS PAR MICRO-ONDES.....	40
II.1 Équations de Maxwell-Faraday-Ampère.....	40
II.2 Énergie dissipée dans le bois.....	44
II.3 Variation des propriétés diélectriques du bois.....	45
II.4 Validation numérique.....	46
CHAPITRE III : CHAUFFAGE PAR MICRO-ONDES ET APPLICATIONS.....	49
III.1 Données expérimentales des propriétés diélectriques.....	49
III.2 Propriétés thermo-physiques.....	54
III.3 Étude de chauffage des quatre espèces de bois.....	56
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	65
RÉFÉRENCES.....	67
ANNEXES.....	71
Annexe 1 : Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D : terme source radiatif.....	71



## LISTE DES SYMBOLES

### Symboles latins

Symbole	Grandeur	Unité
x,y,z	Coordonnées spatiales.	m.
t	Temps.	s.
T	Température.	°C.
T <sub>s</sub> , T <sub>l</sub>	Température des phases solide et liquide.	°C.
T <sub>ref</sub>	Température de référence.	°C.
T <sub>m</sub>	Température de fusion ou de solidification.	°C.
T <sub>∞</sub>	Température du milieu ambiant.	°C.
K	Conductivité thermique	W · m <sup>-1</sup> · °C <sup>-1</sup> .
L	Chaleur latente	J · Kg <sup>-1</sup> .
H	Enthalpie volumique	J · m <sup>-3</sup> .
c <sub>p</sub>	Chaleur massique a pression constante.	J · Kg <sup>-1</sup> · °C <sup>-1</sup> .
c <sub>s</sub> , c <sub>l</sub>	Chaleur massique a pression constante des phases solide et liquide.	J · Kg <sup>-1</sup> · °C <sup>-1</sup> .
Q <sub>rad</sub>	Source radiative.	W · m <sup>-3</sup> .
q <sub>n</sub>	Flux normal.	W · m <sup>-2</sup> .
q <sub>r</sub>	Flux radiatif.	W · m <sup>-2</sup> .
h	Coefficient d'échange de chaleur par convection.	W · m <sup>-2</sup> · °C <sup>-1</sup> .
k	Nombre d'onde.	m <sup>-1</sup> .
f	Fréquence.	s <sup>-1</sup> .
c	Vitesse de la lumière.	m · s <sup>-1</sup> .
d	Profondeur de pénétration.	m.
MC	Teneur en humidité.	%
SG	Densité basale.	

Gm Densité humide.

### Symboles grecs

Symbole	Grandeur	Unité
$\Omega^-, \Omega^+$	Phases solide et liquide.	
$\Gamma$	L'interface entre les phases solide ( $\Omega^-$ ) et liquide ( $\Omega^+$ )	
$\rho$	Masse volumique	$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .
$\chi, \theta$	Transformée de Kirchhoff	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$ .
$d\Omega$	Element de volume.	$\text{m}^3$ .
$d\Gamma$	surface de l'élément de volume.	$\text{m}^2$ .
$\xi, \eta, \zeta$	Coordonnées du l'élément de référence.	
$\omega$	pulsation	$\text{s}^{-1}$ .
$\sigma$	Conductivité électrique.	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ .
$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_0$	Permittivités diélectriques.	$\text{C} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .
$\mu, \mu_0$	Perméabilités magnétiques du milieu et du vide.	$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ .
$\kappa', \kappa''$	Permittivités diélectriques relatives.	
$\beta$	inverse de la profondeur de pénétration.	$\text{m}^{-1}$ .

### Vecteurs

Symbole	Grandeur	Unité
$\mathbf{S}$	Vecteur <i>Poynting</i>	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .
$\mathbf{E}, \mathbf{E}^*$	Champ électrique et son conjugué.	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ .
$\mathbf{H}, \mathbf{H}^*$	Champ magnétique et son conjugué.	T.
$\mathbf{n}$	Vecteur normal.	
$\mathbf{N}$	Vecteur d'interpolation. nodale.	
$\mathbf{D}$	Induction électrique	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ .
$\mathbf{J}$	Densité de courant	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

## LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Maillage numérique de la plaque semi-infinie. ....	19
Figure 2 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	20
Figure 3 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). ....	21
Figure 4 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	22
Figure 5 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). ....	23
Figure 6 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	24
Figure 7 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). ....	25
Figure 8 : Distribution de la température à l'instant $t = 400$ s. ....	26
Figure 9 : Évolution de la température à l'instant $t = 2000$ s. ....	27
Figure 10 : Front de solidification. ....	28
Figure 11 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	29
Figure 12 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). ....	30
Figure 13 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	31
Figure 14 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). ....	32
Figure 15 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	33

Figure 16 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). .....	34
Figure 17 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	35
Figure 18 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). .....	36
Figure 19 : Géométrie et maillage du domaine. ....	38
Figure 20 : Évolution de la température au centre du tronc de bois de pin blanc d'Amérique. ....	39
Figure 21 : Distribution de la température à l'instant $t = 3000$ s. ....	47
Figure 22 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25). .....	48
Figure 23 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois du peuplier faux tremble à une teneur en humidité de 155%. .....	51
Figure 24 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois du bouleau blanc à une teneur en humidité de 125 %.....	52
Figure 25 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois de bouleau jaune à une teneur en humidité de 135 %.....	53
Figure 26 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois de l'érable à sucre à une teneur en humidité de 110 %.....	54
Figure 27 : Variation de la capacité thermique de quatre espèces de bois en fonction de la température à une teneur en humidité de 131 %.....	55
Figure 28 : Variation de la conductivité thermique de quatre espèces de bois en fonction de la température à une teneur en humidité de 131 %.....	56
Figure 29 : Géométrie et maillage 3D.....	57

Figure 30 : Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant $t_1 = 250$ s. ....	58
Figure 31: Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant $t_2 = 500$ s. ....	59
Figure 32 : Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant $t_3 = 1000$ s. ....	60
Figure 33 : Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant $t_4 = 1250$ s. ....	61
Figure 34 : Variation de la diffusivité thermique de quatre espèces de bois en fonction de la température à une teneur en humidité de 131 %. ....	63
Figure 35 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans les quatre espèces à une teneur en humidité de 131 %. ....	64

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 1 : les propriétés thermo-physiques de bois du pin blanc d'Amérique. ....	37
Tableau 2 : les données utilisées dans la simulation. ....	38
Tableau 3 : Propriétés diélectriques en fonction des essences de bois, et de la température pour des teneurs en humidité constantes et une fréquence micro-onde de 2466MHz. ....	50
Tableau 4: Masse volumique, à une teneur en humidité de 131 %. ....	55

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe 1 : Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D appliquée au cas du solide semi-infini diathermane (Monteix et al, 2001).....	71
---	----

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

### 1. Généralité sur le traitement phytosanitaire des matériaux

La circulation de certains produits, par exemple les matériaux d'emballage, est identifiée comme étant une des causes qui a facilité l'introduction des pathogènes et des insectes dans plusieurs pays du monde, particulièrement le Canada et les États-Unis (*Work et al., 2005; McCullough et al., 2005; Haack, 2001*). Les conséquences sont nombreuses et touchent particulièrement les ressources forestières et agricoles du Canada et des USA (*Pimentel et al., 2000*). En effet, dans le cas de ces pays, plusieurs espèces non indigènes, comme le longicorne asiatique (*Anoplophora glabripennis*), le champignon Phytophthora et le nouveau Agrile de frêne (*Agrilus planipennis*) menacent les forêts de l'est de l'Amérique du Nord. Face à cette nouvelle réalité mondiale, le groupe de travail de la Convention internationale pour la protection des végétaux (CIPV) a passé une réglementation en 2004 concernant le traitement phytosanitaire de tous les matériaux ou produits pouvant contenir de la matière végétale ou le bois, incluant l'emballage. Cette réglementation exige, lors d'échanges internationaux, que chaque marchandise ou produit contenant de la matière végétale doive être totalement désinfecté avant son envoi. De même pour les conteneurs, les installations d'emmagasiner et les moyens de transport utilisés pour le stockage ou l'envoi de ces produits (*USDA, 2002*). Les conséquences de ces réglementations débordent aussi sur les palettes de bois et de tous produits en bois non séché, mettant ainsi en péril la survie de plusieurs entreprises canadiennes de l'industrie du bois.

Plusieurs alternatives sont utilisées pour le traitement phytosanitaire (*Lewis et Haverty, 1996; Lewis et al. 2000; USDA, 2002*) tels le traitement thermique, la fumigation, la préservation, l'irradiation et le contrôle de l'atmosphère. À titre d'exemple, dans le cas d'un traitement par pasteurisation, les fréquences utilisées pour le traitement phytosanitaire varient de 915 MHz à 2,45 GHz (*Antti, 1999; Koubaa et al. 2008*).



L'irradiation aux micro-ondes est la plus rapide et la plus facile à intégrer dans une ligne de production (*Antti, 1999; Koubaa et al., 2008*). Toutefois, les modèles expérimentaux et mathématiques utilisés pour qualifier l'efficacité de cette technique semblent ne pas être parfaitement élucidés dans la littérature. En effet, plusieurs incertitudes sur l'efficacité d'un tel traitement à pénétrer le bois (*Antti 1999; USDA, 2000*) et leur capacité de tuer les microorganismes et les insectes (*Flemming et al., 2000; USDA, 2002*) restent à vérifier. En plus, la prédiction du pouvoir de pénétration du bois par les micro-ondes dépend de plusieurs facteurs, dont la fréquence, la température, la teneur en humidité du bois et les propriétés diélectriques du bois (*Antti, 1999*). Dans ce mémoire, on s'intéresse au traitement du bois par micro-ondes. À cet effet, nous considérons quatre espèces.

L'irradiation par micro-ondes est une technique de chauffage électrique visant à chauffer des matériaux peu conducteurs électriquement et généralement thermiquement, contrairement au chauffage infrarouge, qui est essentiellement un phénomène de surface, le chauffage diélectrique permet la production de la chaleur à l'intérieur du matériau et dans un temps plus court. En effet les matériaux de faible conductivité électrique peuvent être chauffés par micro-ondes si leurs molécules possèdent une structure asymétrique. Dans le cas de bois, l'application d'un champ électrique a pour effet d'induire une asymétrie des molécules d'eau (polarisation) présentes dans le matériau. Conséquemment, pour de fréquences particulières, les molécules se frottent et génèrent de la chaleur dans le matériau. La prédiction de l'évolution de cette température nécessite des outils expérimentaux et numériques robustes (*Brodies, 2007; Annasabi et al., 2010*).

Soulignons que la technique de chauffage par micro-ondes ne peut être applicable au traitement du bois que si elle n'engendre pas une dégradation des propriétés physico-mécaniques du matériau. Dans ce cas, il est essentiel de vérifier si le traitement aux micro-ondes entraîne ou non des effets négatifs sur les propriétés. Ce volet ne sera pas considéré dans ce mémoire, seul l'aspect de modélisation numérique sera considéré en tenant compte des propriétés thermo-physiques et électriques bien définies.

Pour la modélisation et l'analyse de chauffage par micro-ondes du bois, nous considérons la Méthode des éléments finis (MEF) en 3D. À cet effet, nous utiliserons une formulation basée sur l'enthalpie volumique (*Erchiqui, 2000*). Les propriétés thermo-physiques et diélectriques des matériaux sont considérées dépendantes de la température et de l'humidité (*Kanter, 1957*). Aussi, pour respecter les spécifications des réglementations mentionnées ci-dessus, des analyses comparatives des temps de chauffage sur quatre espèces en bois seront effectuées. À cet effet, nous allons considérer l'effet des fréquences des micro-ondes, de la géométrie, des caractéristiques intrinsèques des structures (teneur en humidité, propriétés thermo-physiques, etc.) sur le temps de chauffage. L'avantage d'utiliser une formulation basée sur l'enthalpie plutôt que sur la température permet d'éliminer simultanément le dédoublement de l'équation d'énergie (cas de bois contenant initialement de la glace et le bois, après chauffage, contenant aussi de l'eau) et les conditions de Stéfan (*Hu et Argyropoulos, 1995*), condition mathématique à l'interface glace-eau. Pour cela, nous considérons la définition de l'enthalpie sensible pour la phase solide du matériau (*Nedjar, 2002*). Pour la stabilisation de la méthode numérique, le schéma mono-pas implicite d'intégration en temps sera utilisé (*Dokainish et Subbrajk, 1989*). Pour le calcul de l'énergie dissipée dans les structures de bois, le théorème de *Poynting* ainsi que les équations de Maxwell sont considérés. À cet effet, le modèle radiatif de type Beer-Lambert est considéré (*Brodies, 2007*).

Une validation expérimentale de transfert radiatif a été effectuée, comme application, nous avons simulé le chauffage d'une structure de bois tridimensionnelle de  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$  à  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

## **2. Objectif de l'étude**

Dans cette étude, on vise à développer une approche numérique par éléments finis hybride 3D/1D pour la compréhension et la simulation de la phase de chauffage par micro-ondes des espèces en bois de quatre essences de bois soient le peuplier faux-tremble (*Populus tremuloides*), le bouleau blanc (*Betula papyrifera*), le bouleau jaune (*Betula alleghaniensis*) et l'érable à sucre (*Acer saccharum*).

### 3. Plan du mémoire

Pour atteindre l'objectif visé, l'équation d'énergie est exprimée sous la forme d'enthalpie volumique. Ensuite, la méthode des éléments finis 3D a été appliquée pour analyser et estimer le temps de chauffage de quatre espèces de bois. Pour le calcul de l'énergie dissipée dans le matériau, le théorème de *Poynting* ainsi que les équations de Maxwell sont considérés.

Une discrétisation basée sur une formulation intégrale faible de l'équation de conservation de l'énergie avec terme source radiatif a été appliquée. La solution est approchée par une méthode d'interpolation isoparamétrique de Galerkin sur des éléments 3D linéaires. Pour la stabilité de la méthode, un schéma mono pas implicite, qui est inconditionnellement stable, est utilisé (*Reddy, 1993; Zienkiewicz et Taylor, 2000*).

Le choix du matériau bois dans cette étude est justifié par son utilisation croissante dans les emballages et les installations d'emmagasiner. Dans ce travail, les propriétés thermophysiques et diélectriques des matériaux bois sont supposées dépendantes de la température et de l'humidité. Pour la modélisation du transfert radiatif, on a considéré l'hypothèse d'un transfert radiatif unidirectionnel à l'intérieur du matériau selon la loi de Beer-Lambert.

Ce mémoire est subdivisé en trois parties :

Dans le premier chapitre, l'aspect théorique du transfert de chaleur avec changement de phase dans un milieu continu est abordé ainsi que la formulation de l'équation de la conservation de l'énergie en termes d'enthalpie volumique. Ensuite, une attention particulière est consacrée à la formulation tridimensionnelle de l'équation enthalpique par la méthode des éléments finis. La formulation intégrale et la discrétisation spatiale et temporelle seront abordées. Ensuite, la validation analytique et numérique des modèles 3D et 1D transitoires et stationnaires suivra.

Dans le deuxième chapitre, on expose les formes différentielles des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère. Ensuite, avec des hypothèses appropriées aux

matériaux bois, le terme source radiatif des micro-ondes (divergence de flux) sera déterminé. Ce terme est essentiel pour le calcul de l'énergie dissipée dans le matériau par la méthode exposée dans le chapitre 1. L'hypothèse de la diffusion unidirectionnelle à l'intérieur du matériau, avec utilisation de la loi de Beer-Lambert, est considérée. Des validations analytique et expérimentale sont considérées.

Dans le troisième chapitre, on expose les quatre espèces de bois concernées par la modélisation ainsi que leurs propriétés thermo-physiques et diélectriques. Une analyse comparative suivra (pour une fréquence de 2466 Mhz des micro-ondes et un teneur d'humidité de 131 %) sur les évolutions des températures.

Pour clôturer, une synthèse est présentée ainsi que les perspectives et les extensions possibles.

## CHAPITRE I : DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE ET MISE EN ÉQUATIONS

Dans ce chapitre, l'accent est mis d'une part, sur les équations qui gouvernent le transfert de chaleur avec changement de phase dans un milieu absorbant et, d'autre part, sur la formulation 3D par la méthode des éléments finis de type Galerkin. Pour le changement de phase, nous considérons une formulation basée sur l'enthalpie volumique.

### I.1. Transfert de chaleur avec changement de phase d'un milieu continu

Dans les milieux physiques, les transferts de chaleur sont la conséquence, en général, de trois mécanismes : la conduction, le rayonnement et la convection. En conséquence, le calcul des champs de température ne peut se faire que par un couplage de ces trois modes de transfert et la réponse transitoire en température est alors donnée par la résolution de l'équation de la chaleur. Toutefois, lorsque le milieu subit un changement de phase (liquide et solide), la résolution numérique est plus délicate à cause de la présence d'une ou de plusieurs frontières communes aux phases solide et liquide (régions de fusions). En général, pour ce type de problème, on trouve deux approches : résoudre les équations d'énergies pour chacune des phases liquide et solide en tenant compte de la frontière mobile (interface solide-liquide) ou utiliser une approche en terme d'enthalpie, qui à notre avis, plus appropriée au problème de changement de phase. Effectivement, la fonction enthalpie est physique et est bien défini autant pour la phase solide que liquide.

Nous supposons que l'interface  $\Gamma$  entre les phases solide ( $\Omega^-$ ) et liquide ( $\Omega^+$ ) du milieu matériel puisse être décrite en terme d'une fonction régulière  $F(x,y,z,t)$  de la façon suivante (*Hu et Argyropoulos, 1995; Erchiqui, 2000*) :

$$\Gamma = \{(x, y, z, t) \in \Omega \times (0, \tau) / F(x, y, z, t) = 0\} \quad (\text{I.1.a})$$

$$\Omega^+ = \{(x, y, z, t) \in \Omega \times (0, \tau) / F(x, y, z, t) > 0, T(x, y, z, t) \geq T_l = 0\} \text{ (liquide)} \quad (\text{I.1.b})$$

$$\Omega^- = \{(x, y, z, t) \in \Omega \times (0, \tau) / F(x, y, z, t) < 0, T(x, y, z, t) \leq T_s = 0\} \text{ (solide)} \quad (\text{I.1.c})$$

$$\text{avec : } \Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^- = \Omega \times (0, \tau) \text{ et } 0 \leq t \leq \tau \quad (\text{I.1.d})$$

En utilisant une formulation basée sur la température, les deux équations d'énergies qui gouvernent les deux milieux solide et liquide s'écrivent, en absence de mouvements convectifs:

$$\rho(T_s)C(T_s)\frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (K(T_s)\nabla T_s), \text{ pour } F(x, y, z, t) < 0 \quad (\text{I.2})$$

$$\rho(T_l)C(T_l)\frac{\partial T_l}{\partial t} = \nabla \cdot (K(T_l)\nabla T_l), \text{ pour } F(x, y, z, t) > 0$$

$\rho$  et  $c_p$  sont respectivement la masse volumique et la chaleur spécifique du matériau. Les phases solide et liquide sont séparées par l'interface  $\Gamma$ , définie par l'équation suivante :

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{I.3})$$

Les conditions frontières, dites conditions de Stéfan (*Hu et Argyropoulos, 1995*), permettent de tenir compte du saut d'énergie entre les deux phases :

$$T_s(x, y, z, t) = T_l(x, y, z, t) \text{ pour } F(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{I.4})$$

$$K(T_s)\nabla T_s \cdot \nabla F - K(T_l) \cdot \nabla F = -\rho \cdot L \frac{\partial F}{\partial t} \text{ pour } F(x, y, z, t) = 0$$

### 1.1.1. Formulation en enthalpie volumique de l'équation d'énergie

L'avantage d'utiliser une formulation basée sur l'enthalpie plutôt que sur la température permet d'éliminer simultanément le dédoubleage de l'équation d'énergie et les conditions de Stéfan. Pour cela, considérons la définition suivante de l'enthalpie volumique (*Nedjar, 2002*):

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^T \rho(T)c_p(T)dT \quad (I.5.a)$$

$T_{ref}$  est une température de référence. L'allure de l'enthalpie dépend fortement du type de matériau, mais il faut faire la différence entre deux situations distincts : i) cas où le changement de phase se passe dans un intervalle  $[T_S \ T_l]$ , où  $T_S$  et  $T_l$  sont respectivement les températures de solide et de liquide. Dans ce cas l'enthalpie est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(T) = \int_{T_{ref}}^T \rho(T)c_s(T)dT, \text{ pour } T \leq T_S \\ H(T) = \int_{T_{ref}}^{T_S} \rho(T)c_s(T)dT + \int_{T_S}^T \rho(T)\frac{\partial L}{\partial T}dT, \text{ pour } T_S < T \leq T_l \\ H(T) = \int_{T_{ref}}^{T_S} \rho(T)c_s(T)dT + \rho(T)L + \int_{T_l}^T \rho(T).c_l(T)dT, \text{ pour } T > T_l \end{array} \right\} \quad (I.5.b)$$

Dans le deuxième cas : ii) le changement de phase se fait à une température constante, donc l'enthalpie exhibe une discontinuité à la température  $T_m = T_l = T_S$  de fusion, et elle est définie comme suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(T) = \int_{T_{ref}}^T \rho(T)c_s(T)dT, \text{ pour } T \leq T_m \\ H(T) = \int_{T_{ref}}^{T_m} \rho(T)c_s(T)dT + \rho(T)L + \int_{T_m}^T \rho_f(T)c_l(T)dT, \text{ pour } T > T_m \end{array} \right\} \quad (I.5.c)$$

Dans ce mémoire, pour le chauffage du bois, nous pouvons considérer d'une façon tout à fait naturelle, une variation de la masse volumique et de la chaleur massique avec la température selon l'une ou l'autre des deux formules ci-dessus. Le zéro de l'enthalpie est défini à la température du solide saturé.

Pour obtenir une forme différentielle de l'équation d'énergie en fonction de l'enthalpie volumique H, considérons la règle de Leibniz sur la dérivation sous signe intégral :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \rho(T)c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I.6})$$

et la définition de la transformée de Kirchhoff de la conductivité thermique  $\chi(k)$  :

$$\chi(K) = \theta(T) = \int_{T_{ref}}^T K(T) dT \quad \forall T \quad (\text{I.7})$$

En réutilisant la règle de Liebniz, le gradient de la transformée devient :

$$\vec{\nabla} \theta = \frac{d\theta}{dT} \vec{\nabla} T = K(T) \vec{\nabla} T \quad (\text{I.8})$$

Nous déduisons de (I.6)-(I.8) une seule équation en conduction valable pour les deux phases du matériau:

$$\frac{\partial H(T)}{\partial t} = \nabla^2 \theta(T) + Q_{rad} \quad (\text{I.9})$$

Cette équation est valable pour les deux phases, où maintenant toutes les propriétés thermiques varient avec la température. Comme l'exige les équations ci-dessus, nous devons, dans un premier temps, exprimer la chaleur massique, la masse volumique et la conductivité thermique en fonction de la température et par la suite, selon les équations (I.8) et (I.9), exprimer l'enthalpie et la transformée de Kirchhoff en fonction de la température.

Dans l'équation (I.9) on a ajouté le terme source  $Q_{rad}$ , associé aux micro-ondes. Comme, on va le voir dans le chapitre II, ce terme source radiatif est donné par la formule suivante :

$$Q_{rad} = -Re\{\nabla \cdot \mathbf{S}\} \quad (\text{I.10})$$



$\mathbf{S}$  étant le vecteur *Poynting* et  $\text{Re}$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe. Le vecteur  $\mathbf{S}$  décrit la densité du flux radiatif associé à la propagation de l'onde électromagnétique et dissipée dans le milieu matériel:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathcal{H}^* \quad (\text{I.11})$$

$\mathbf{E}$  et  $\mathcal{H}^*$  représentent respectivement le champ électrique et le conjuguée du champ magnétique  $\mathcal{H}$ . Dans ce travail nous considérons un chauffage isotrope. Pour compléter le problème, ajoutons à l'équation (I.9) la condition de frontière suivante :

$$K\nabla T \cdot \mathbf{n} + h(T - T_\infty) - q \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.12})$$

$h$  est le coefficient d'échange de chaleur par convection et  $T_\infty$  est la température du milieu ambiant (air). Le terme  $h(T - T_\infty)$  représente le transfert de chaleur par convection à partir du matériau vers le milieu ambiant. Le flux de chaleur incident dépend de la configuration de la source et de la position du matériau. La formule (I.12) en termes de  $\theta$  s'écrit :

$$K\nabla\theta \cdot \mathbf{n} + h(T - T_\infty) - q \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.13})$$

### I.1.2. Formulation intégrale faible

Résoudre analytiquement l'équation de la conservation de l'énergie consiste à chercher une solution une fois différentiable par rapport aux coordonnées spatiales. Pour la plupart des problèmes physiques, y compris celui du transfert radiatif et sous certaines conditions, une telle tâche s'avère difficile, voire même impossible. On montre souvent l'existence et l'unicité d'une solution, mais on ne connaît pas son expression. La méthode des éléments finis propose d'approcher la solution exacte, à priori inconnue, par une solution dont la singularité est moins forte que celle de la solution exacte (*Zienkiewicz et Taylor, 2000*). En général, pour obtenir une telle formulation intégrale, on multiplie l'équation de l'énergie (dite forme forte) par une fonction

test  $\Phi$ , appartenant à un certain espace fonctionnel  $V$  (Reddy, 1993), puis on intègre sur tout le domaine physique. On obtient alors la formulation intégrale. Ainsi, pour déterminer le champ de température qui vérifie l'équation d'énergie (sous forme d'enthalpie volumique), on va établir en trois dimensions pour l'équation (I.9) la forme intégrale faible associée. Pour cela considérons l'opérateur  $L$  tel que :

$$L(T) = \left( \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla^2 \theta \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{I.14})$$

La pondération de l'équation (I.14) par les fonctions  $\Phi$  donne :

$$W = \int_{\Omega} \left[ \Phi(x, y, z) \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla^2 \theta \right\} \right] d\Omega = 0 \quad (\text{I.15})$$

où  $\theta$  est dérivable deux fois et satisfait les conditions aux limites. L'intégration par partie de (I.15) permet l'obtention de la forme intégrale suivante:

$$W = \int_{\Omega} \left[ \Phi(x, y, z) \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial z} \right] d\Omega - \oint_{\Gamma} \Phi(x, y, z) \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{I.16})$$

L'ordre de dérivées des fonctions  $\Phi(x, y, z)$  et  $\theta(x, y, z)$  dans la forme intégrale ci-dessus est diminué de 1 et les fonctions  $\Phi(x, y, z)$  et  $\theta(x, y, z)$  sont supposées alors d'être dérivable seulement une fois. Nous avons maintenant les termes de contours sur  $\Gamma$ , ceci nous permet alors d'utiliser la condition du flux (I.13) sur la surface  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial n} = \nabla \theta \cdot n = \left( K \frac{\partial T}{\partial x}, K \frac{\partial T}{\partial y}, K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot n = -q_n \text{ sur } \Gamma \quad (\text{I.17})$$

La forme intégrale faible s'écrit alors :

$$W = \int_{\Omega} \left[ \Phi(x, y, z) \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial z} \right] d\Omega + \oint_{\Gamma} \Phi(x, y, z) q_n d\Gamma \quad (\text{I.18})$$

### I.1.3. Fonctionnelle de l'équation de conductivité thermique

L'opérateur L possède une fonctionnelle. En effet, en choisissant comme fonction de pondération  $\Phi = \delta H$ , il vient pour (I.18) la forme suivante:

$$W = \int_{\Omega} \left[ \delta H \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(\delta H)}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial(\delta H)}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial(\delta H)}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] d\Omega + \oint_{\Gamma} \delta H \cdot q_n d\Gamma = 0 \quad (\text{I.19})$$

Si nous définissons une fonctionnelle J sous la forme :

$$J = \int_{\Omega} \left[ H \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] d\Omega + \oint_{\Gamma} H q_n d\Gamma \quad (\text{I.20})$$

Nous pouvons alors vérifier que :

$$\delta J = W = 0 \quad (\text{I.21})$$

Donc une solution H qui annule W, rend stationnaire la fonctionnelle J; celle-ci est minimale ou maximale selon que la seconde variation de  $\delta^2 J$  est positive ou négative pour cette solution  $\theta$ .  $\Omega$  est une région bornée dans l'espace  $R^3$  et  $\Gamma$  est la surface fermée de  $\Omega$ .

## I.2. Formulation par éléments finis de la fonctionnelle de la structure

Dans le paragraphe précédent, on a formulé l'équation de transfert de chaleur sous forme variationnelle. Dans cette partie nous appliquons la méthode des éléments finis. À ce stade, il est important de distinguer le traitement numérique du domaine physique par rapport à celui de temps, relativement au problème de transfert de chaleur.

### I.2.1 Discrétisation par éléments finis

Une solution approchée de l'équation variationnelle (I.21), est obtenue en subdivisant le domaine physique en sous domaines élémentaires (éléments finis) :

$$\int_{\Omega_s} (*) d\Omega_s = \sum_{\text{Elements } \Omega_s^e} \int_{\Omega_s^e} (*) d\Omega_s \text{ et } \oint_{\Gamma_s} (*) d\Gamma_s = \sum_{\text{Elements } \Gamma_s^e} \int_{\Gamma_s^e} (*) d\Gamma_s \quad (\text{I.22})$$

Chaque élément fini est alors caractérisé par un ensemble de nœuds et à partir desquels on interpole les variables physiques ou mathématiques. Dans notre cas, se sont les variables enthalpie volumique (H) et la transformée de Kirchhoff ( $\theta$ ).

Choisissons comme variable, dans le milieu physique, le vecteur enthalpie volumique H. Sur un élément donné du maillage, on aura l'interpolation suivante sur le vecteur enthalpie élémentaire  $\{H\}^{el}$ :

$$\{H\}^{el} = [N] \cdot \{H^n\}^e \quad (\text{I.23})$$

[N] est la matrice d'interpolation nodale (contenant les fonctions de forme) et  $\{H^n\}^e$  est le vecteur enthalpie volumique nodal élémentaire. La dimension de chacune de ces matrices dépend du nombre de nœuds formant l'élément fini.

Pour notre problème, interpolons  $H$  et  $\theta$  sur un élément de référence de type hexaédrique à huit noeuds:

$$H(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^8 H_i^e(t) N_i^e(x, y, z) \quad \theta(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^8 \theta_i^e(t) N_i^e(x, y, z) \quad (I.24)$$

avec :

$$N_i^e(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} \cdot (1 - \xi_i \cdot \xi) \cdot (1 - \eta_i \cdot \eta) \cdot (1 - \zeta_i \cdot \zeta), \quad i = 1, 8 \quad (I.25)$$

où  $N_i$  sont les fonctions d'interpolations.  $\xi, \eta,$  et  $\zeta$  sont les coordonnées locales et  $\xi_i, \eta_i,$  et  $\zeta_i$  sont les coordonnées du nœud  $i$  associé à un élément de référence donnée. Sous forme matricielle, l'équation (I.24) s'écrit :

$$H(x, y, z, t) = \{N(x, y, z)\}^T \{H(t)\}^e \quad \theta(x, y, z, t) = \{N(x, y, z)\}^T \{\theta(t)\}^e \quad (I.26)$$

Il vient alors pour la fonctionnelle  $J$  sur un élément hexaédrique 'e' :

$$\begin{aligned} \{\delta J\}^e = \int_{\Omega} \left[ \{\delta H^e\}^T \cdot (\{N\} \cdot \{N\}^T)^e \cdot \left\{ \frac{dH}{dt} \right\}^e + \{\delta H^e\}^T \cdot ([B]^T \cdot [B])^e \cdot \{\theta\}^e \right] d\Omega \\ + \oint_{\Gamma} \{\delta H^e\}^T \cdot \{N\} \cdot q_n \, d\Gamma \end{aligned} \quad (I.27)$$

$$\text{avec : } [B] = \{\mathbf{D}\} \{N\}^T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \{N\}^T \quad (I.28)$$

Sous une forme matricielle, la relation (I.26) s'écrit :

$$\{\delta J\}^e = \{\delta H^e\}^T [C]^e \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\}^e + \{\delta H^e\}^T [K]^e \{\theta\}^e + \{\delta H^e\}^T \{Q\}^e \quad (\text{I.29})$$

et la stationnarité du fonctionnelle J nous permet d'obtenir au niveau élémentaire la formule suivante:

$$\{W\}^e = [C]^e \cdot \left\{ \frac{dH}{dt} \right\}^e + [K]^e \cdot \{\theta\}^e + \{Q\}^e \quad (\text{I.30})$$

$$\text{avec :} \quad (\text{I.31})$$

$$[C]^e = \int_{\Omega} (\{N\} \cdot \{N\}^T)^e d\Omega \quad (\text{I.32})$$

$$[K]^e = \int_{\Omega} ([B]^T \cdot [B])^e d\Omega \quad (\text{I.33})$$

Si on considère l'existence d'une interpolation quadratique de la transformée de Kirchhoff vis-à-vis de l'enthalpie volumique :

$$\{\theta\}^e = \{A_0\} + [A_1] \cdot \{H\}^e + [A_2] \cdot \{H^2\}^e \quad (\text{I.34})$$

Il vient alors pour (I.29):

$$\{W\}^e = [C]^e \cdot \left\{ \frac{dH}{dt} \right\}^e + [\bar{K}]^e \cdot \{H\}^e + [G]^e \cdot \{H^2\}^e - \{R\}^e + \{Q\}^e \quad (\text{I.35})$$

où  $[\bar{K}]^e$  et  $[G]^e$  sont des matrices de capacité thermique. Ces matrices dépendent de  $[K]^e$ ,  $\{A_0\}$ ,  $[A_1]$  et  $[A_2]$ .

L'assemblage des matrices élémentaires conduit au système d'équations différentielles:

$$[C] \cdot \left\{ \frac{dH}{dt} \right\} + [\bar{K}] \cdot \{H(t)\} + [G] \cdot \{H^2(t)\} = \{R\} + \{Q\} \quad (\text{I.36})$$

ou  $[C]$  est la matrice globale de capacité thermique,  $[\bar{K}]$  et  $[G]$  sont les matrices globales de conductivité thermique et  $\{R\}$  est le vecteur des sollicitations.

Finalement, la solution du problème (I.36) est dictée par la résolution du système (I.36) sous la forme suivante :

$$\left\{ \frac{dH}{dt} \right\} + [C]^{-1} \cdot [\bar{K}] \cdot \{H\} + [C]^{-1} \cdot [G] \cdot \{H^2\} = [C]^{-1} \cdot (\{R\} + \{Q\}) \quad (\text{I.37})$$

### 1.2.2 Expression du flux

Pour le calcul du flux, nous considérons la relation (I.17) et l'expression intégrale du flux associé à la formule (I.30) :

$$\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial n} = \nabla \theta \cdot n = \left( K \frac{\partial T}{\partial x}, K \frac{\partial T}{\partial y}, K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot n = -q_n \text{ sur } \Gamma_n \quad (\text{I.38})$$

$$\{Q\}^e = \oint_{\Gamma_n} \{N\} \cdot q_n \, d\Gamma_n \quad (\text{I.39})$$

$$q_n = q_c + q_r \quad (\text{I.40})$$

$$q_n = h(T - T_\infty) + q_r \quad (\text{I.41})$$

$q_c$  et  $q_r$  sont respectivement des flux de type conduction et radiation.  $h$  est le coefficient d'échange de chaleur par convection et  $T_\infty$  est la température du milieu ambiant (air). Le terme  $h(T - T_\infty)$  représente le transfert de chaleur par convection à partir du matériau vers le milieu ambiant. Le flux de chaleur incident dépend de la configuration de la source et de la position du matériau. Soulignons que le coefficient de convection dépend autant de la température que de l'état de la surface du milieu matériel ( $h$  dépend de  $(\Gamma, T)$ ).

### I.2.3 Matrice de capacité thermique

L'application de la méthode de Galerkin produit une matrice de capacité thermique bandée. La transformation de cette matrice bandée en une matrice diagonale peut offrir deux grands avantages. Le premier est une diminution de l'espace requis pour conserver cette matrice; le second est la facilité de l'inverser. Les éléments  $c_{ij}$  de la matrice  $[C]$  seront remplacés par les éléments  $c'_{ij}$  définis par :

$$c'_{ii} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \quad , i = \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{I.42})$$

### I.2.4 Schéma implicite d'intégration du temps

Dans ce travail, le schéma mono-pas implicite d'intégration en temps est utilisé (*Dokainish et Subbraj, 1989*). Dans ce cas, l'équation (I.37), après réarrangement des termes, devient :

$$(\hat{K}_{n+1} + \hat{G}_{n+1}) \cdot H_{n+1} = \hat{K}_n \cdot H_n + \hat{G}_n \cdot H_n^2 + \hat{R}_{n,n+1} \quad (\text{I.43})$$

Où  $\hat{K}$ ,  $\hat{G}$  et  $\hat{R}$  sont les matrices globales modifiées.  $H_{n+1}$  est le vecteur nodal global des enthalpies à l'instant  $t_{n+1}$ . Pour la stabilité de la méthode, nous considérons le schéma de Crank-Nicolson (*Dokainish et Subbraj, 1989*).

## I.3. Validation analytique et numérique

La mise en œuvre informatique de la formulation enthalpique, établie ci-dessus, par la méthode des éléments finis a été validée et est intégrée dans le code numérique ThermoForm (Simulateur développé par le professeur Erchiqui de l'UQAT pour l'analyse en plasturgie et bioplasturgie). Toutefois, dans cette partie, on démontre la fiabilité de cette méthode, par comparaison, d'une part, avec des solutions analytiques 1D (Carslaw et Jaeger, 1986; Annexe 1)



et numériques 2D. Ensuite, pour différent maillage 2D et 3D (Q4 : quadrilatère à quatre nœuds, T3 : triangle à trois nœuds, TET4 : tétraèdre à quatre nœuds et Hex8 : hexaèdre à huit nœuds). Le milieu solide considéré pour la validation est une plaque semi-infinie d'aluminium (longueur = 2 m, largeur = 0.5 m, épaisseur = 0.5 m) soumise à différents types de conditions aux limites :

- Température imposée du côté gauche de la plaque
- Flux imposé du côté gauche de la plaque
- Perte par convection du côté gauche de la plaque
- Génération de chaleur à l'intérieur de la plaque
- Solidification d'une plaque semi-infinie

Pour la validation, les propriétés thermo-physiques de l'aluminium considérées constantes :

- Chaleur spécifique  $C_p = 903 \text{ J/Kg. } ^\circ\text{C}$
- Conductivité thermique  $K = 237 \text{ W/m. } ^\circ\text{C}$
- Masse volumique  $\rho = 2702 \text{ Kg/m}^3$

### **I.3.1 Validations analytique 1D-numérique 2D**

Pour la validation analytique (1D) vis-à-vis les résultats numériques (2D), nous avons considéré, pour la plaque semi-infinie, le maillage illustré sur la figure 1 ci-dessous (180 éléments de type Q4) :

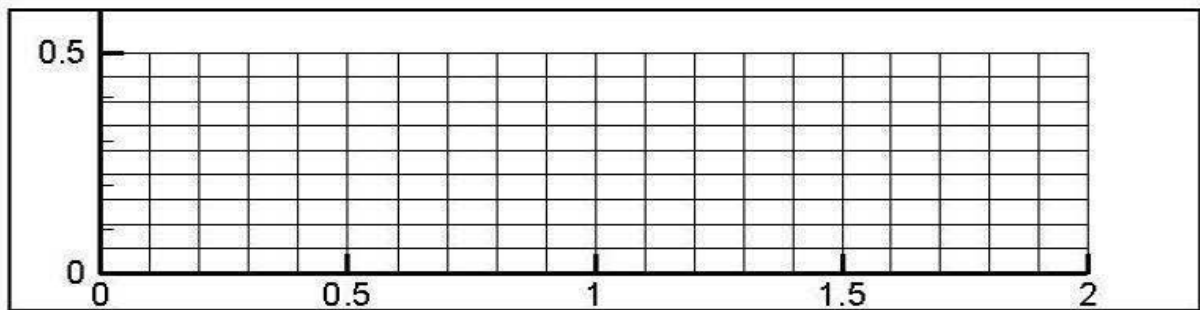


Figure 1 : Maillage numérique de la plaque semi-infinie.

#### I.3.1.1 Température imposée

La température imposée en côté gauche de la plaque est  $20^{\circ}\text{C}$ , et les frontières de la plaque sont adiabatiques. Sa température initiale est  $10^{\circ}\text{C}$ , le temps de chauffage est  $3000\text{ s}$ , et le pas du temps considéré dans la simulation est  $5\text{ secondes}$ .

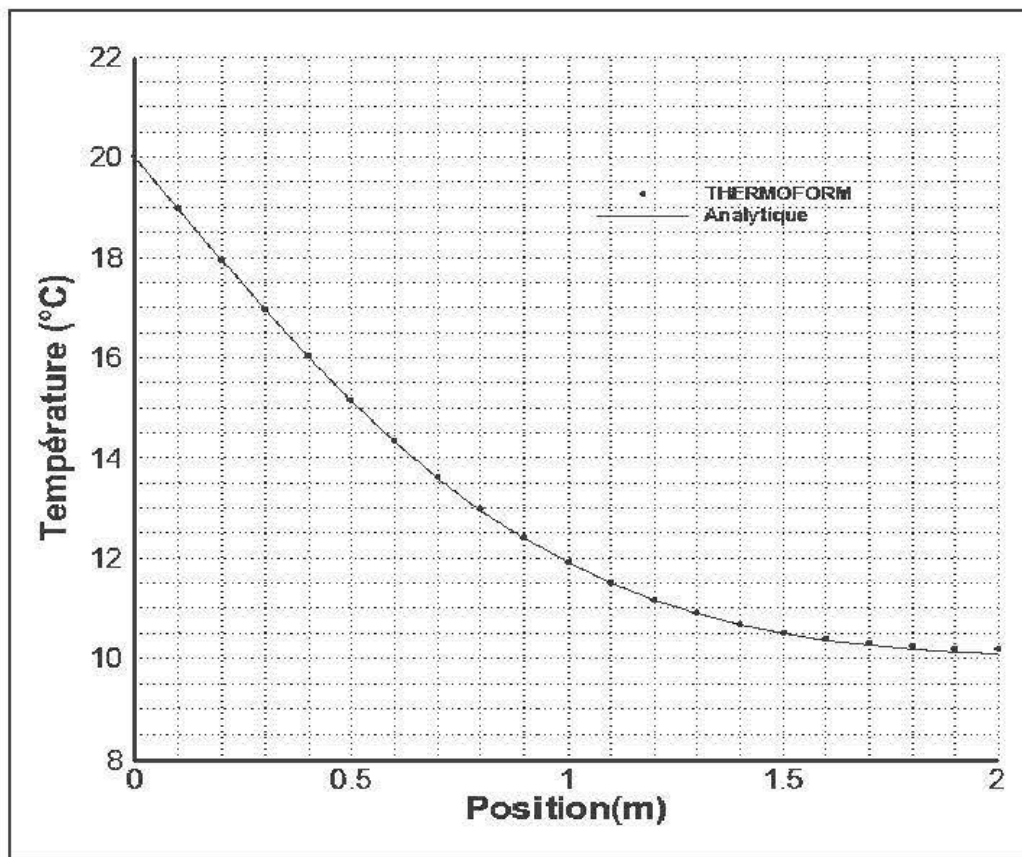


Figure 2 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.

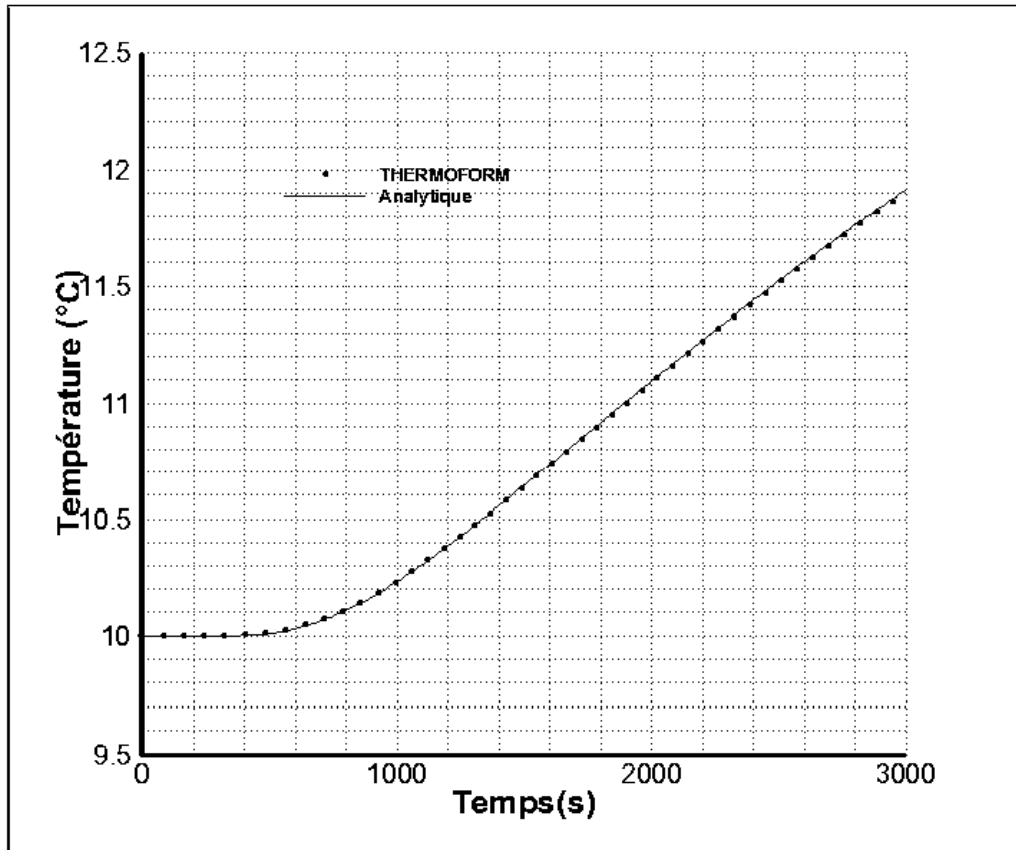


Figure 3 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

### I.3.1.2 Flux imposé

Un flux  $q = -10000 \text{ W/m}^2$  est imposé du côté gauche de la plaque (cas de 2D). Dans le cas 3D le flux imposé est  $q = -10000 \text{ W/m}^3$ , et les frontières de la plaque sont adiabatiques. Sa température initiale est  $10^\circ\text{C}$ , le temps de chauffage est 3000 s, et le pas du temps considéré dans la simulation est 5 secondes.

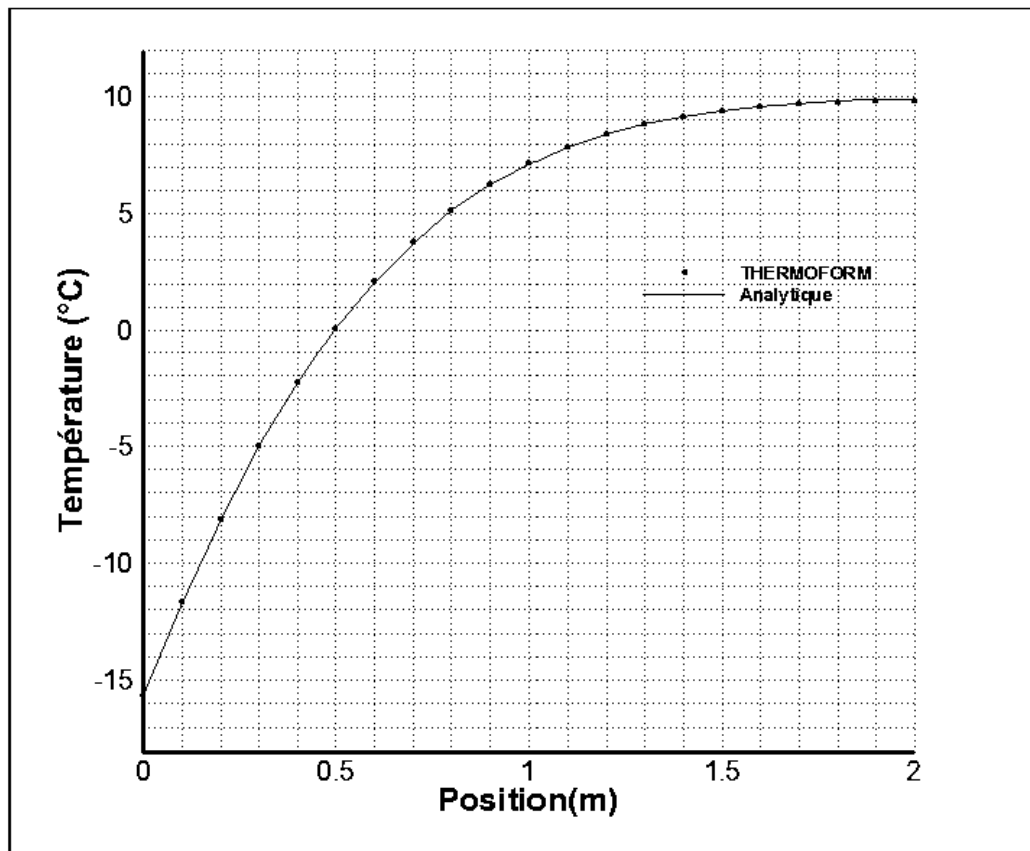


Figure 4 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.

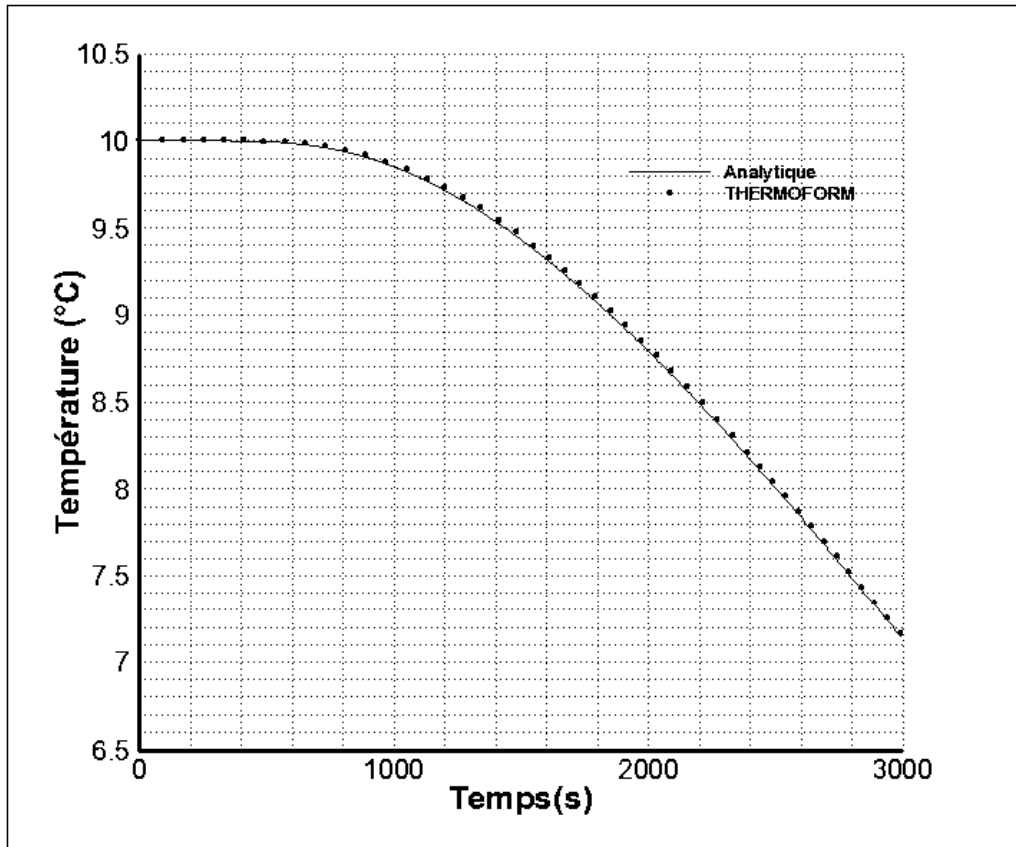


Figure 5 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

### I.3.1.3 Convection

La température ambiante est de  $80^{\circ}\text{C}$ , et le coefficient d'échange par convection est  $h = 150 \text{ W/m}^2$ . La température initiale de la plaque est  $10^{\circ}\text{C}$ , le temps de chauffage est 3000 s, et le pas du temps considéré dans la simulation est 5 secondes.

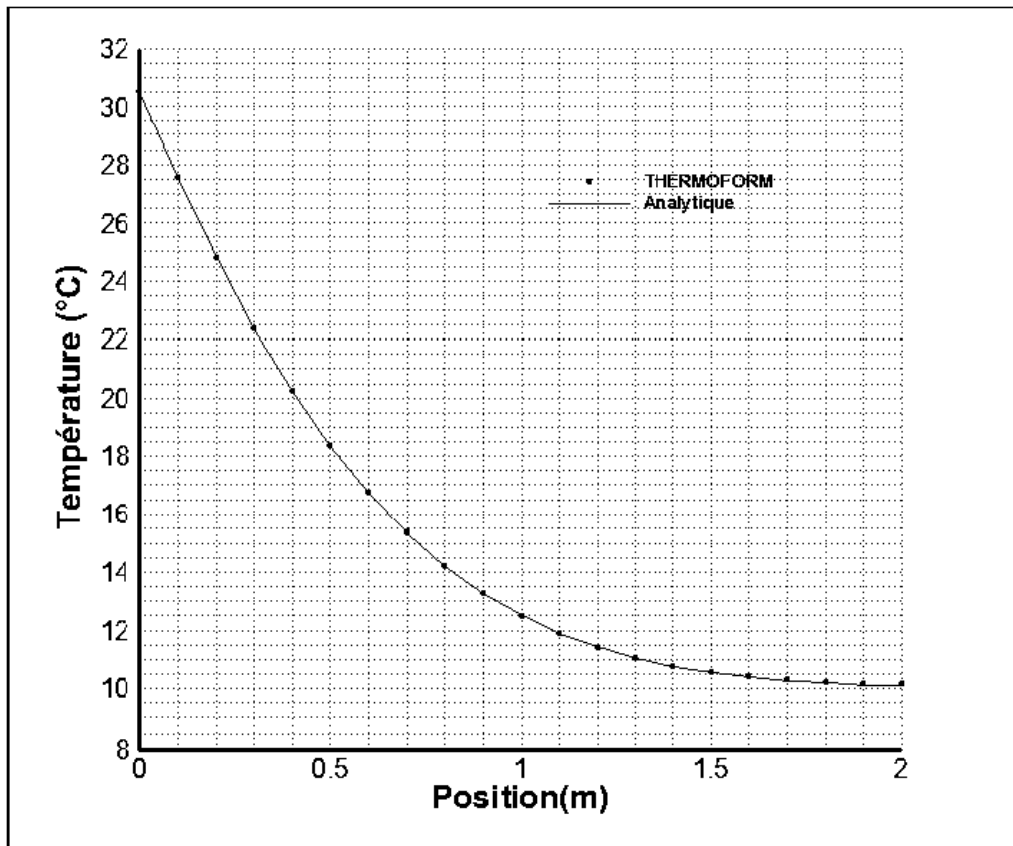


Figure 6 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.

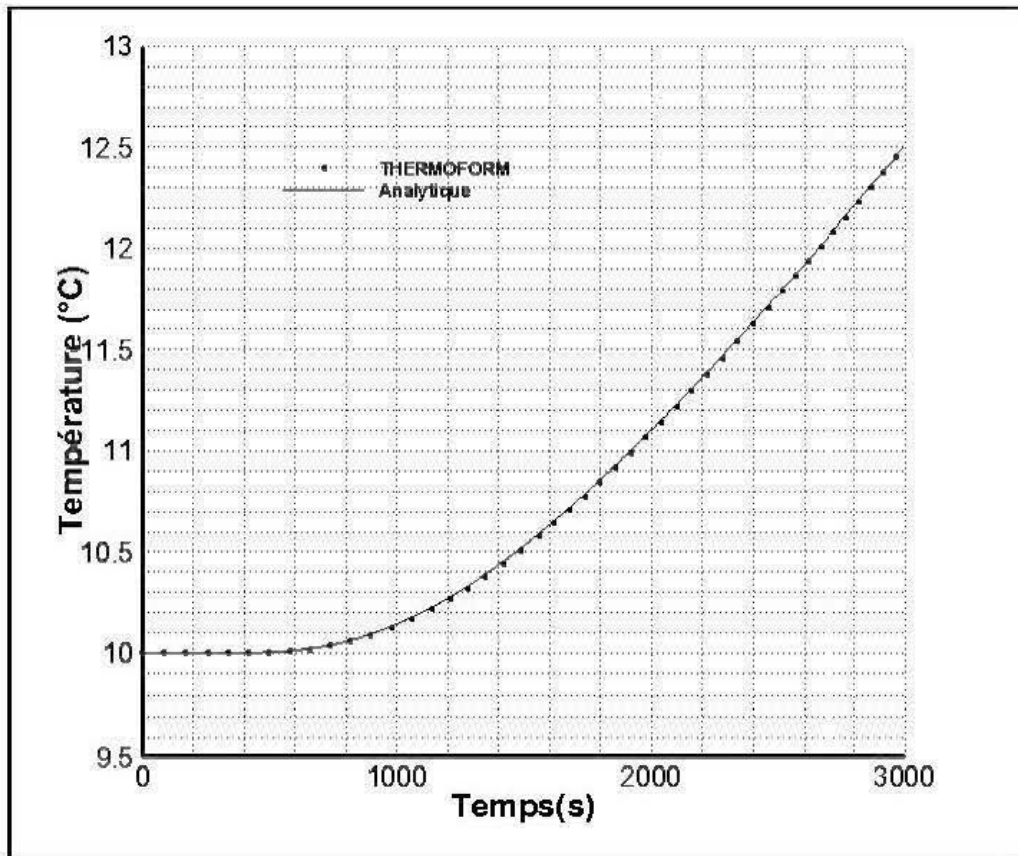


Figure 7 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

#### I.3.1.4 Solidification d'une plaque d'aluminium semi-infinie

La température initiale de la plaque d'aluminium est 726,85 °C (à l'état liquide), au dessus de sa température de fusion 659,85 °C, et la température imposée à la frontière gauche de la plaque est 26,85 °C. Les diffusivités de la plaque dans les états solide et liquide sont respectivement:

$$\alpha_{\text{solide}} = 0.00009713488962 \text{ m}^2/\text{s} \text{ et } \alpha_{\text{liquide}} = 0.00007040224873 \text{ m}^2/\text{s}$$

L'enthalpie latente considérée pour l'aluminium est :  $L=399000 \text{ J/Kg}$



le temps de chauffage est 2000 s, et le pas du temps considéré dans la simulation est 10 secondes.

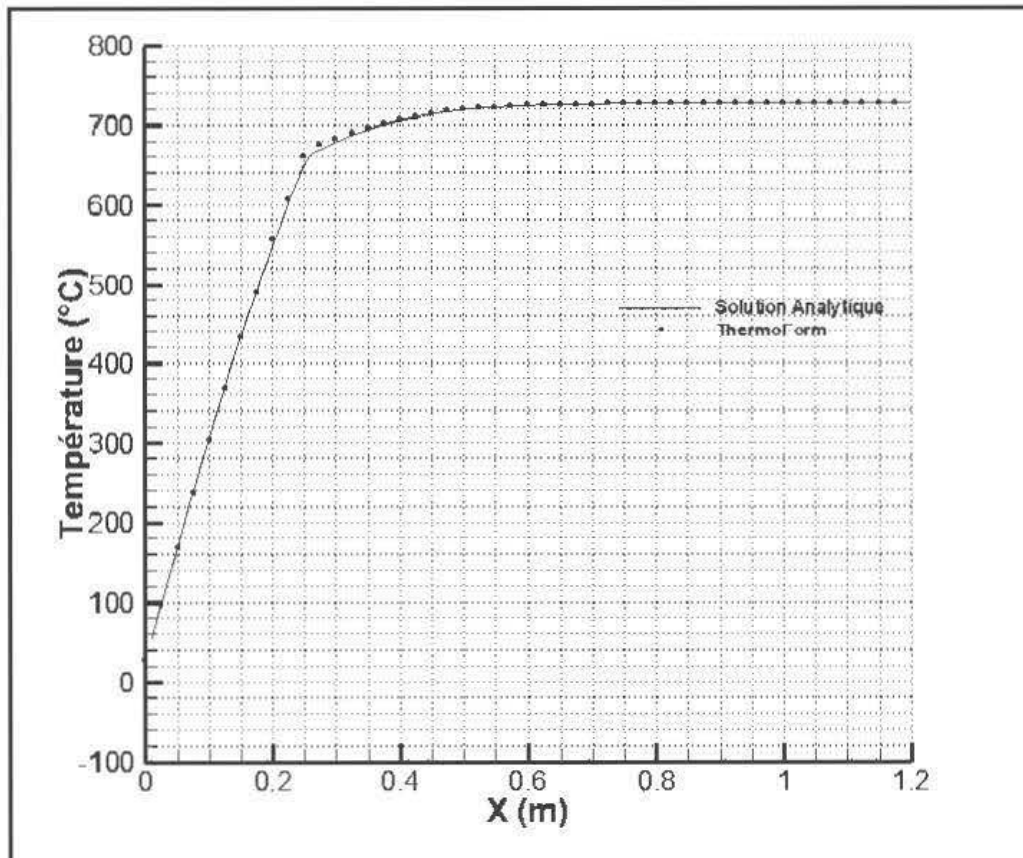


Figure 8 : Distribution de la température à l'instant  $t = 400$  s.

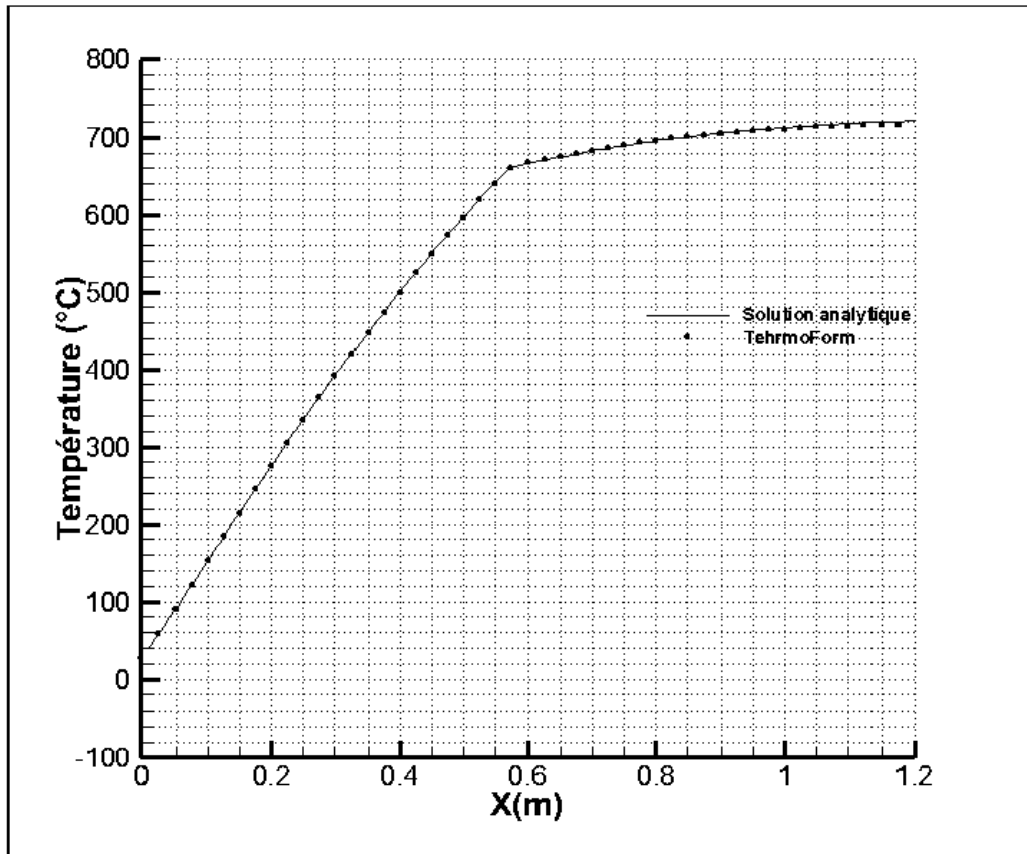


Figure 9 : Évolution de la température à l'instant  $t = 2000$  s.

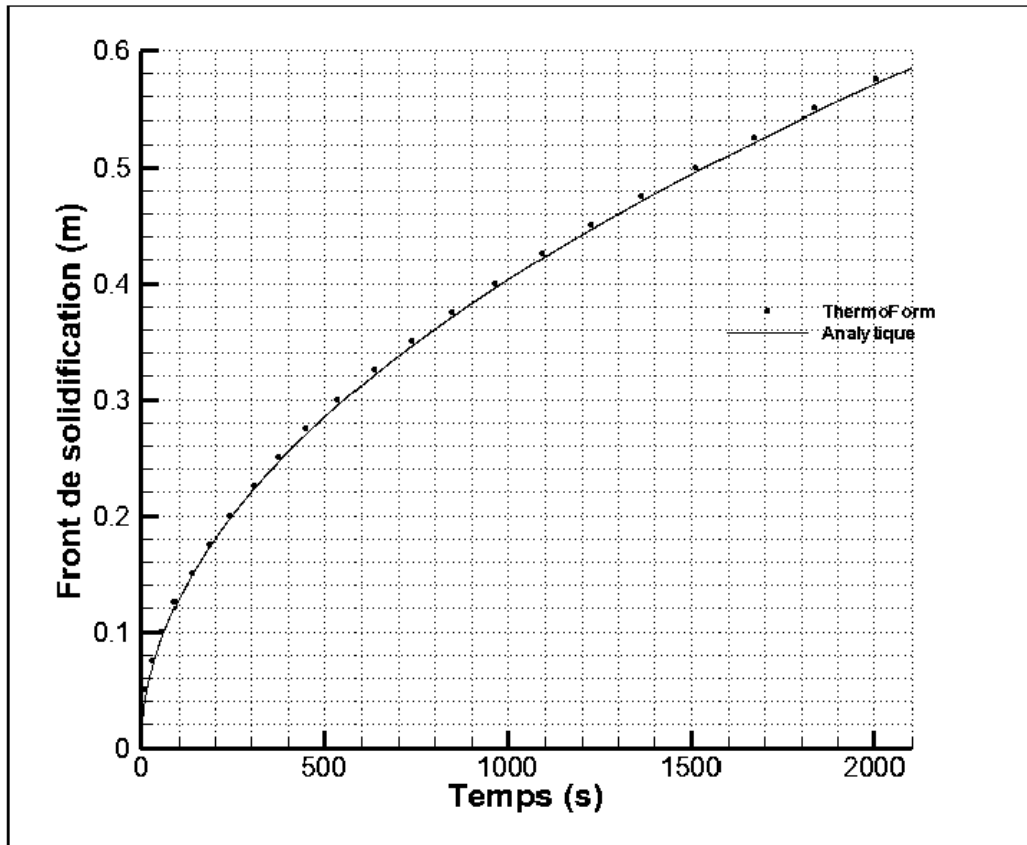


Figure 10 : Front de solidification.

### I.3.2 Validations numérique 2D vis-à-vis 3D

#### I.3.2.1 Température imposée

La température imposée en côté gauche de la plaque est  $20^{\circ}\text{C}$ , et les frontières de la plaque sont adiabatiques. Sa température initiale est  $10^{\circ}\text{C}$ , le temps de chauffage est 3000 s, et le pas du temps considéré dans la simulation est 5 secondes.

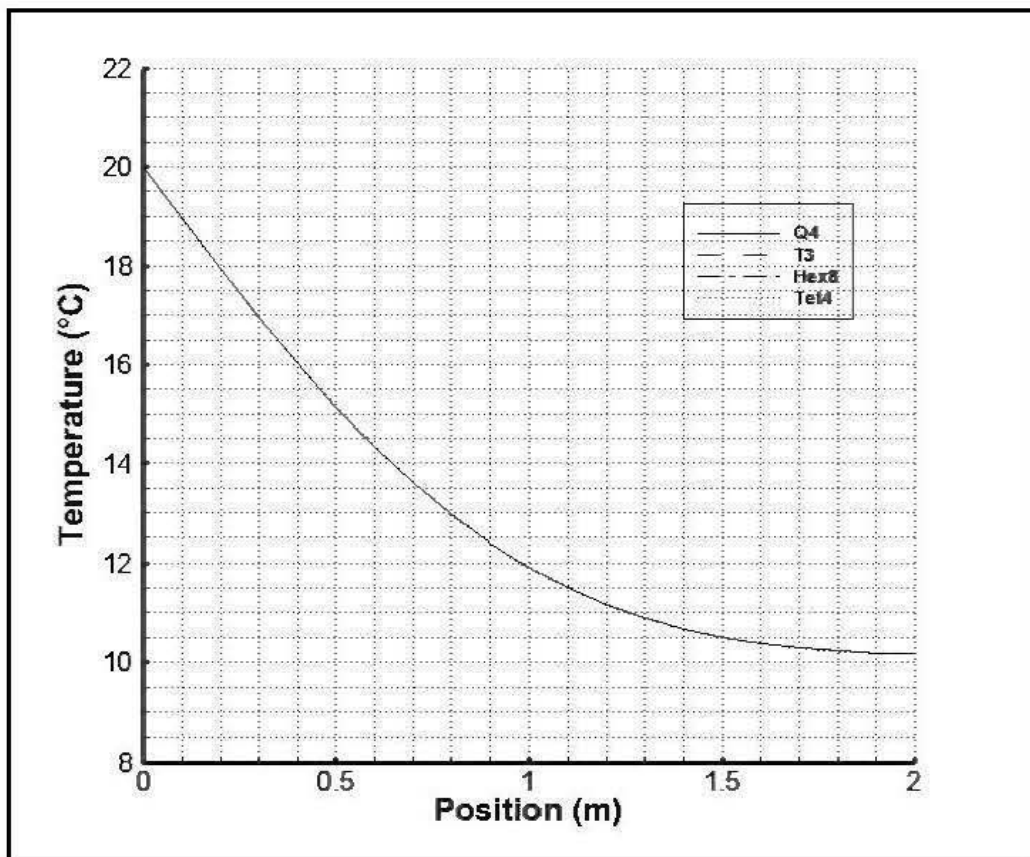


Figure 11 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.

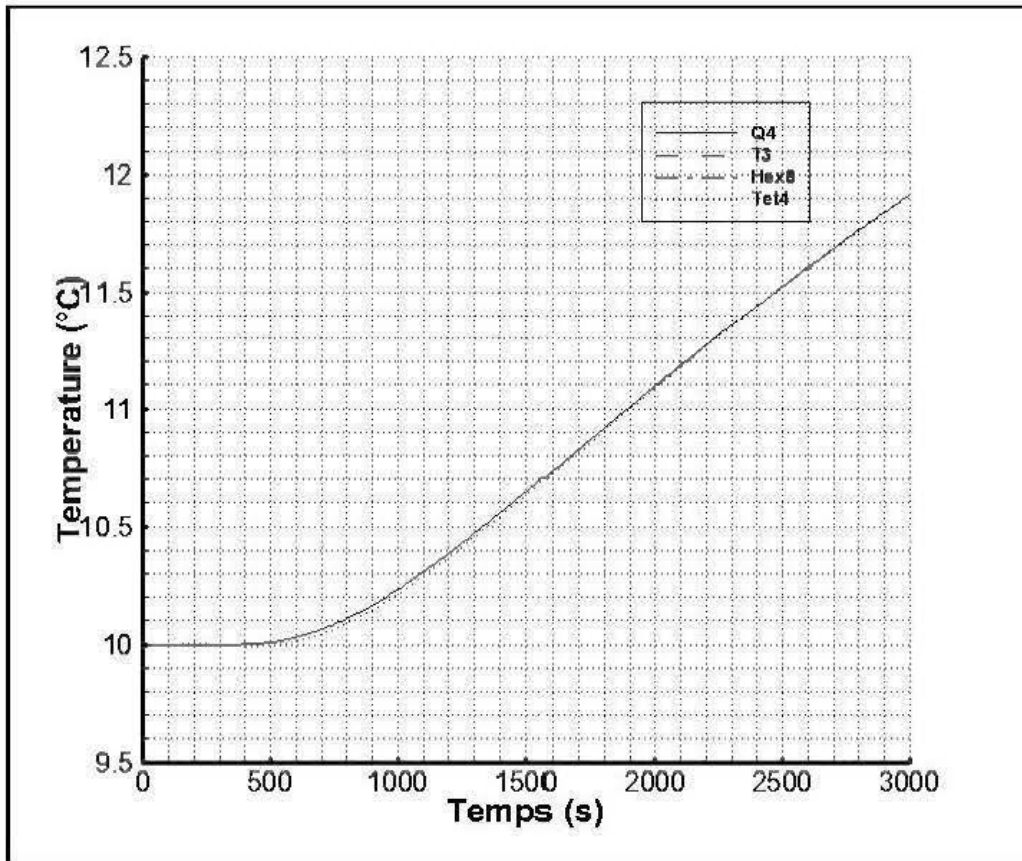


Figure 12 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

### 1.3.2.2 Flux imposé

Un flux  $q = -10000 \text{ W/m}^2$  est imposé du côté gauche de la plaque (cas de 2D). Dans le cas 3D le flux imposé est  $q = -10000 \text{ W/m}^3$ , et les frontières de la plaque sont adiabatiques. Sa température initiale est  $10^\circ\text{C}$ , le temps de chauffage est 3000 s, et le pas du temps considéré dans la simulation est 5 secondes.

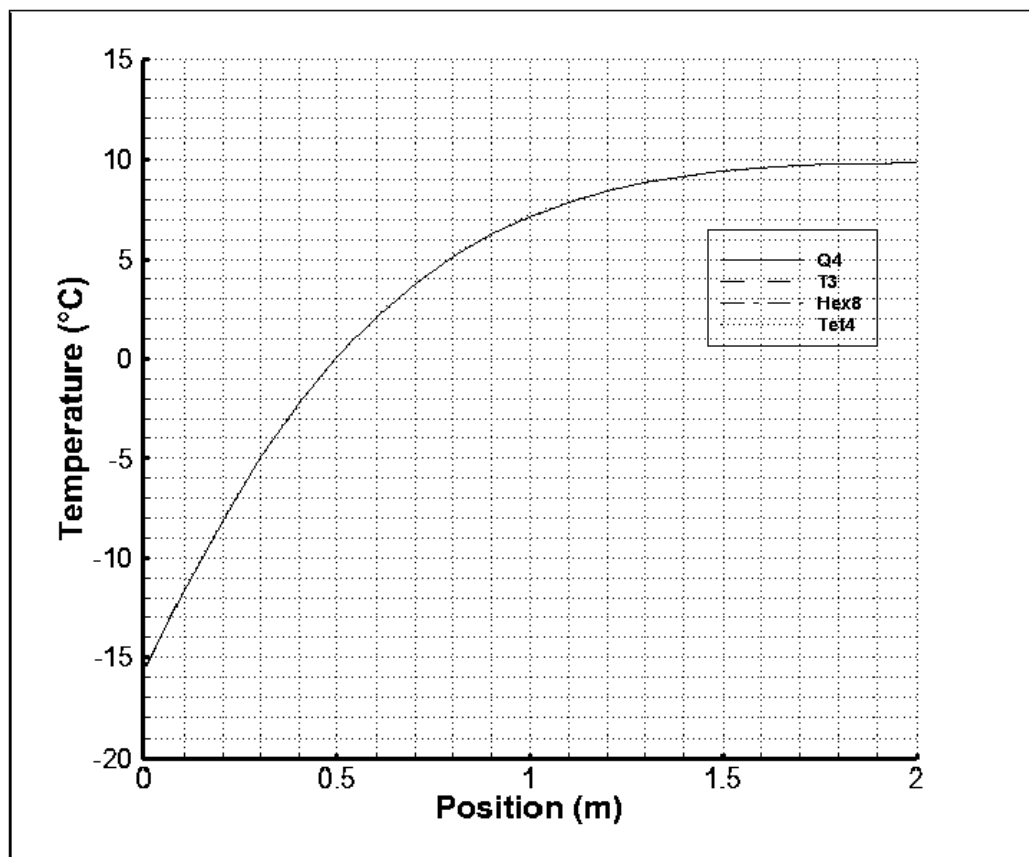


Figure 13 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.

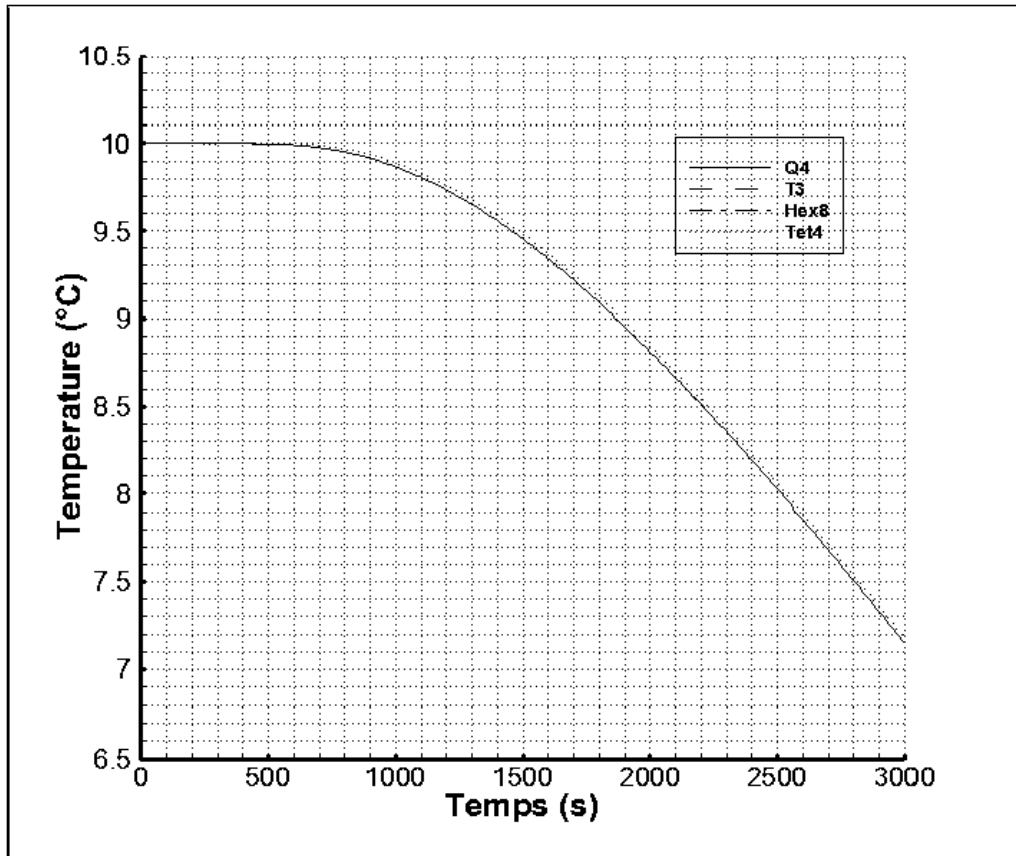


Figure 14 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

### I.3.2.3 Convection

La température ambiante est de 80 °C, et le coefficient d'échange par convection est  $h = 150 \text{ W/m}^2$ . La température initiale de la plaque est 10°C, le temps de chauffage est 3000 s, et le pas du temps considéré dans la simulation est 5 secondes.

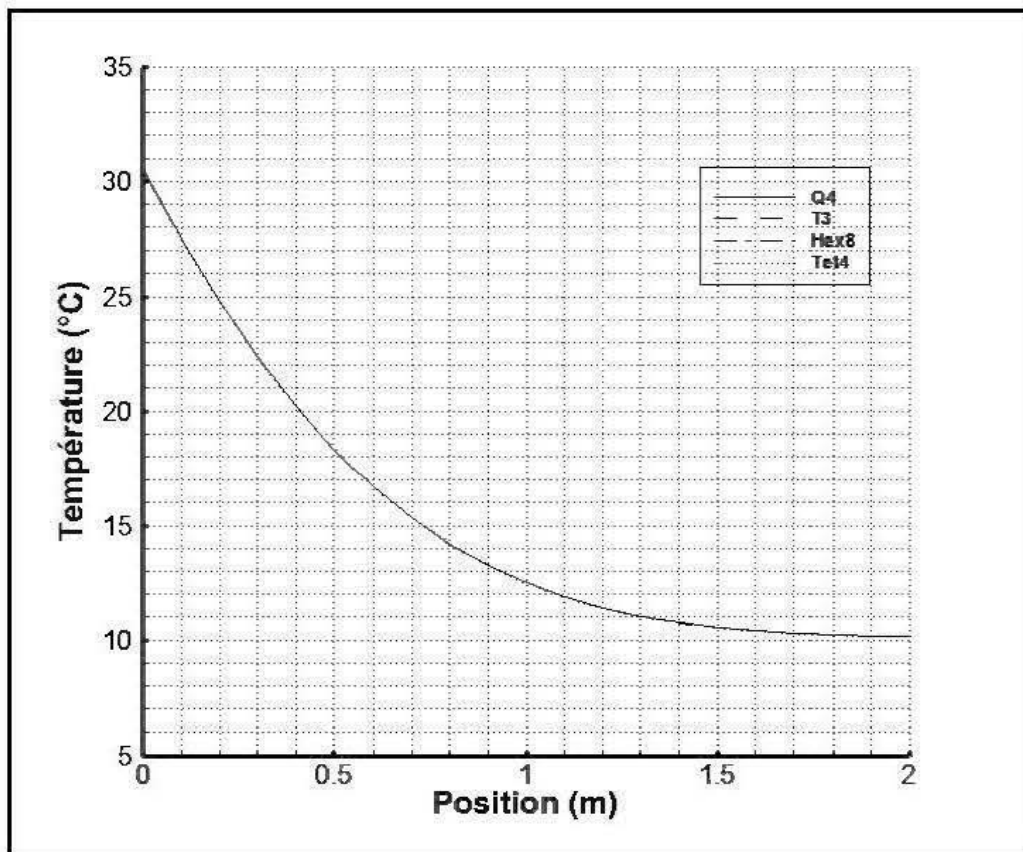


Figure 15 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.



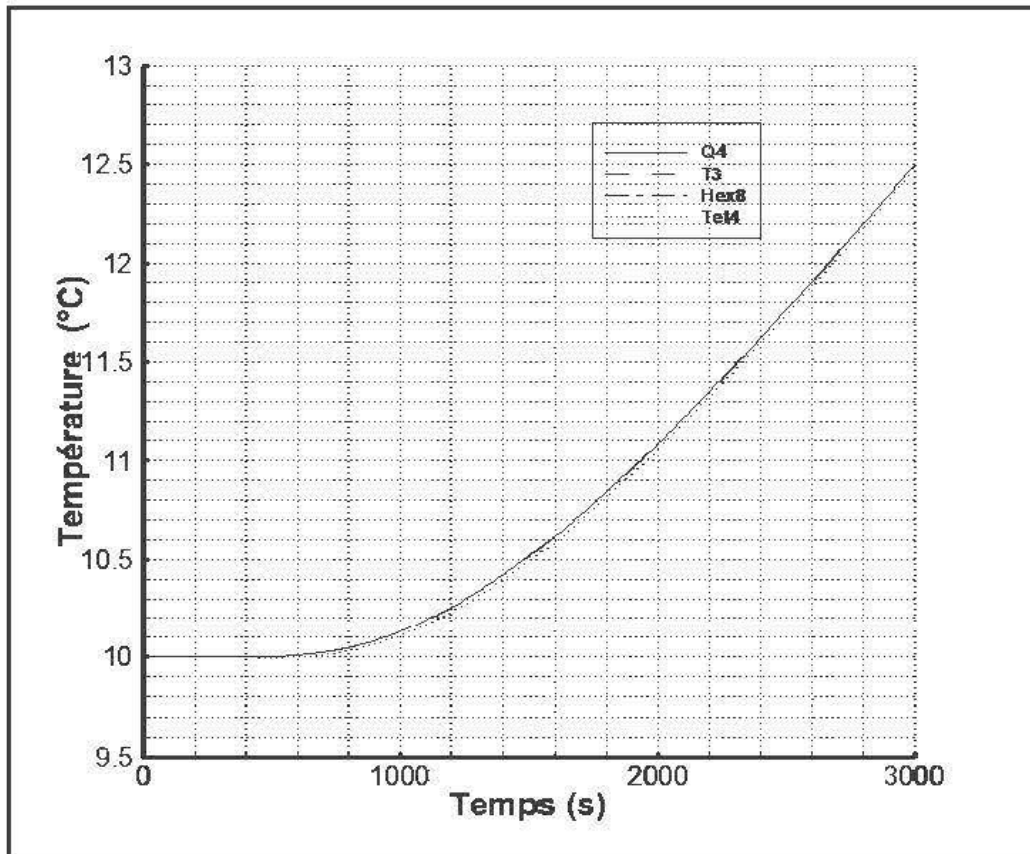


Figure 16 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

#### 1.3.2.4 Génération de la chaleur interne

La Température imposée sur la partie gauche de la plaque d'aluminium est  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , et l'énergie générée supposée constante est  $Q=10000\text{ W/m}^2$  en 2D et  $Q=10000\text{ W/m}^3$  en 3D. Sa température initiale est  $10^{\circ}\text{C}$ , le temps de chauffage est  $3000\text{ s}$ , et le pas du temps considéré dans la simulation est  $5\text{ secondes}$ .

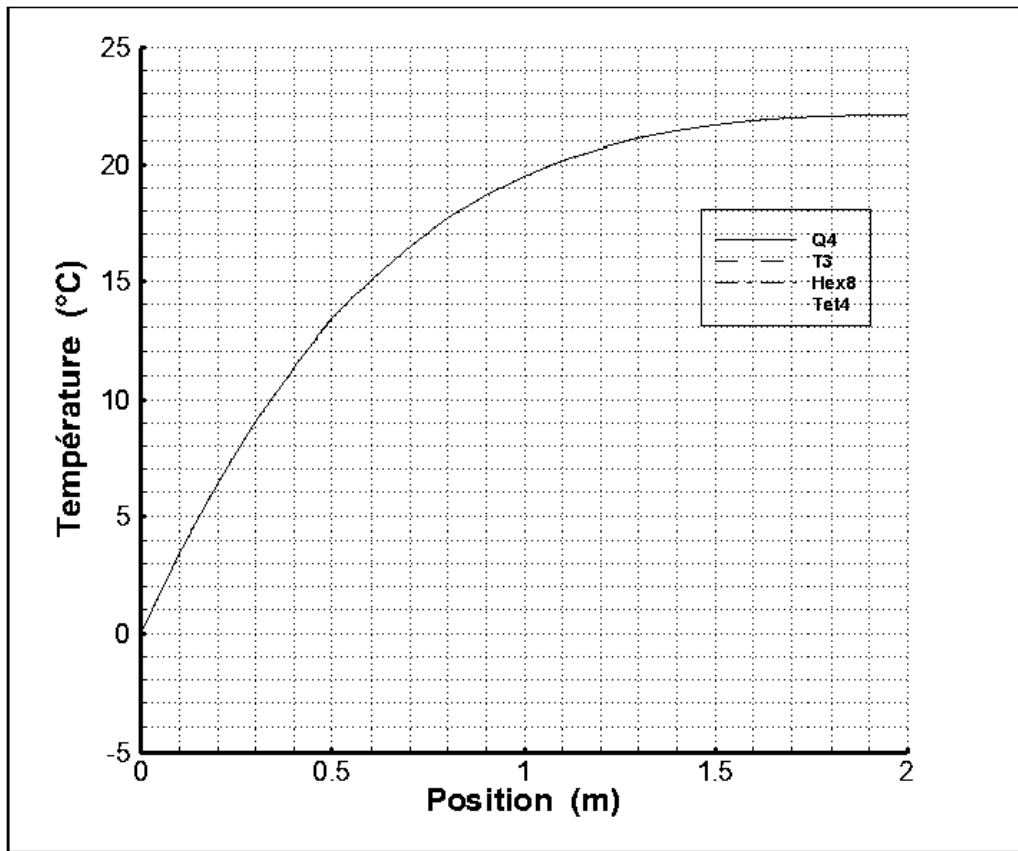


Figure 17 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.

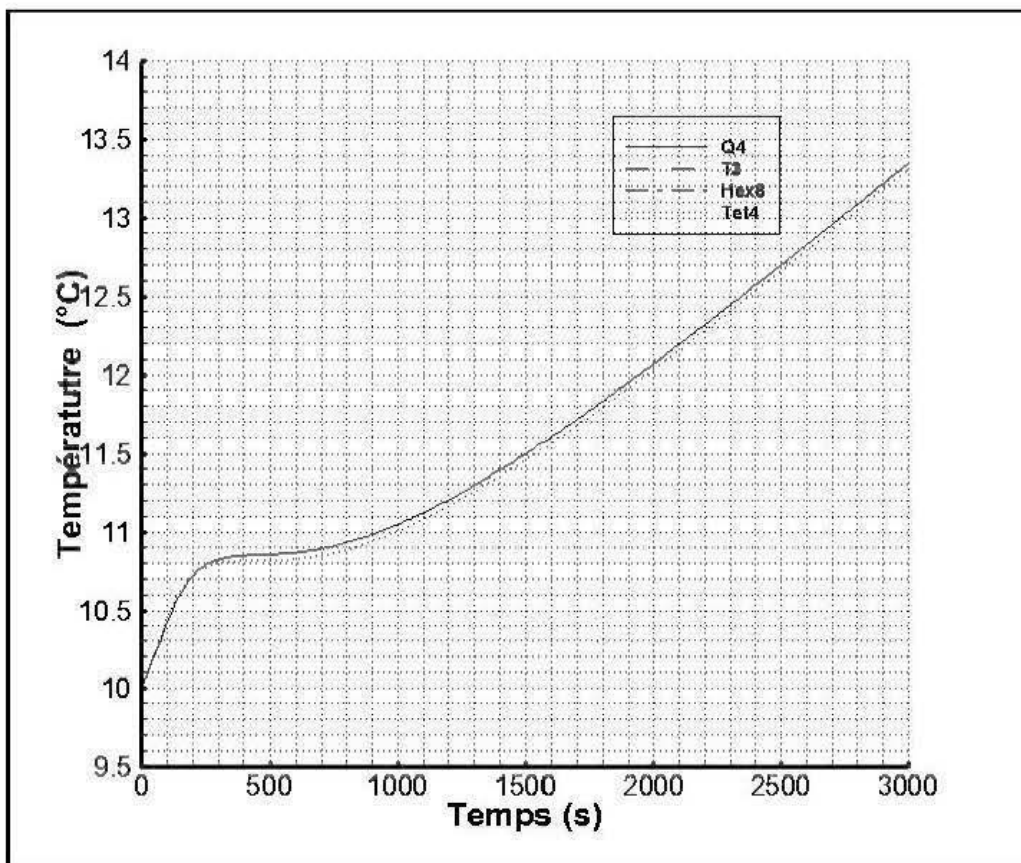


Figure 18 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

### 1.3.3 Conclusion

Les figures 2-18 comparent les résultats obtenus avec les solutions analytiques. Les solutions numériques sont en parfait accord avec les solutions analytiques pour différent maillage 2D et 3D et pour différents types de conditions aux limites.

#### I.4. Validation expérimentale et numérique

Afin de confronter nos résultats numériques vis-à-vis les résultats expérimentaux, on a considéré le cas exposé dans (*Steinhagen, 1977*). Ce test concerne le chauffage d'un tronc de bois de pin blanc d'Amérique immergé dans un bain d'eau à une température constante de 54 °C.

Le tableau 1 illustre les propriétés thermo-physiques de bois (*Steinhagen, 1977*).

<b>Conductivité thermique dans la direction radiale (W/m·°C)</b>	
T < 0	$k = (0.096 + 0.0033 MC - 0.0008 T) \cdot (0.105 + 2.03 SG)$
T > 0	$k = (0.138 + 0.0019 MC - 0.00022 T + 0.000011 MC \cdot T) \cdot (0.105 + 2.03 SG)$
<b>Capacité thermique (J/Kg·K)</b>	
T < 0	$c_p = 2280 + 16.6 T$
T > 0	$c_p = 2000 + 8.71 MC - 0.00022 T + 4.98 T$
<b>Masse volumique (Kg/m<sup>3</sup>)</b>	
$\rho = 1000 Gm \left(1 + \frac{MC}{100}\right)$	
<b>Chaleur latente (J /Kg)</b>	
$L = L_w \left(\frac{MC - 30\%}{MC + 100\%}\right)$	

Tableau 1 : les propriétés thermo-physiques de bois du pin blanc d'Amérique.

$L_w$  est la chaleur latente de fusion de la glace, MC est la teneur en humidité, SG est la densité basale, et Gm est la densité humide.

Nous avons considéré, pour le maillage, des éléments quadrilatères isoparamétriques à 4 nœuds avec 1024 éléments et 1089 nœuds (figure 19).

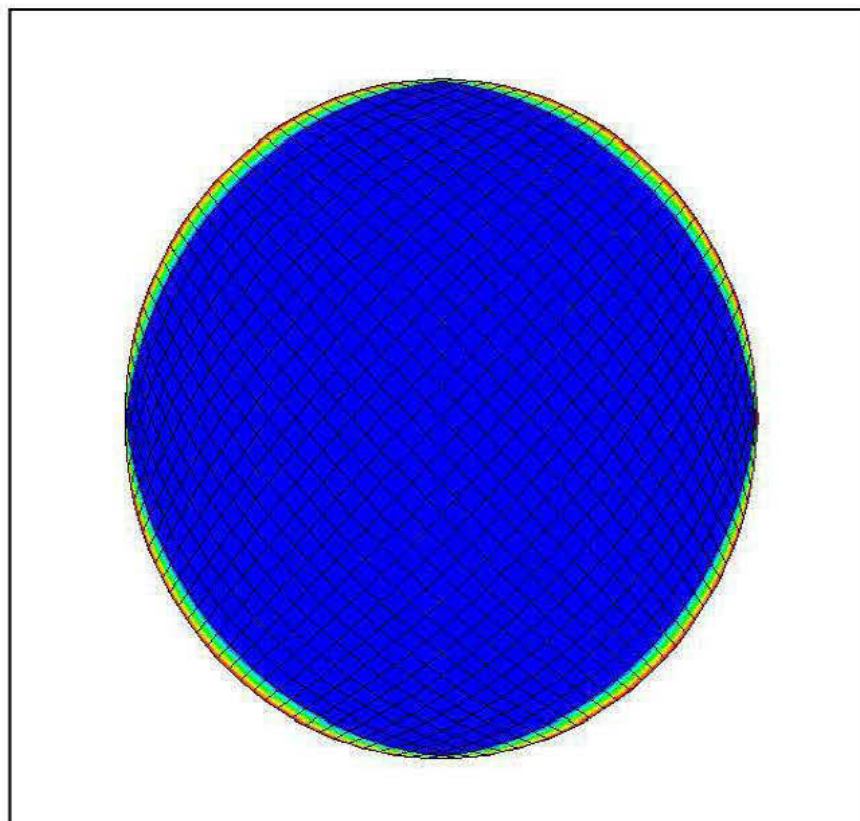


Figure 19 : Géométrie et maillage du domaine.

Le tableau 2 présente les données utilisées dans la simulation.

Teneur en humidité MC	97 %
Densité basale	0.32
Température initiale	-22 °C
Température de l'eau	54 °C
Rayon de tronc	0.23 m
Temps de chauffage	60 heures

Tableau 2 : les données utilisées dans la simulation.

La figure 19 illustre nos résultats numériques obtenus par rapport aux résultats expérimentaux (Steinhagen, 1977). Après 40 heures de chauffage, le bois est complètement décongelé, et la température numérique est légèrement inférieure à la température expérimentale, cette différence est peut être due à la variation des propriétés thermo-physiques de bois, suite par exemple au changement de la teneur en humidité du bois par échange de l'eau entre le bois et le bain d'eau. Toutefois, l'écart relatif entre les résultats numériques et expérimentaux est faible. Cet écart relatif moyen général reste inférieur à 3 %. Finalement, en tenant compte des hypothèses effectuées pour la simulation numérique, nous pouvons considérer dans l'ensemble que ces résultats sont très satisfaisants.

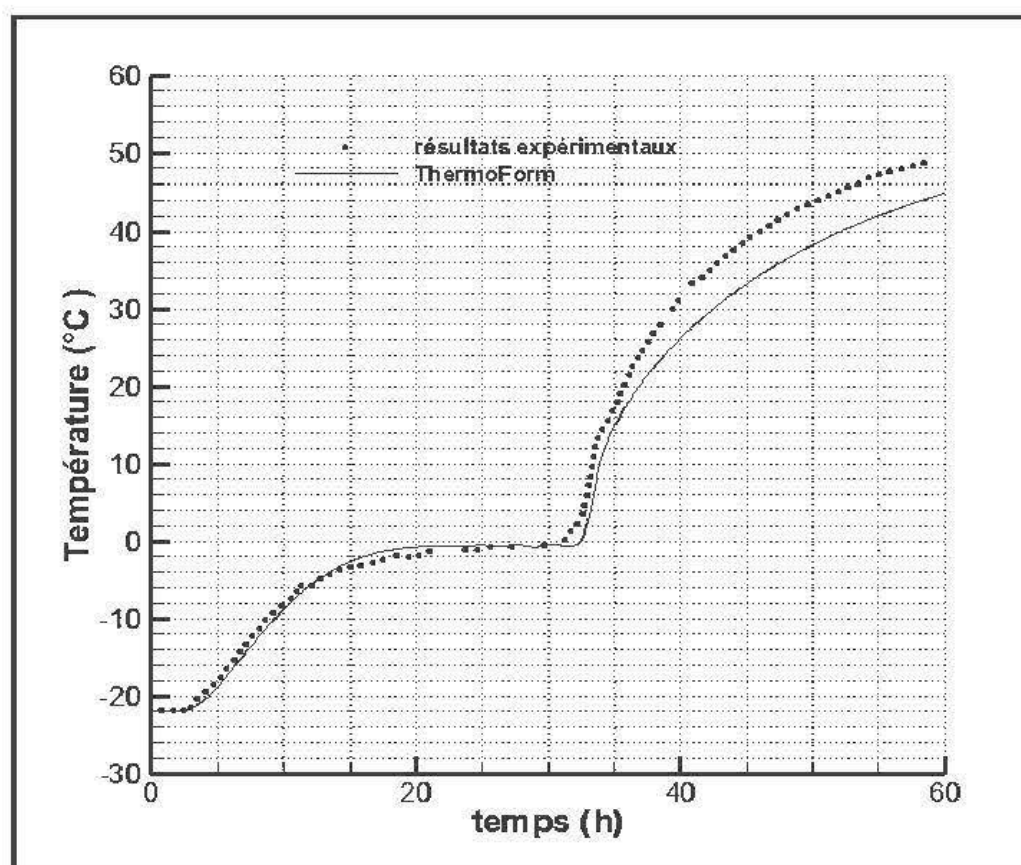


Figure 20 : Évolution de la température au centre du tronc de bois de pin blanc d'Amérique.

## CHAPITRE II : ÉNERGIE DISSIPÉE DANS LE BOIS PAR MICRO-ONDES

L'irradiation par micro-ondes est une technique de chauffage électrique visant à chauffer des matériaux peu conducteurs électriquement et, généralement, thermiquement. Contrairement au chauffage infrarouge, qui essentiellement un phénomène de surface, le chauffage diélectrique permet la production de la chaleur à l'intérieur du matériau et dans un temps plus court. En effet les matériaux de faible conductivité électrique peuvent être chauffés par micro-ondes si leurs molécules possèdent une structure asymétrique. Dans le cas de bois, l'application d'un champ électrique a pour effet d'induire une asymétrie des molécules d'eau (polarisation) présentes dans le matériau. Conséquemment, pour de fréquences particulières, les molécules se frottent et génèrent de la chaleur dans le matériau. Toutefois, il faut souligner que la technique de chauffage par micro-ondes ne peut être applicable au traitement du bois que si elle n'engendre pas une dégradation des propriétés physico- mécaniques du matériau. Dans ce cas, il est essentiel de vérifier que le traitement aux micro-ondes n'entraîne pas des effets négatifs sur les propriétés. Cette remarque ne sera pas considérée dans ce mémoire, seul l'aspect de modélisation numérique sera considéré en tenant compte des propriétés thermo-physique et électriques bien définies.

### II.1 Équations de Maxwell-Faraday-Ampère

Pour déterminer la divergence de flux associé au terme source radiatif, équation (I.10), nous considérons les formes différentielles des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  (ou  $\mathcal{H}$ ) représentent respectivement, le champ électrique, l'induction électrique et le champ magnétique. Dans le cas où le conducteur est non parfait (milieu qui est, à priori, dispersif et la polarisation dépend de la fréquence du champ exciteur) et pour des domaines de pulsation  $\omega$  où la loi d'Ohm est applicable, on a :

$$\mathbf{J} = \sigma(\omega)\mathbf{E}(t) \quad (\text{II.3})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(t) \quad (\text{II.4})$$

$$\mathbf{B} = \mu(\omega)\mathcal{H}(t) \quad (\text{II.5})$$

$\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont respectivement la conductivité, la permittivité et la perméabilité du milieu. Dans le cas d'une pulsation particulière  $\omega$ , les champs électrique et magnétique s'écrivent :

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \exp(-i\omega t) \quad (\text{II.6})$$

$$\mathcal{H} = \bar{\mathcal{H}} \exp(-i\omega t) \quad (\text{II.7})$$

En substituant (II.3- II.5) dans (II.1 et II.2), nous obtenons :

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = i\omega\mu(\omega)\bar{\mathcal{H}} \quad (\text{II.8})$$

$$\nabla \times \bar{\mathcal{H}} = [\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon(\omega)]\bar{\mathbf{E}} \quad (\text{II.9})$$

Dans le matériau bois, la proposition  $\mu(\omega) = \mu_0$  est généralement considérée (*Ayappa et al, 1991*).

De l'équation (II.8) nous déduisons par l'utilisation de l'opérateur  $(\nabla \times)$  :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = i\omega\mu(\omega)\nabla \times \bar{\mathcal{H}} \quad (\text{II.10})$$

Et en tenant compte de l'équation (II.9), on a alors pour (II.10) la formule suivante en termes de  $\mathbf{E}$ :



$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = i\omega\mu(\omega)[\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon(\omega)]\bar{\mathbf{E}} \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, en utilisant la relation vectorielle suivante :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \bar{\mathbf{E}} \quad (\text{II.12})$$

L'équation (II.11) devient :

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \bar{\mathbf{E}} = \omega^2\mu(\omega) \left[ i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} + \varepsilon(\omega) \right] \bar{\mathbf{E}} \quad (\text{II.13})$$

Avec cette hypothèse et l'électro-neutralité de bois (*Ayappa et al, 1991*), c.-à-d :  $\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) = 0$ , nous déduisons de (II.13), l'équation de propagation de l'onde :

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + k^2 \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{II.14})$$

et pour laquelle on a :

$$k^2 = \omega^2\mu_0 \left[ i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} + \varepsilon(\omega) \right] \quad (\text{II.15})$$

Introduisons les définitions des constantes relatives diélectriques  $\kappa'$  et  $\kappa''$  (perte) et de l'angle de perte  $\delta$ :

$$\kappa'(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.16.a})$$

$$\kappa''(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} \quad (\text{II.16.b})$$

$$\tan(\delta(\omega)) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)} = \frac{\kappa''(\omega)}{\kappa'(\omega)} \quad (\text{II.16.c})$$

$\varepsilon'$  est la permittivité relative du matériau (mesure directe de la capacité d'un matériau à être polarisé),  $\varepsilon''$  le facteur de perte correspond aux pertes diélectriques dans le matériau, c'est-à-

dire à sa capacité à dégrader l'énergie électromagnétique en chaleur. L'angle de perte  $\delta$  représente physiquement le déphasage temporel entre les orientations de la molécule polarisée et du champ électrique, suite au frottement. Les définitions données dans (II.16.a)-(II.16.c) nous permettent d'écrire pour (II.15) :

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa' + i\kappa'') \quad (\text{II.17})$$

La partie réelle ( $\alpha$ ) et la partie imaginaire ( $\beta$ ), associées à  $k^2$ , sont reliées aux propriétés diélectriques du milieu, de la fréquence  $f$  de la radiation micro-onde et de la température, par les formules:

$$\alpha(T) = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\frac{\kappa'(T) (\sqrt{1 + \tan^2(\delta(T))} + 1)}{2}} \quad (\text{II.18.a})$$

$$\beta(T) = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\frac{\kappa'(T) (\sqrt{1 + \tan^2(\delta(T))} - 1)}{2}} \quad (\text{II.18.b})$$

Dans les formules (II.18.a)-(II.18.b), on a utilisé les relations :  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$  et  $\omega = 2\pi f$ . On remarque que le paramètre d'atténuation  $\beta$  contrôle la vitesse à laquelle l'intensité du champ électrique incident décroît dans le matériau. Dans le cas d'échantillon semi-infini, l'intensité du champ obéit à l'équation de Beer-Lambert :

$$\bar{E} = E_0 \exp(-\beta z) \quad (\text{II.19})$$

L'équation ci-dessus sera considérée pour l'évaluation de la divergence de flux qui apparaît dans l'équation (I.11).

## II.2 Énergie dissipée dans le bois

La divergence du flux rayonné à l'intérieur dans le matériau peut être obtenue via le théorème de *Poynting* :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = -\frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_0 \kappa'' \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \, d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \left( \frac{\mu_0}{2} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^* + \frac{\varepsilon_0 \kappa'}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) \, d\Omega \quad (\text{II.20})$$

$\Gamma$  est la frontière du milieu matériel, de volume  $\Omega$ , dans lequel l'énergie électrique (partie réelle) et magnétique (partie imaginaire) est emmagasinée. En appliquant le théorème de divergence à (II.20) :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{S} \, d\Omega \quad (\text{II.21})$$

Nous déduisons alors pour (II.20) l'expression suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_0 \kappa'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + i\omega \left( \frac{\mu_0}{2} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^* + \frac{\varepsilon_0 \kappa'}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) \quad (\text{II.22})$$

Finalement, en considérant la partie réelle de (II.22), nous obtenons la divergence de flux dans le matériau bois :

$$Q_{\text{rad}} = -\text{Re}(\nabla \cdot \mathbf{S}) = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_0 \kappa'' |\mathbf{E}|^2 \quad (\text{II.23})$$

En substituant (II.19) dans (II.23), nous déduisons l'expression de la divergence du flux :

$$Q_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_0 \varepsilon'' E_0^2 \exp(-2\beta z) \quad (\text{II.24})$$

Le terme  $\frac{1}{2\beta} = d(T)$  est appelé profondeur de pénétration. Ce terme est d'autant plus petit que le matériau est adapté au chauffage diélectrique.

### II.3 Variation des propriétés diélectriques du bois

Les propriétés diélectriques du bois dépendent à la fois de ses propriétés internes et de la fréquence des micro-ondes. La tendance commune remarquée sur la variation des propriétés diélectriques avec la fréquence des micro-ondes, est que la permittivité relative diminue avec la fréquence, tandis que la tangente des pertes augmente avec la fréquence (*Afzal et al., 2003; Jain et Dubey, 1988; James, 1975; Von Hippel 1959; Nelson, 1973*).

Les propriétés diélectriques du bois dépendent également de la teneur en humidité. Les molécules d'eau créent un fort moment dipolaire et augmente les pertes diélectriques, ce qui en fait un bon candidat pour le traitement à haute fréquence (*Hearmon et Burcham, 1954*). La variation de la chaleur interne change la teneur en humidité, en conséquence, la variation de  $\epsilon''$  avec la teneur en humidité est importante. L'eau liée a une rotation limitée et moins libre que l'eau libre présente dans différentes cavités. Ainsi, celui-ci rend plus possibles les pertes diélectriques. D'autres études arrivent à la même conclusion, en ce qui concerne la variation des propriétés diélectriques avec la teneur en eau (*James et Hamil, 1965; Skaar, 1948; Torgovnikov, 1993*).

Chaque matériau a des courbes différentes pour des ranges de fréquence différentes. En outre, la pente de la courbe  $\epsilon''$  en fonction de la teneur en humidité est importante pour les applications industrielles où la teneur en humidité d'un matériau, en particulier sous forme de feuilles, est le principal objectif (*Hearmon et Burcham, 1954*). Au-dessus d'une valeur critique de l'humidité, les régions humides d'un matériau absorbent plus de puissance et ont tendance à uniformiser la répartition inégale de l'humidité initiale. Au-dessous de la valeur critique, la mise au niveau de l'humidité devient de moins en moins efficace, et  $\epsilon''$  devient presque indépendant de

la teneur en humidité, alors que les différentes parties de la matière absorbent les mêmes quantités d'énergie à haute fréquence (*Hearmon et Burcham, 1954*).

Les variations de la densité du bois existent toujours entre et dans les espèces. Cette variation pourrait avoir un impact significatif sur les propriétés diélectriques du bois (*Nanassy, 1972; Zhou et Avramidis, 1999; Torgovnikov, 1993*). À une teneur en humidité constante, les espèces ayant une grande densité ont une permittivité relative élevée (*Ay et Sahin, 2004*), alors que les espèces avec des densités de bois comparables ont des propriétés diélectriques comparables (*Afzal et al., 2003*).

L'anisotropie du bois influe également sur les propriétés diélectriques de bois (*Torgovnikov, 1993*). L'orientation optimale de champ électrique dans un applicateur micro-ondes peut être déduite des courbes de  $\epsilon''$  en fonction de la teneur en humidité, les pertes sont plus élevées pour l'orientation du champ parallèle au grain (*Resch, 2003*). La constante diélectrique et le facteur de perte du bois pour une teneur en humidité donnée étant plus élevés dans le sens longitudinal (*Daian et al., 2006*). Toutefois, pour trois espèces de l'Est, la direction des grains n'a pas un effet significatif sur les propriétés diélectriques (*Antti, 1999*).

**Remarque :** dans le cas où les propriétés diélectriques du matériau, en plus de la température, dépendent de l'humidité, la formulation en termes d'enthalpie volumique reste toujours valable.

## II.4 Validation numérique

Afin de valider l'approche enthalpique que nous avons présentée dans le chapitre I dans le cas d'un chauffage par micro-ondes, nous avons considéré un flux radiatif de type Beer-Lambert. Ce flux est imposé du côté gauche d'une plaque semi-infinie d'aluminium (dont les propriétés sont données dans le chapitre I). Le flux radiatif considéré est le suivant :

$$Q_{\text{rad}} = 1000 \exp(-10 x) \text{ (W/m}^2\text{)} \quad (\text{II.25})$$

Sa température initiale est  $10^\circ\text{C}$ , et le pas de temps utilisé pour la simulation est 5 secondes. La solution analytique est fournie dans l'annexe A. Les figures 20 et 21 illustrent les qualités des résultats numériques (générés par ThermoForm) vis-à-vis la solution analytique (voir Annexe 1).

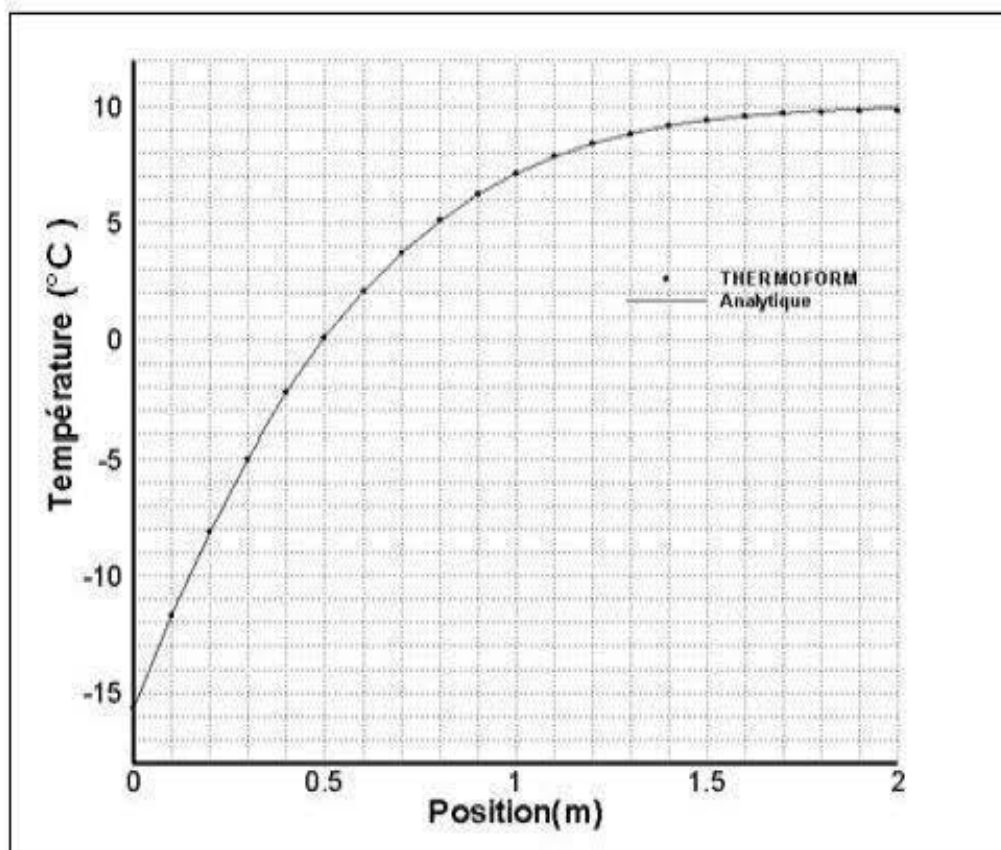


Figure 21 : Distribution de la température à l'instant  $t = 3000$  s.

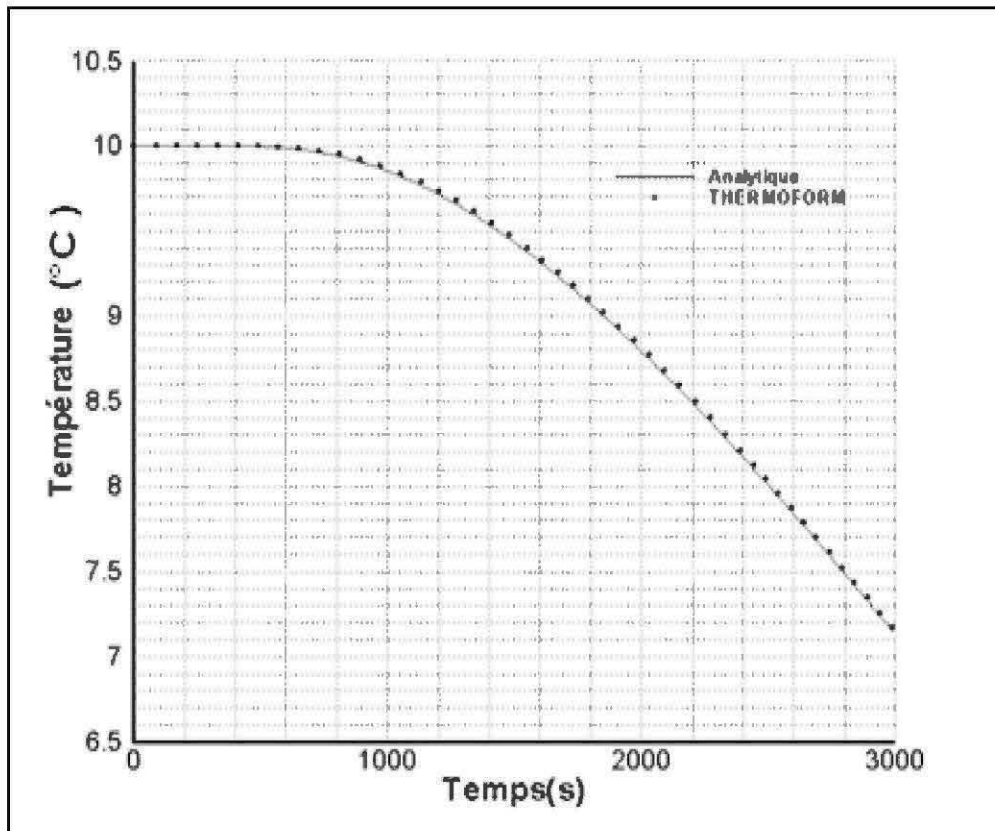


Figure 22 : Évolution de la température au centre de la plaque (1,0.25).

### CHAPITRE III : CHAUFFAGE PAR MICRO-ONDES ET APPLICATIONS

La prédiction de l'évolution de la chaleur dans les composites et particulièrement le bois nécessite des outils expérimentaux et numériques robustes (*Brodie, 2007; Erchiqui, 2000; Steinhagen, 1977*). Dans cette partie, après avoir validé notre approche de modélisation et de simulation de transfert de chaleur dans les solides avec changement de phase, on va étudier le transfert de chaleur par des ondes électromagnétiques (micro-ondes) dans quatre espèces de bois: Le peuplier faux-tremble, le bouleau blanc, le bouleau jaune et l'érable à sucre. Ce choix est justifié par l'utilisation de ces essences pour les palettes de bois et les matériaux d'emballage.

#### III.1 Données expérimentales des propriétés diélectriques

Pour illustrer les effets des propriétés diélectriques sur le temps de chauffage du bois des quatre espèces, il est important de déterminer les profondeurs de pénétration des micro-ondes en fonction de la fréquence, de la température et de l'humidité. À cet effet, Les données expérimentales de la présente étude sont tirées des travaux de (*Koubaa et al. 2008*). Ces données furent mesurées sur des échantillons de bois circulaires de 6 mm extraite de l'aubier de 4 essences soient : le peuplier faux-tremble; le bouleau blanc, le bouleau jaune et l'érable à sucre. Les propriétés diélectriques du bois ont été mesurées à différentes températures et à différentes teneurs en humidité. Le tableau 3 présente une synthèse des données expérimentales que nous avons utilisées pour des fins de modélisation.

T (°C)	$\kappa'$	$\kappa''$	$\tan(\delta)$	d(cm)
<b>Peuplier faux-tremble à une teneur en humidité de 155%</b>				
-20	26,2	6,9	0,26	1
15	26	5	0,19	1,12
24	26,2	4,9	0,19	1,42
39	25,4	3,5	0,14	1,49



48	24,7	3,1	0,12	1,37
58	24	2,6	0,11	1,48
<b>Bouleau blanc à une teneur en humidité de 125%</b>				
-18	22,1	6,6	0,3	1
1	31,3	4,8	0,15	1,12
24	31,3	4,6	0,15	1,42
38	31,3	2,5	0,08	1,49
48	31,3	2,5	0,08	1,37
57	31,3	2,5	0,08	1,48
<b>Bouleau jaune à une teneur en humidité de 135%</b>				
-18	21,1	6,6	0,31	0,96
11	38,4	8	0,21	1,94
24	31,6	6,2	0,2	2,99
38	30,5	4,3	0,14	2,98
47	29,8	3,8	0,13	1,87
57	28,9	3,3	0,12	2,18
<b>Érable à sucre à une teneur en humidité de 110%</b>				
-18	18,1	5,3	0,29	1,09
18	24,1	4,8	0,2	1,38
24	19,8	4,1	0,21	2,32
39	18,2	2,7	0,15	1,63
48	18	2,3	0,13	1,65
57	17,6	2,1	0,12	1,89

Tableau 3 : Propriétés diélectriques en fonction des essences de bois, et de la température pour des teneurs en humidité constantes et une fréquence micro-onde de 2466MHz.

Les figures 23-26 représentent la profondeur de pénétration des micro-ondes en fonction de la température, pour une humidité donnée et une fréquence de  $f = 2466\text{MHz}$ .

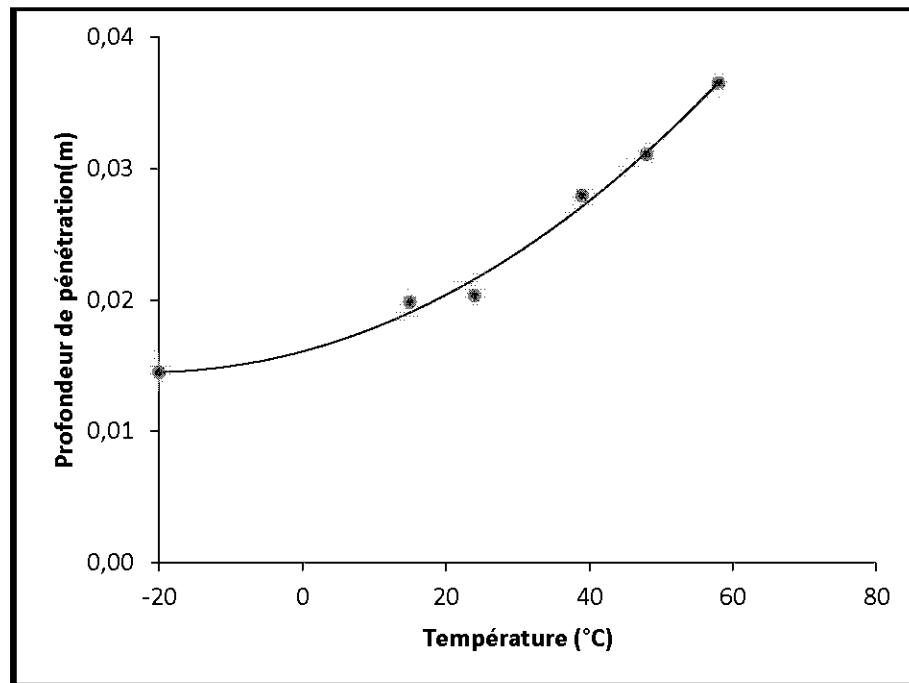


Figure 23 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois du peuplier faux tremble à une teneur en humidité de 155%.

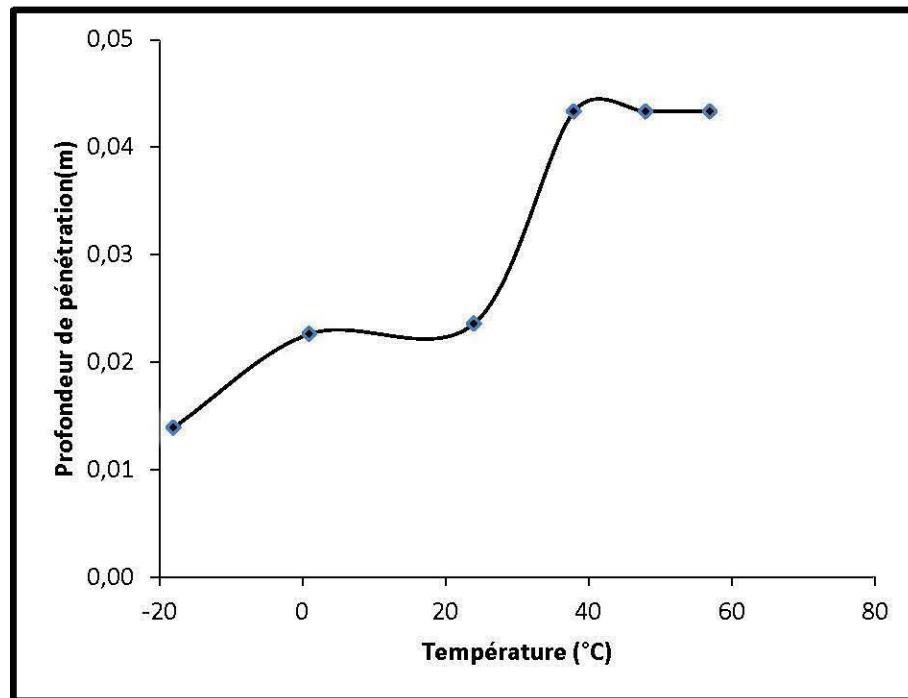


Figure 24 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois du bouleau blanc à une teneur en humidité de 125 %

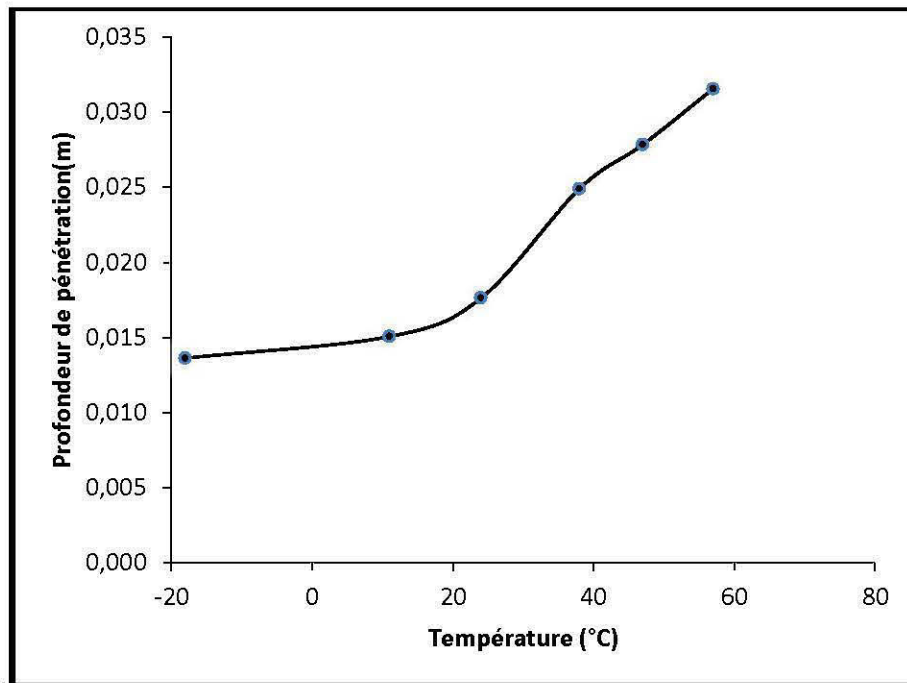


Figure 25 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois de bouleau jaune à une teneur en humidité de 135 %.

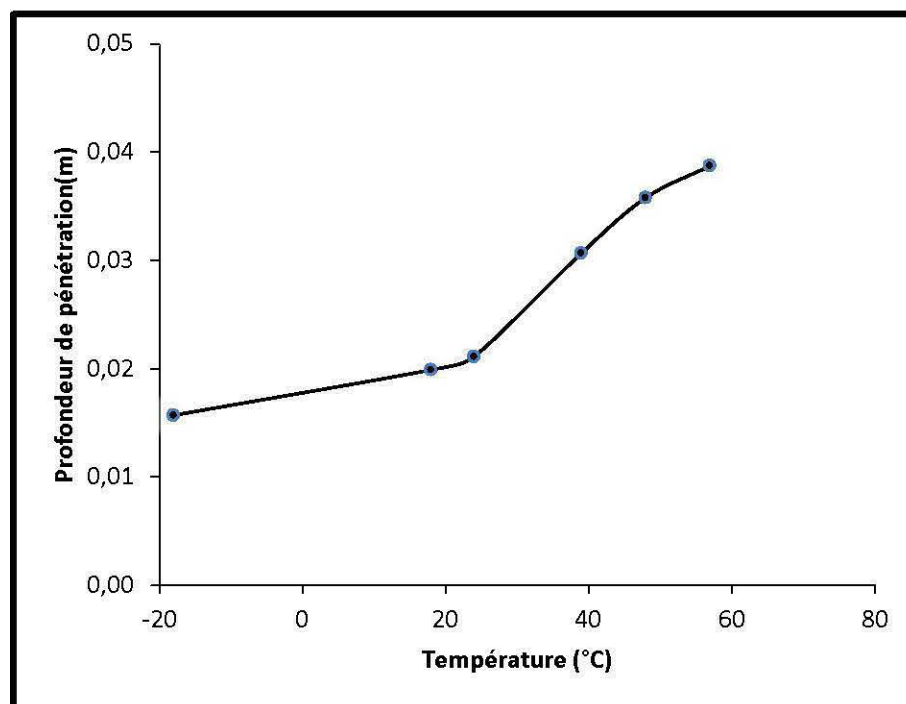


Figure 26 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans le bois de l'érable à sucre à une teneur en humidité de 110 %.

### III.2 Propriétés thermo-physiques

Les propriétés thermo-physiques des quatre espèces de bois sont données ci-dessous. Dans le tableau 4 on trouve les masses volumiques moyennes de chacune des espèces, pour une humidité de 131%. L'enthalpie latente (L) est estimée à 145837.88 J/kg en moyenne et est supposée la même pour chaque espèce pour l'humidité 131% (Steinhagen, 1977). Dans les figures 27 et 28 on illustre les variations de la capacité thermique et de la conductivité thermique de ces matériaux pour le même taux d'humidité (131%).

Espèce	Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )
Peuplier faux-tremble	808.50

Bouleau blanc	1108.80
Bouleau jaune	1270.50
Érable à sucre	1293.60

Tableau 4: Masse volumique, à une teneur en humidité de 131 %.

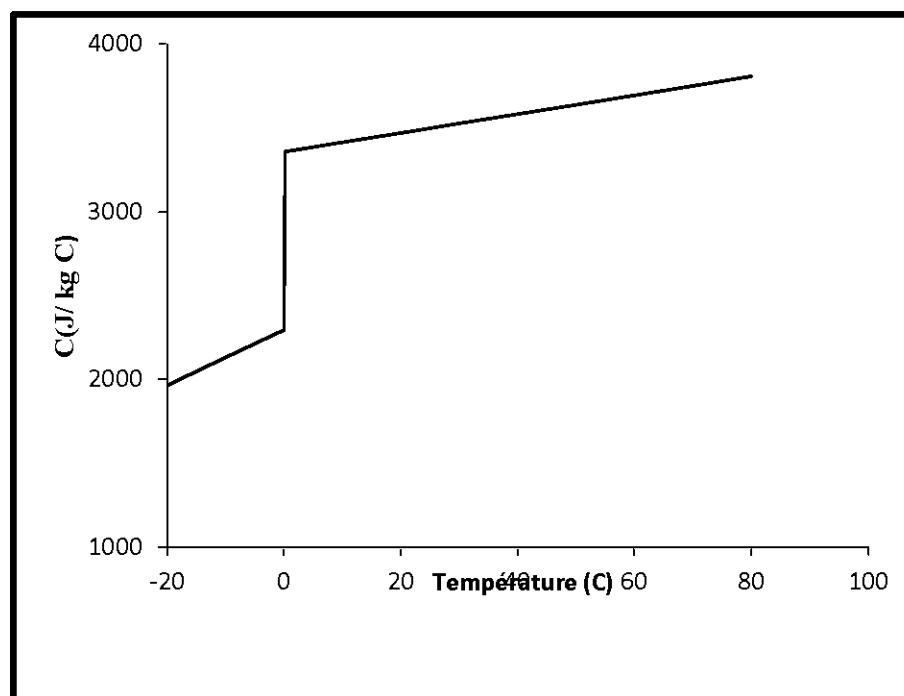


Figure 27 : Variation de la capacité thermique de quatre espèces de bois en fonction de la température à une teneur en humidité de 131 %.

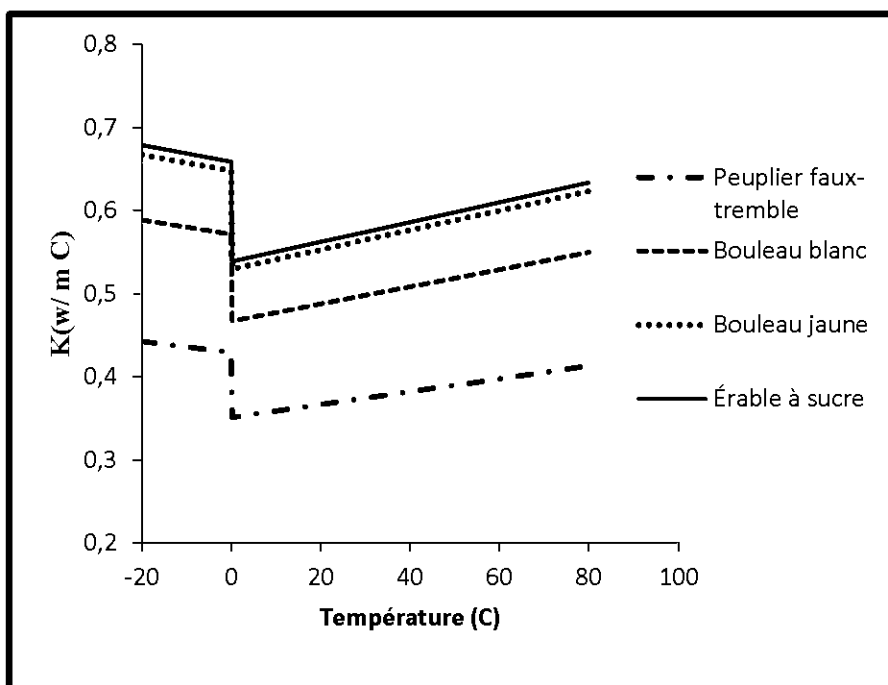


Figure 28 : Variation de la conductivité thermique de quatre espèces de bois en fonction de la température à une teneur en humidité de 131 %.

### III.3 Étude de chauffage des quatre espèces de bois

Comme application, on a considéré une lamelle de bois tridimensionnel de forme prismatique, de base inférieure rectangulaire (2 mètres par 1 mètre) et d'une hauteur qui varie linéairement de 0,1 à 0,025 mètre (direction radiale). Les micro-ondes sont dirigées du bas (base rectangulaire) vers le haut avec une puissance électrique de  $2.01E4$  (W). La température initiale de la structure est de  $-22$  °C. Pour l'analyse, on a considéré les quatre espèces de bois avec la même teneur en humidité (131%), ainsi qu'une fréquence de 2466 MHz. Les propriétés diélectriques et thermo-physiques de ses espèces sont données dans le paragraphe ci-dessus. Toutefois, pour le besoin des calculs, on a utilisé les mêmes profondeurs de pénétrations que ceux exposés ci-dessus. Pour la modélisation mathématique, nous avons considéré un maillage 3D (5830 éléments de type hexaèdre à 8 nœuds et 8154 nœuds), voir figure ci-dessous.

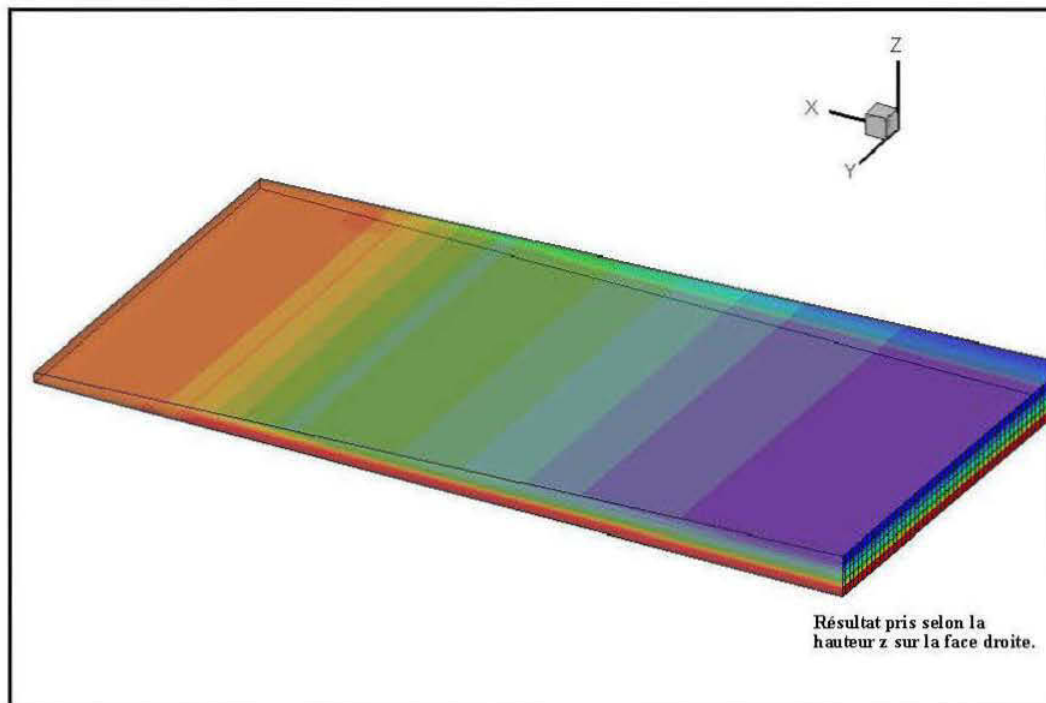


Figure 29 : Géométrie et maillage 3D.



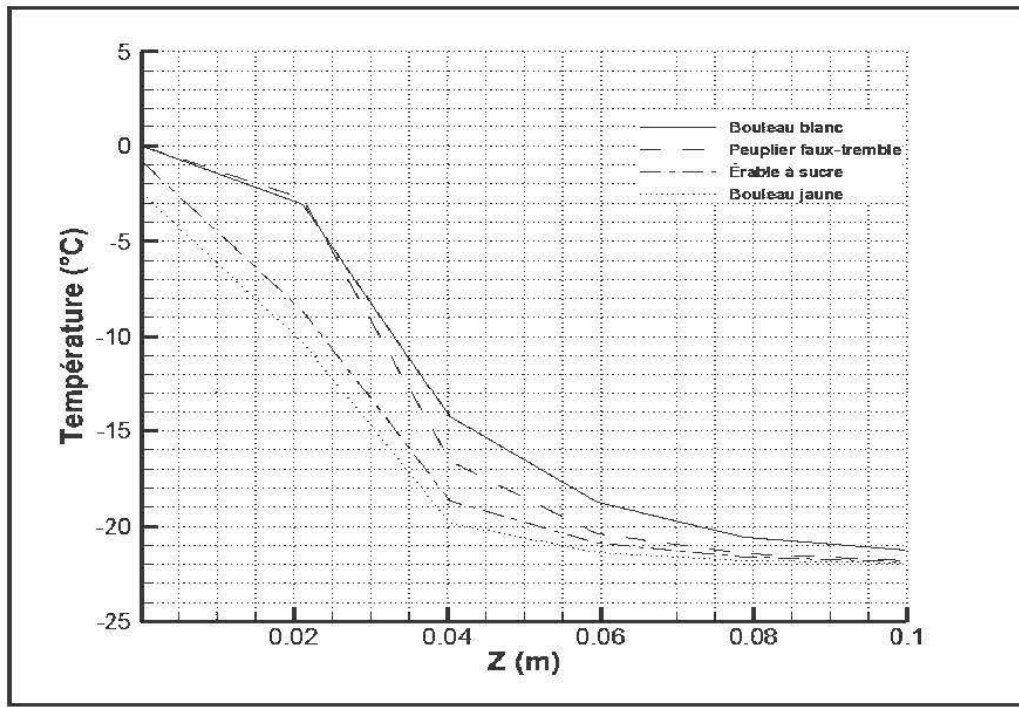


Figure 30 : Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant  $t_1 = 250$  s.

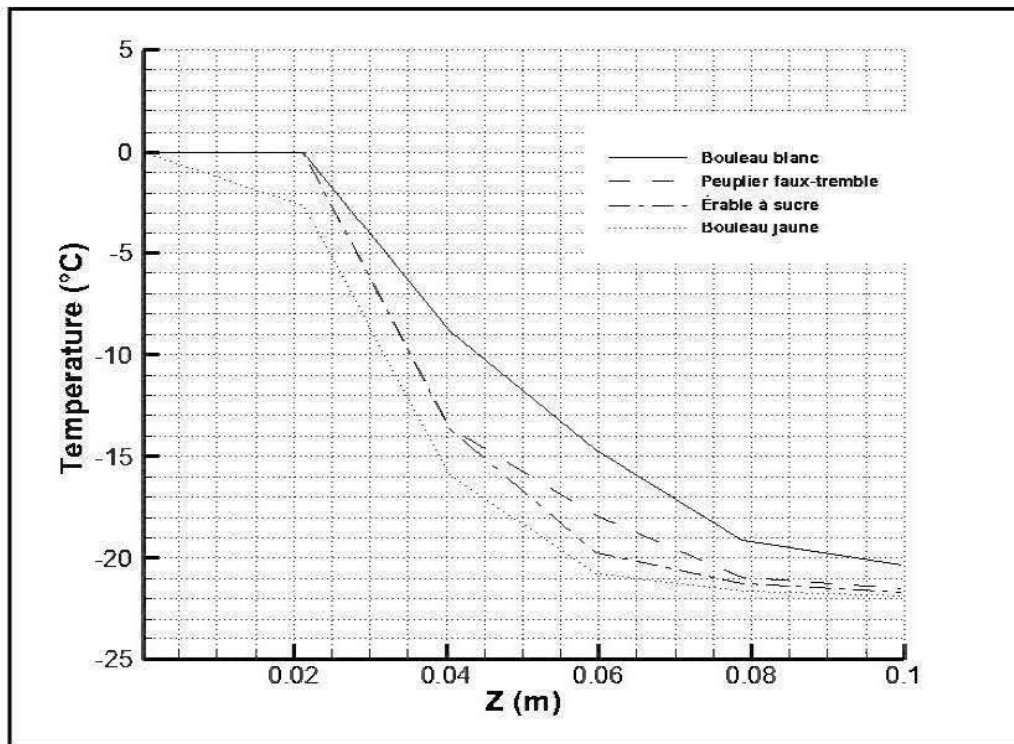


Figure 31: Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant  $t_2 = 500$  s.

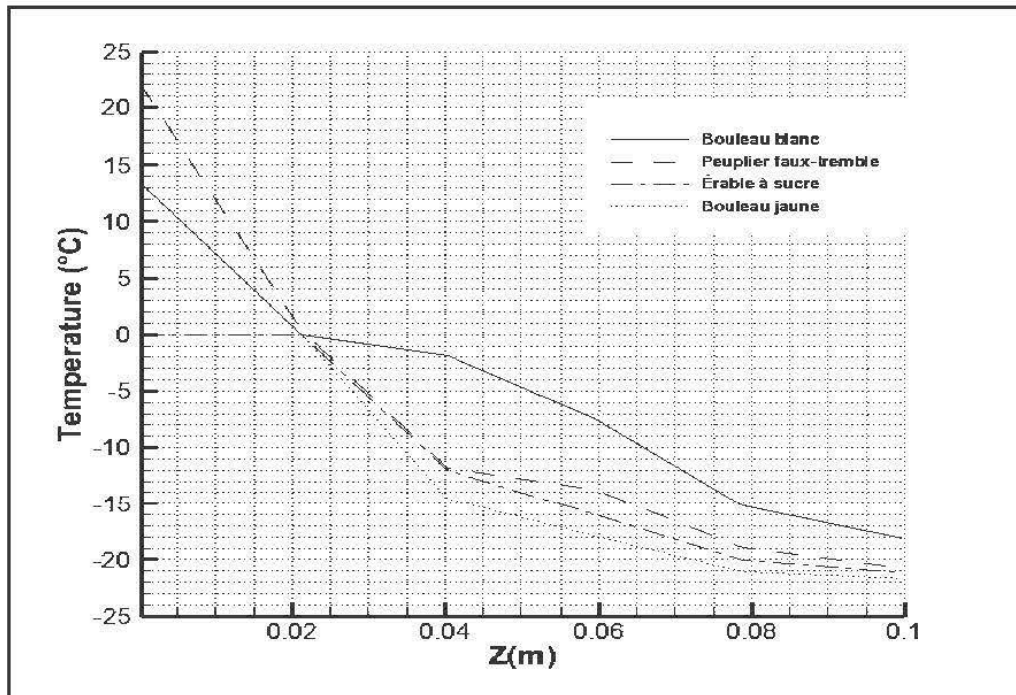


Figure 32 : Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant  $t_3 = 1000$  s.

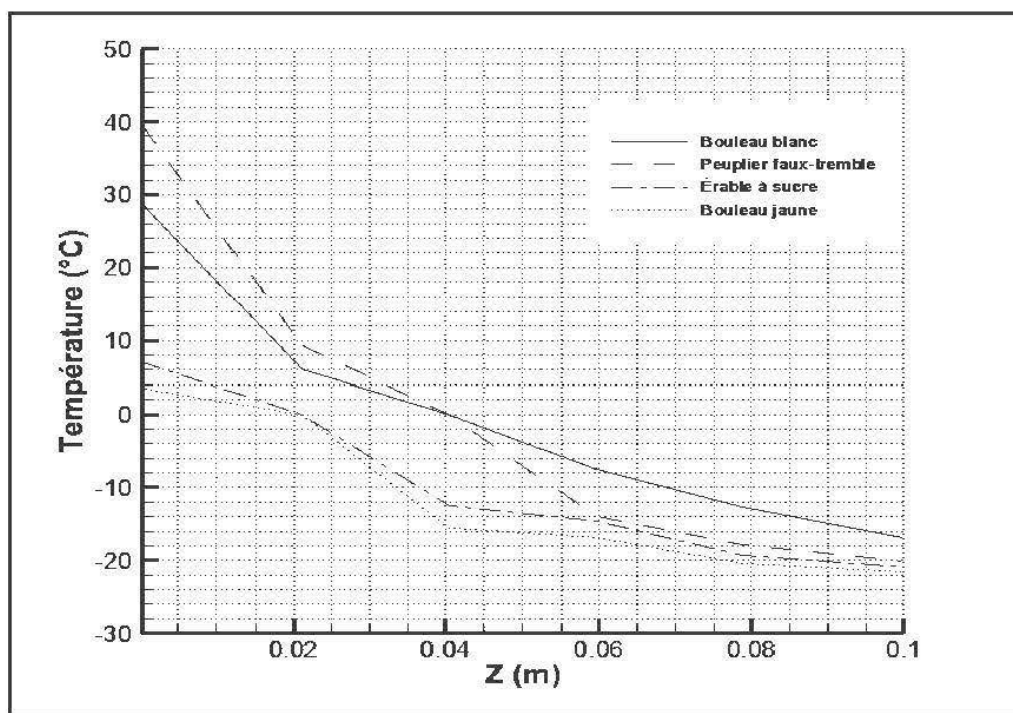


Figure 33 : Distribution de la température sur l'axe central de la surface latérale à l'instant  $t_4 = 1250$  s.

Sur les figures 30-33, pour chacune des espèces du bois, on a représenté aux instants  $t_1=250$  s,  $t_2=500$  s,  $t_3=1000$  s et  $t_4=1250$  s, respectivement, les distributions des températures sur l'axe central de la surface latérale YZ (les micro-ondes sont dirigés du bas vers le haut de cet axe). On remarque à l'instant  $t_1$ , que la température de bouleau blanc est sensiblement la plus élevée, suivie par celle de peuplier faux-tremble. Leurs températures maximales (observées sur la face exposée aux micro-ondes) coïncident avec le zéro °C (température de fusion de la glace). Les deux autres espèces bouleau jaune et l'érable à sucre suivent. Effectivement, au dessous de la température de fusion de la glace, les profondeurs de pénétration des micro-ondes dans chaque espèce sont presque similaires (voir Figure 35). En conséquence, les matériaux de haute diffusivité (voir Figure 34) vont être plus sensibles à une augmentation de la température lors du traitement par micro-ondes. Ainsi par classification des espèces par rapport à leur sensibilité de voir leur température augmenter on a: bouleau blanc, peuplier faux-tremble, bouleau jaune et

l'érable à sucre. Cette remarque est cohérente avec les résultats de la simulation. Les températures sur la face exposée aux ondes sont  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le bouleau blanc et le peuplier faux-tremble,  $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le bouleau jaune, et  $-2.5\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour l'érable à sucre. Concernant la face non exposée aux ondes, les températures sont :  $-19\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le bouleau blanc et  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour les trois espèces.

Même constatation à l'instant  $t_2$  concernant l'évolution de la température dans les matériaux de chaque espèce (voir Figure 31). En effet, l'ensemble des températures sont inférieures ou égale à la température de fusion de la glace ( $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) et l'hypothèse mentionné ci-dessus reste valable: diffusivité est responsable de l'évolution de la température. Toutefois et jusqu'à une profondeur de 20 cm, on constate une légère augmentation de la température dans chaque espèce sans pour autant dépasser la température de fusion de la glace. Les températures sur la face exposée aux ondes sont  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour les quatre espèces). Concernant la face non exposée aux ondes, les températures sont :  $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le bouleau blanc et  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour autres espèces.

Aux instants  $t_3$  (Figure 32) et  $t_4$  (Figure 33) et sur la même face exposée aux micro-ondes, les deux espèces (peuplier faux-tremble et bouleau blanc) manifestent des températures plus élevées que les deux autres espèces (bouleau jaune et l'érable à sucre). Effectivement, lors du chauffage et en se référant aux figures des diffusivités et des profondeurs de pénétration pour des températures au dessus de la température de fusion de la glace, il semble que l'effet combiné de ces propriétés (thermo-physique et diélectriques) est responsable de l'augmentation des températures. En conséquence, les deux premières espèces accumulent plus rapidement de l'énergie que les deux autres espèces. Une fois ils ont dépassés leurs énergies latentes (absences de glace au détriment de l'eau), le peuplier faux-tremble va être le premier qui va subir une élévation de température suivi de bouleau blanc. Sur la figure 33, les températures sur la face exposée aux ondes sont respectivement  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le peuplier faux-tremble,  $29\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le bouleau blanc,  $7.5\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour l'érable à sucre et  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le bouleau jaune.

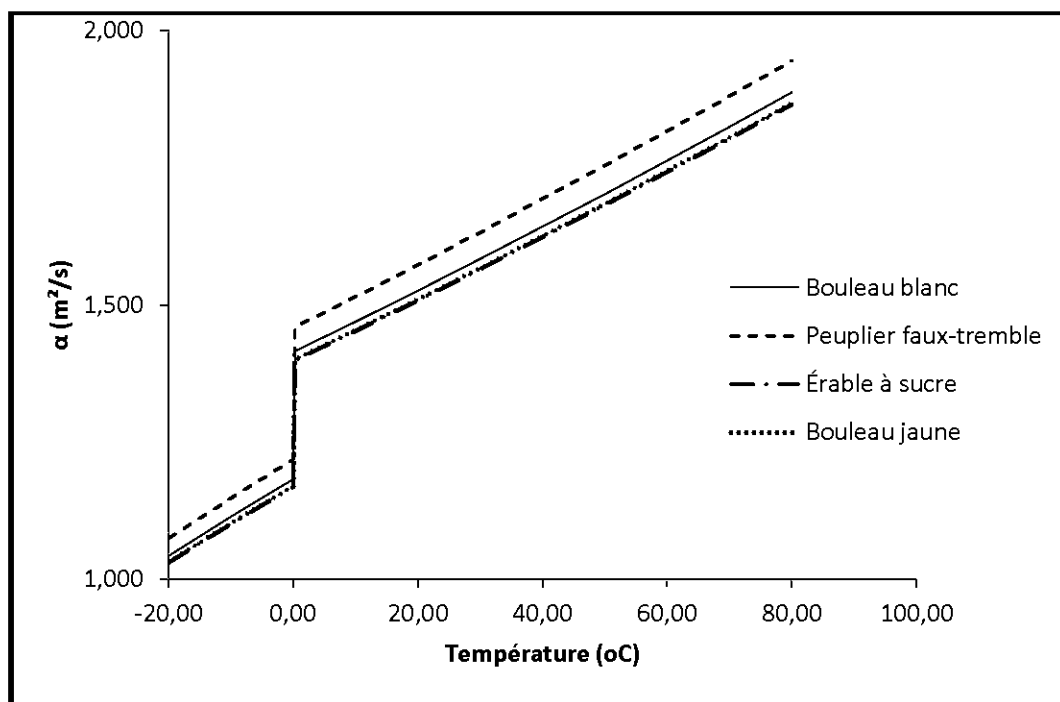


Figure 34 : Variation de la diffusivité thermique de quatre espèces de bois en fonction de la température à une teneur en humidité de 131 %.

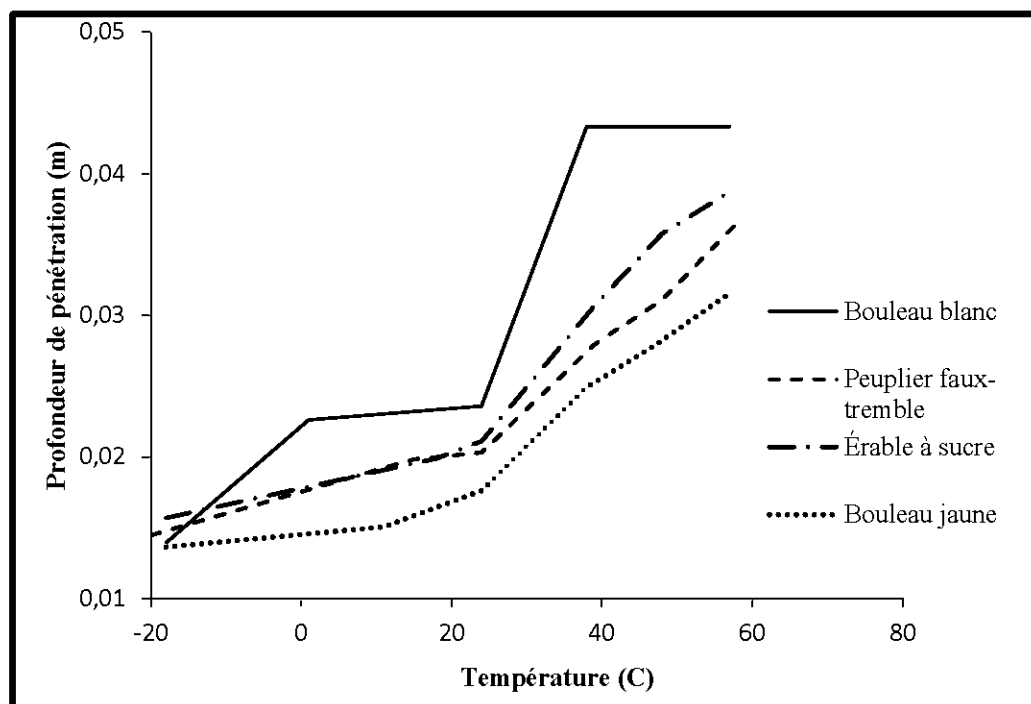


Figure 35 : Profondeur de pénétration des micro-ondes dans les quatre espèces à une teneur en humidité de 131 %.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, le problème de la modélisation numérique du transfert de chaleur par micro-ondes a été traité. À cet effet, nous avons utilisé la méthode des éléments finis 3D pour traiter l'équation de l'énergie en termes d'enthalpie volumique. Pour le terme source, un modèle radiatif de type Beer-Lambert, découlant des équations de Maxwell, a été utilisé. La formulation résultante intègre aussi bien la phase liquide que la phase solide. Des validations analytiques et expérimentales ont été effectuées.

Dans la première partie de mémoire, dans un premier temps, on a exposé d'une manière sommaire, une description sur l'importance du traitement phytosanitaire des matériaux à base de bois. Ensuite, une étude bibliographique sur la modélisation de changement de phase ainsi que le traitement par micro-ondes a été réalisée.

Dans le chapitre I, d'une part, on a exposé l'équation qui gouverne le transfert de chaleur dans les matériaux qui subissent un changement de phase (problème de Stefan), et, d'autre part, on a introduit une approche, équivalente à l'équation de l'énergie, utilisant l'enthalpie volumique au lieu de la température. Pour la modélisation numérique, la méthode des éléments finis tridimensionnelle a été utilisée pour l'équation de conservation de l'énergie. La formulation intégrale, la discrétisation spatiale et temporelle sont exposées. Pour clôturer ce chapitre, des validations numériques et expérimentales ont été effectuées.

Dans le chapitre II, on a exposé les deux équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère qui gouvernent l'électromagnétisme. Et selon des hypothèses appropriées au bois, on a établi l'expression de l'énergie dissipée dans le matériau (terme source). Ensuite, on a validé l'approche établie dans le chapitre I en utilisant un terme source électromagnétique de type Beer-Lambert (supposé unidirectionnel).

Finalement, dans le chapitre III, on a étudié, par simulation numérique, le chauffage par micro-ondes de quatre espèces de bois : le peuplier faux-tremble, le bouleau blanc, le bouleau



jaune et l'érable à sucre. Les résultats obtenus montrent que les deux espèces (peuplier faux-tremble et bouleau jaune) sont les plus sensibles à la radiation contrairement aux espèces (bouleau jaune et l'érable à sucre) qui demandent plus de temps.

La méthode présentée dans ce mémoire semble être prometteuse pour étudier les problèmes de chauffage par micro-ondes des matériaux de type bois. En effet, les résultats des simulations numériques et leurs confrontations avec des solutions analytiques et expérimentales montrent bien sa robustesse. Toutefois, pour améliorer les prédictions associées au chauffage par micro-ondes dans les matériaux bois, nos intérêts futurs dans le domaine de la modélisation du transfert radiatif par micro-ondes s'orientent vers deux aspects :

Au niveau de la modélisation numérique :

- Considérer l'effet tridimensionnel du terme source électromagnétique.
- Tenir compte de transfert de la chaleur et de masse.
- Considérer l'anisotropie du bois

Au niveau expérimental :

- Caractériser les propriétés diélectriques du bois en fonction de la température et de l'humidité;
- Caractériser les propriétés thermo-physiques du bois en fonction de la température et de l'humidité.

## RÉFÉRENCES

- Work, T., D. McCullough, J. Cavey, et R. Komsa 2005. Arrival rate of nonindigenous species into the United States through foreign trade. *Biol. Invas.* 7, 323-332.
- McCullough, D., T. Work, J. Cavey, A. Liebhold, D. Marshall 2005. Interceptions of nonindigenous plant pests at U.S. ports of entry and border crossings over a 17 year period. *Biol Invas.* 8(4):611-630.
- Haack R. 2001. Intercepted Scolytidae (Coleoptera) at U.S. ports of entry: 1985-2000, *Int. Pest Man. Rev.* 6:253-282.
- Pimentel, D., L. Lach, R. Zuniga and D. Morrison 2000. Environmental and economic costs of non-indigenous species in the United States. *BioScience.* 50:53-65.
- USDA 2002. Importation of Solid Wood packaging Material. Draft Environmental Impact Statement-October 2002.
- Lewis, V.R. and M.I. Haverty 1996. Evaluation of six techniques for control of the western drywood termite in structures. *J. Econ. Entom.* 89(4):922-934.
- Lewis, V.R., A.B. Power, and M.I. Haverty 2000. Laboratory evaluation of microwaves for control of the western drywood termite. *Forest Prod. J.* 50(5) 79-87.
- Antti L. 1999. Heating and Drying Wood using Microwave Power. Doctoral Thesis. Lulea Univ. of Techn., Sweden. 1999:35.

- Koubaa, A., P. Perré, R. Huchéon, et J. Lessard. 2008. Complex Dielectric Properties of the Sapwoods of Aspen, White Birch, Yellow Birch and Sugar Maple. *Drying Technology*, 26(5):568-578.
- Fleming, M.R., K. Hoover, Y. Fang, D. Agrawal, V. Mastro, J. Shield, Y. Wang et R. Roy 2000. Technologies for Preventing Introductions of Exotic Wood-Boring Insects into the United States. [<http://www.uvm.edu/albeetle/research/eradication.html>].
- Fleming, M.R. J J. Janowiak, J. M. Halbrendt, L.S. Bauer, D.L. Miller, et K. Hoover 2005. Feasibility of eradicating cerambycid larvae and pinewood nematodes infesting lumber with commercial 2.45 GHz microwave equipment. *Forest Products Journal* 55(12):227-232.
- Annasabi, Erchiqui et Koubaa. Étude de chauffage de bois par des ondes électromagnétiques courtes. The International congress for applied mechanics, Marrakech, 07-07 mai 2010.
- Kanter, K.R. 1957. The Thermal Properties of Wood. *Derev. Prom.* 1957, 6 (7), 17–18.
- Erchiqui F. 2000, Modélisation par MEF de changement de phase de matériaux par une approche utilisant l'enthalpie volumique 2000. Rapport interne.
- Hu, H. and Argyropoulos S. A. 1995. Modelling of Stefan problems in complex configurations involving two different metals using the enthalpy method. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 3(1): p. 53-64.
- Nedjar, B. 2002, An enthalpy-based finite element method for nonlinear heat problems involving phase change 2002. *Computers and Structures*, 80(1): p. 9-21.

- Dokainish M. A., Subbraj K. 1989, A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics. *Comput. Struct.*, Vol. 32, No. 6, 1989, pp. 1371-1386.
- Reddy, J. N. 1993. *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill, 2 edition.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., 2000. *Finite Element Method: Volume 1 - The Basis*. Butterworth Heinemann, London, 2000, 712 pp.
- Steinhagen H. P 1977, Heating times for frozen veneer logs new experimental data, 1977, *Forest Prod J* 27(6):24–28
- Giancoli, D. C. 1989. *Physics for scientists and Engineers*. Englewood Cliffs N. J.: Prentice Hall
- Ayappa K. G, Davis H. T., Crapiste G., David E. A., Gordon J. 1991. Microwave Heating : An Evaluation of power formulation. *Chemical engineering Science*, Vol. 46, No.4, pp.1005-1016, 1991.
- Carslaw, H.S., Jaeger, J.C. 1986. *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed Oxford University Press USA.
- Afzal, M.T., Colpits, B., Galik, K. 2003. Dielectric properties of softwood species measured with an open-ended coaxial probe. *Proceedings 8th International IUFRO Wood Drying Conference*, Brasov, Romania, August 24–29, 2003; 110–115.
- Jain, V.K., Dubey, Y.M. 1988. Dielectric constant of some Indian timbers in axial direction at microwave frequencies. *Journal of the Indian Academy of Wood Science* 1988, 19 (2), 25–36.
- James, W.L. 1975. *Dielectric Properties of Wood and Hardboard. Variation with Temperature, Frequency, Moisture Content and Grain Direction*; Res. Paper FPL-245, USDA Forest Service, Forest Prod. Lab.: Madison, WI, 1975.

- Von Hippel, A.R. 1959. *Dielectrics and Waves*; John Wiley: New York, 1959.
- Nelson, S. 1973. Electrical properties of agricultural products—A critical review. *Transactions of the American Society of Agricultural Engineers* 1973, 16 (2), 384–400.
- Hearmon, R.F.S., Burcham, J.N. 1954. *The Dielectric Properties of Wood*; Her Majesty's Stationary Off. Sec. Pep. 8: London, 1954.
- James, W.L., Hamil, D.W. 1965. Dielectric properties of Douglas fir measured at microwave frequencies. *Forest Products Journal* 1965, 15 (2), 51–56.
- Skaar, C. 1948. *The Dielectric Properties of Wood at Several Radio Frequencies*; Syracuse University: New York, 1948.
- Torgovnikov, G.I. 1993. *Dielectric Properties of Wood and Wood Based Materials*; Springer Verlag: Berlin, 1993.
- Nanassy, A.J. 1972. Dielectric measurement of moist wood in a sealed system. *Wood Science and Technology* 1972, 6 (1), 67–77.
- Zhou, B., Avramidis, S. 1999. On the loss factor of wood during radio frequency heating. *Wood Science and Technology* 1999, 33, 299–331.
- Ay, N., Sahin, H. 2004. Dielectric constant of Turkish timbers in the longitudinal direction at a 9.8-GHz frequency. *Forest Products Journal* 2004, 54 (10), 65–68.
- Resch, H. 2003. High-frequency heating combined with vacuum drying of wood. *Proceedings 8th International IUFRO Wood Drying Conference, Brasov, Romania, August 24–29, 2003*; 127–132.
- Daian, G., Taube, B., Birnboim, A., Daian, M., Sharmkov, Y. 2006. Modeling the dielectric properties of wood. *Wood Science and Technology* 2006, 40, 237–246.

## ANNEXES

**Annexe 1 : Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D : terme source radiatif**

Il s'agit de résoudre l'équation de la chaleur sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Aq'_0 e^{-Az}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A1.1})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$T(z, t = 0) = T_{\text{ini}} ; \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{z=0} = 0 ; \lim_{z \rightarrow \infty} T(z, t) = T_{\text{ini}} \quad (\text{A1.2})$$

On adopte le changement de variable :

$$\theta = T - T_{\text{ini}} + \frac{q'_0 e^{-Az}}{k A} \quad (\text{A1.3})$$

Ce qui donne l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{A1.4})$$

Que l'on peut résoudre en utilisant les transformées de Laplace sur la variable temporelle;

$$L[\theta(z, t)] = \bar{\theta}(z, p) \quad (\text{A1.5})$$

Dans l'espace de Laplace l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{\theta} = -\frac{q'_0 e^{-Az}}{\alpha k A} \quad (\text{A1.6})$$

La solution est de la forme :

$$\bar{\theta}(z, p) = \bar{\theta}_1(z, p) + \beta e^{-Az} \quad (\text{A1.7})$$

La substitution de cette solution dans l'équation précédente fait apparaître une équation en  $\bar{\theta}_1$ .

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_1}{dz^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{\theta}_1 = -e^{-Az} \left[ \frac{q'_0}{\alpha k A} + \beta \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) \right] \quad (\text{A1.8})$$

La condition pour laquelle cette équation admet une solution sans second membre permet d'identifier la variable  $\beta$  par :

$$\beta = - \left[ \frac{q'_0}{\alpha k A \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} \right] \quad (\text{A1.9})$$

Et de disposer d'une équation en  $\bar{\theta}_1$  sans second membre qui admet une solution triviale et permet finalement d'obtenir une solution pour  $\bar{\theta}_1$  :

$$\bar{\theta}(z, p) = K e^{-Az} + \beta e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} z} \quad (\text{A1.10})$$

Les conditions aux limites par rapport à  $\theta$  :

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{q'_0}{k} \quad (\text{A1.11})$$

sont exprimées dans l'espace de Laplace par :

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{q'_0}{kp} = -k\sqrt{\frac{p}{\alpha}} - \beta A \quad (\text{A1.12})$$

Cette égalité permet d'identifier l'expression de la constante d'intégration K, et de formuler la solution en  $\bar{\theta}$  par :

$$\bar{\theta}_1(z, p) = \frac{q'_0}{kpq} e^{-qz} + \frac{q'_0}{\alpha kq \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right)} e^{-qz} - \frac{q'_0}{\alpha kA \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right)} e^{-AZ} \quad (\text{A1.13})$$

$$\text{avec } q = -\sqrt{\frac{p}{\alpha}} z$$

La solution finale de l'équation exprimée dans l'espace  $(z, t)$  est obtenue par transformée inverse de ces trois termes qui sont traités séparément :

L'identification de la transformée inverse du deuxième terme n'est pas apparente sous cette forme et il est nécessaire de la décomposer en fraction rationnelle selon :

$$\frac{q'_0}{\alpha kq \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right)} e^{-qz} = -\frac{q'_0 e^{-AZ}}{\alpha k} \left[ \frac{A}{(A+q)q} + \frac{B}{(A-q)q} \right] \quad (\text{A1.14})$$

Par identification on obtient :  $A = B = \frac{1}{2A}$ , finalement pour identifier la transformée inverse, on écrit ce terme de la façon suivante :

$$\frac{q'_0}{\alpha kq \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right)} e^{-qz} = \frac{q'_0 e^{-\sqrt{p}\frac{z}{\alpha}}}{2kA(A\sqrt{\alpha} + \sqrt{p})\sqrt{p}} - \frac{q'_0 e^{-\sqrt{p}\frac{z}{\alpha}}}{2kA(A\sqrt{\alpha} - \sqrt{p})\sqrt{p}} \quad (\text{A1.15})$$

En identifiant  $a = \pm A\sqrt{\alpha}$  et  $k' = \frac{z}{\sqrt{\alpha}}$  cette expression admet une transformée (DeVriendt, 1984) donné par :



$$L^{-1} \left[ \frac{q'_0}{\alpha k q \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} e^{-qZ} \right] = e^{ak'} e^{a^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right) \quad (\text{A1.16})$$

Les premiers et derniers termes exprimant la solution  $\bar{\theta}$  sont plus simples à inverser puisque directement identifiables par une transformée classique par :

$$L^{-1} \left[ \frac{q'_0}{\alpha k q \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} e^{-qZ} \right] = e^{ak'} e^{a^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right) \quad (\text{A1.17})$$

$$L^{-1} \left[ \frac{-q'_0}{\alpha k A \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} e^{-AZ} \right] = \frac{q'_0}{k A} e^{\alpha A^2 t} e^{-AZ} \quad (\text{A1.18})$$

$$L^{-1} \left[ \frac{-q'_0 e^{-AZ}}{k \frac{p}{q}} \right] = \frac{q'_0}{k} 2\sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (\text{A1.19})$$

En utilisant les propriétés des fonctions erf tel que :

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad \text{et} \quad -\operatorname{erf}(z) = 1 - \operatorname{erf}(-z) \quad (\text{A1.20})$$

On obtient finalement l'expression de  $\theta$ , en fonction de  $z$  et de  $t$  par :

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &= T(z, t) - T_{\text{ini}} + \frac{q'_0 e^{-Az}}{k A} \\ &= A q'_0 \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) + \frac{q'_0}{2k} e^{A^2 \alpha t + Az} \operatorname{erfc} \left( A\sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \\ &\quad + \frac{q'_0}{2k} e^{A^2 \alpha t - Az} \operatorname{erfc} \left( A\sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.21})$$

$$\begin{aligned} T(z, t) &= T_{\text{ini}} - \frac{q'_0 e^{-Az}}{k A} + A q'_0 \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) + \frac{q'_0}{2k} e^{A^2 \alpha t + Az} \operatorname{erfc} \left( A\sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \\ &\quad + \frac{q'_0}{2k} e^{A^2 \alpha t - Az} \operatorname{erfc} \left( A\sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.22})$$

