



BIBLIOTHÈQUE

CÉGEP DE L'ABITIBI-TÉMISCAMINGUE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans [Depositum](#), site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous. L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre.

Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) obtained the permission of the author to use a copy of this document for nonprofit purposes in order to put it in the open archives [Depositum](#), which is free and accessible to all. The author retains ownership of the copyright on this document.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

**MODÈLE UNIFIÉ JACOBIAN-TORSEUR POUR LE TOLÉRANCEMENT:
APPLICATIONS DÉTERMINISTES ET STATISTIQUES**

MÉMOIRE PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE DE LA MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE

PAR

Amine Salhi

Décembre 2020

REMERCIEMENTS

J'offre premièrement de sincères et chaleureux remerciements à mon directeur professeur Walid Ghié pour le temps qu'il a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche. Son exigence m'a grandement stimulé, je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Aussi, à mes professeurs, les professeurs Guyh Dituba Ngoma et Hatem Mrad d'avoir accepté de corriger ce travail ainsi que pour leurs encouragements.

Je remercie mes très chers parents, ma sœur et mon frère pour leur présence, leur écoute, leur confiance en moi et leur soutien constant m'assurant des bases solides et me permettant de persévérer et de me surpasser.

Je remercie toutes les incertitudes qui ont rempli mes années de maîtrise.

Enfin, tous mes remerciements vont à ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail.

Veillez trouver, dans ce travail, le fruit de tous vos efforts rassemblés.

Résumé

Dans le domaine de conception et de fabrication, la précision des tolérances des pièces joue un rôle crucial. Les valeurs de tolérance attribuées à un système mécanique doivent être conformes avec les conditions de bon fonctionnement, d'interchangeabilité, d'usinage et doivent minimiser le coût de l'assemblage final. D'une part, si le concepteur exagère avec les valeurs de tolérance, ça peut causer le mauvais fonctionnement du produit. D'autre part, si le concepteur utilise de petites valeurs de tolérance, ça peut engendrer de longues heures de fabrication, ce qui augmente le prix final du produit. Ainsi, il existe beaucoup de méthodes pour analyser ce problème. Ces méthodes peuvent être classés entre déterministe et statistique. Ces méthodes suggèrent que les pièces mécaniques sont rigides en réalité, cette dernière hypothèse engendre que les surfaces de contact des pièces sont modélisées par des points au lieu d'une surface. La précision de tolérance sera faite pour des points particuliers soumis à des contraintes d'assemblage. La méthode utilisée se concentre donc sur les zones de contact et leurs contraintes pour déterminer un intervalle de tolérance de nuages de points au lieu d'un seul point. Ainsi, il faut intégrer les contraintes dans le modèle de calcul de tolérance finale. L'objectif de cette étude est d'appliquer le modèle unifié jacobien-torseur proposé par le professeur Walid Ghié sur la statistique et l'adopter pour faire la synthèse en tolérancement assisté par ordinateur. Plus précisément, le modèle unifié est obtenu en utilisant le modèle de matrice jacobienne ainsi que le modèle de petit déplacement par torseur. Enfin, pour mieux saisir la méthode, des exemples seront traités par la suite.

Mots Clés

Intervalle de tolérance, conception, ajustement, synthèse, analyse, déterministe, jacobien-torseur, cotation fonctionnelle, tolérances

Tables de matières

REMERCIEMENTS	I
RÉSUMÉ	II
TABLES DE MATIÈRES	III
ILLUSTRATIONS	VI
LISTE DE TABLEAUX	VIII
INTRODUCTION	IX
CHAPITRE 1 : ÉTAT DES CONNAISSANCES	1
1.1-Le tolérancement	1
1.2-Historique de la normalisation et le tolérancement	2
1.3- Chaîne de tolérance	5
1.3.1-Spécifications géométriques	5
1.3.1-Spécifications dimensionnelles	6
1.3.1.1-Cote et cotation dimensionnelle	6
1.3.1.2-Cote nominale [11].....	7
1.3.1.3-Cote minimale	7
1.3.1.4-Cote maximale	8
1.3.1.5-Intervalle de tolérance	8
1.3.1.6-Cote moyenne.....	8
1.3.2-Zone de tolérance	9
1.4-Définition de l'analyse et la synthèse des tolérances	9

1.4.1-L'analyse de tolérance.....	10
1.4.2-La synthèse de tolérancement	12
1.4.3-Méthodes d'analyse et de synthèse en tolérancement assisté par ordinateur.....	12
CHAPITRE 2 : DESCRIPTION DE MODÈLE JACOBIEN-TORSEUR	14
2.1- Théorie de modèle J-T pour l'analyse en tolérancement	14
2.1.1-Theorie de l'analyse déterministe par le modèle jacobien-torseur.....	23
2.1.2-Application de l'analyse déterministe par le modèle jacobien-torseur.....	31
2.2-Théorie de l'analyse statistique par la méthode Monte-Carlo (méthode statistique) :.....	43
2.2.1-Application de l'analyse statistique par le modèle jacobien-torseur	49
2.3- La synthèse de tolérance.....	53
2.3.1-Pseudo-inverse pour la synthèse.....	54
2.3.2-Exemple du bloc simple avec méthode déterministe en synthèse.....	55
2.3.3-L'application de la synthèse en statistique sur les blocs simples :	58
3.3-Conclusion	59
CHAPITRE 3 : RÉSULTATS.....	61
3.1 Exemple de la perforatrice de carton [9]	61
3.1.1 Application de la méthode déterministe par le modèle jacobien-torseur pour la perforatrice	61
3.1.2 Application de l'analyse statistique par le modèle jacobien-torseur pour la perforatrice.....	72
3.1.3-Exemple de la perforatrice avec méthode déterministe en synthèse	75
3.1.4-Exemple de perforatrice avec la méthode statistique en synthèse.....	77
3.1.5-Conclusion	80
3.2 Exemple de contre pointe	81
3.2.1 Application de la méthode statistique pour l'exemple de contre pointe	81
3.2.2-Exemple de contre pointe avec méthode synthèse en déterministe	85

3.2.3-Exemple de contre pointe avec la méthode statistique en synthèse	87
3.2.4-Concluson	89
CHAPITRE 4 : CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	90
4.1-Conclusion :.....	90
4.2-Perspectives :.....	91
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	93

Illustrations

FIGURE 1 : L'ÉVOLUTION DE LA NORMALISATION JUSQU'À NOS JOURS [4]	4
FIGURE 2 : EXEMPLE DE ZONE DE TOLÉRANCE [3]	9
FIGURE 3 : COMPARAISON ENTRE L'ANALYSE ET LA SYNTHÈSE [4]	10
FIGURE 4 : ZONE D'ERREURS POUR UNE DISTRIBUTION NORMALE ET INTERVALLE DE CONFIANCE	12
FIGURE 5 : SURFACES DE CONTACT, GRAPHE DE LIAISONS ET RÉFÉRENTIELS FIXES DE BLOCS SIMPLES [4]	18
FIGURE 6 : CHAÎNE DE COTES AUTOUR DE LA CONDITION FONCTIONNELLE DES BLOCS SIMPLES [4]	25
FIGURE 7 : MÉTHODOLOGIE DU MODÈLE UNIFIÉ [4]	30
FIGURE 8 : DESSIN DE L'ASSEMBLAGE DE BLOCS SIMPLES [4]	31
FIGURE 9 : GRAPHES DE LIAISONS ET LA CHAÎNE DE COTES ASSOCIÉE AUX BLOCS SIMPLES [4]	32
FIGURE 10 : PRINCIPE DE DÉTERMINATION DES CONTRAINTES DIMENSIONNELLE ET DE POSITION [4]	37
FIGURE 11 DÉMARCHE GÉNÉRALE DE LA MÉTHODE MMC	43
FIGURE 12 : ALGORITHME DE CENTRAGE DE VALEUR DE COTES [5]	44
FIGURE 13 : ORGANIGRAMME D'APPLICATION DE MMC [5]	47
FIGURE 14 : LA SIMULATION DE MONTE-CARLO	48
FIGURE 15 : HISTOGRAMME DE DISTRIBUTION DE LA CF SELON LA DIRECTION X	51
FIGURE 16 : AJUSTEMENT DES DISTRIBUTIONS AUX DONNÉES DE LA SIMULATION (LOI NORMALE)	52
FIGURE 17 : VUE ÉCLATÉE DU MÉCANISME DE PERFORATRICE	61
FIGURE 18 : DESSIN DE POINÇON DE LA PERFORATRICE	63
FIGURE 19 : DESSIN DE SUPPORT DE LA PERFORATRICE	63
FIGURE 20 : IDENTIFICATION DES ÉLÉMENTS DE CHAÎNE DE COTE AUTOUR DE LA CF	65
FIGURE 21 : HISTOGRAMME DE DISTRIBUTION DE LA CONDITION FONCTIONNELLE SELON LA DIRECTION Y	73
FIGURE 22 : AJUSTEMENT DES DISTRIBUTIONS AUX DONNÉES DE LA SIMULATION (LOI NORMALE)	74

FIGURE 23 : MÉCANISME DE CONTRE POINTE MONTRANT LES CONDITIONS FONCTIONNELLES [4].81

**FIGURE 24 : HISTOGRAMME DE DISTRIBUTION DE LA CONDITION FONCTIONNELLE SELON LA
DIRECTION Z.....83**

**FIGURE 25 : AJUSTEMENT DES DISTRIBUTIONS AUX DONNÉES DE LA SIMULATION (LOI NORMALE)
.....84**

Liste de tableaux

TABLEAU 1 : TABLEAU DE TOLÉRANCES GÉOMÉTRIQUES [3]	6
TABLEAU 2 : ÉQUATIONS D'UN TORSEUR D'EF PAR INTERVALLES [4]	19
TABLEAU 3 : ÉQUATION D'UNE MATRICE JACOBIENNE [4]	21
TABLEAU 4 : ÉQUATION D'UN TORSEUR D'UNE CF	22
TABLEAU 5 : OPÉRATIONS POUR LES MULTIPLICATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE PAR INTERVALLES [4]	27
TABLEAU 6 : CONTRAINTES DES ZONES DE TOLÉRANCE PAR TORSEUR [4]	28
TABLEAU 7 : MATRICE W DE L'ÉLÉMENT 5 PAR RAPPORT L'ÉLÉMENT 2 POUR LES BLOCS SIMPLES [4]	34
TABLEAU 8 : MATRICE JACOBIENNE POUR LES BLOCS SIMPLES [4]	35
TABLEAU 9: CONTRAINTES DU TORSEUR DE L'ÉLÉMENT 2 PAR RAPPORT L'ORIGINE POUR LES BLOCS SIMPLES [4]	38
TABLEAU 10 : DÉTAILS DU TORSEUR DE L'ÉLÉMENT 2 PAR RAPPORT L'ORIGINE DES BLOCS SIMPLES [4]	40
TABLEAU 11 : TORSEUR T DE L'ÉLÉMENT 5 PAR RAPPORT L'ÉLÉMENT 3 DES BLOCS SIMPLES	41
TABLEAU 12 : PROCESSUS DE CAPABILITÉ, INTERPRÉTATION [7]	45
TABLEAU 13 : CALCUL DE TOLÉRANCE PAR LA MÉTHODE DÉTERMINISTE EN SYNTHÈSE	57
TABLEAU 14 : CALCUL DE TOLÉRANCE PAR LA MÉTHODE STATIQUE EN SYNTHÈSE	59
TABLEAU 15 : CALCUL DE W DE L'ÉLÉMENT 3 PAR RAPPORT L'ORIGINE DE PERFORATRICE	67
TABLEAU 16 : CALCUL DE W DE L'ÉLÉMENT 7 PAR RAPPORT L'ORIGINE DE PERFORATRICE	67
TABLEAU 17 : CALCUL DE W DE L'ÉLÉMENT 8 PAR RAPPORT L'ORIGINE DE PERFORATRICE	68
TABLEAU 18 : MATRICES JACOBIENNES DE LA PERFORATRICE	69
TABLEAU 19 : TORSEURS CLASSIQUES DU MÉCANISME DE PERFORATRICE	70
TABLEAU 20 : CALCUL DE TOLÉRANCE PAR LA MÉTHODE DÉTERMINISTE EN SYNTHÈSE	76
TABLEAU 21 : CALCUL DE TOLÉRANCE PAR LA MÉTHODE STATISTIQUE EN SYNTHÈSE	79
TABLEAU 22 : CALCUL DE TOLÉRANCE PAR LA MÉTHODE DÉTERMINISTE EN SYNTHÈSE	86
TABLEAU 23 : CALCUL DE TOLÉRANCE PAR LA MÉTHODE STATISTIQUE EN SYNTHÈSE	88

Introduction

Le tolérancement de systèmes mécaniques est une étape délicate et essentielle dans la démarche de conception. Une maîtrise des défauts géométriques au cours de la fabrication des pièces mécaniques permet de garantir la qualité finale du produit. Donc le vrai but n'est pas d'éviter à tout prix les défauts géométriques, mais c'est de les prévoir et de les prendre en compte lors de l'étude de conception et il faut aussi vérifier que le produit respectera des besoins fonctionnels imposés.

La stratégie actuelle concernant les spécifications géométriques des pièces mécaniques est d'inclure à la fois les dimensions et les tolérances. L'objectif de ces spécifications est de décrire une classe de pièces mécaniques fonctionnellement acceptables et géométriquement similaires. Dans l'industrie, on ne peut pas fabriquer une cote exacte pour une pièce ou un assemblage mécanique, d'où la raison pourquoi maximiser les tolérances, tout en s'assurant que les conditions d'assemblage des pièces sont satisfaites.

Le choix des tolérances peut avoir d'importants changements sur le prix et la qualité de la pièce et ça dépend du niveau de rigueur de l'étude. En conséquence, le concepteur doit respecter les spécifications de tolérances des pièces en menant une définition adéquate à leur chaîne de cotes.

En saisissant l'importance de tolérance dans la fabrication, les chercheurs ont lutté pour trouver des méthodes fines pour caractériser les normes de dimensionnement et de tolérancement, ces méthodes peuvent être classées entre déterministe et statistique. Ces méthodes se basent sur l'hypothèse que les pièces sont rigides, ce qui implique que les surfaces de contact ne sont pas parfaites à leur géométrie en réalité (plan, cercle, ligne...). En conséquence, on peut définir des intervalles de tolérance contenant des nuages de points en un seul point, ce qui va rendre l'étude plus optimale.

L'objectif de cette recherche est d'appliquer le modèle jacobien-torseur par la méthode statistique sur l'analyse, déterministe et en synthèse. Ce modèle qui est élaboré pour intégrer les contraintes d'assemblage dans le modèle de calcul de tolérance. Ce modèle est en effet un modèle unifié : entre le modèle jacobien qui sert principalement à caractériser les chaînes cinématiques en robotique et le modèle par zone de tolérances de petit déplacement par torseur.

La génération des valeurs aléatoires de tolérance par le modèle jacobien-torseur sera appliqué, d'autres valeurs seront générées sur la condition fonctionnelle. Des lois de probabilités seront utilisés pour faire l'analyse et la synthèse. Un objectif primordial dans ce travail est d'adopter le modèle J-T pour la synthèse. Ce travail doit utiliser le pseudo-inverse.

CHAPITRE 1 : ÉTAT DES CONNAISSANCES

1.1-Le tolérancement

L'interprétation de la signification des cotes de tolérancement qui apparaissent sur un dessin de définition technique ne peut pas être envisagée qu'à partir d'une étude approfondie des normes et une connaissance du contexte dans lequel les dessins ont été obtenus et de la condition du bon fonctionnement du mécanisme [17].

Il est connu que l'association d'une tolérance donnée utilise une directive de syntaxe pour donner un sens pour le dessin. La norme de tolérance définit une langue particulière. Le langage utilisé est purement géométrique.

L'objet connu de tolérancement consiste à fixer des frontières qu'on peut approuver acceptables sur la variation de la géométrie des pièces d'un assemblage ou d'un mécanisme.

La géométrie d'une pièce mécanique est présentée par une surface réelle qui définit son matériel.

La surface est divisée en plusieurs éléments pour diverses raisons (fonction, conception, fabrication et traitement, bonne sensation...). Chaque élément correspond à l'idéal d'un élément géométrique : il a sa forme, sa taille, sa position et son orientation. Cette géométrie est appelée **géométrie nominale**.

Les limites qu'on peut admettre sont caractérisées par des **zones de tolérance** ou **intervalle de tolérance**.

Zone de tolérance : Il s'agit d'un volume comprenant une partie ou la totalité d'une surface ou l'élément théorique représentant la surface (plan, axe) où le concepteur a toléré toute erreur possible.

Intervalle de tolérance : Étant donné qu'aucune machine fabrique une dimension exacte, il est impossible de construire une série d'objets identiques ayant toujours les mêmes dimensions. Une estimation imposée sera plus facile à réaliser si elle varie entre deux valeurs limites . Ces valeurs sont connues par : un niveau maximum **Cmax** et une estimation minimale **Cmini**.

La différence entre les deux dimensions est appelée **tolérance dimensionnelle** ou **intervalle de tolérance (IT)**. Plus la précision demandée est grande, plus l'intervalle de tolérance doit être petit.

La géométrie nominale et les zones de tolérance sont décrites par tolérance à l'aide d'un langage défini par les normes de tolérance.

En utilisant les normes, il est possible de dire que l'interprétation d'une tolérance consiste à décrire géométriquement une géométrie nominale d'une pièce. La prochaine section donne un aperçu sur l'évolution de la norme.

1.2-Historique de la normalisation et le tolérancement

Dans le domaine de la tolérance, l'expertise manufacturière ne suffit pas pour juger de la qualité des pièces obtenues, il a parfois fallu enseigner aux hommes comment s'adapter pour avoir des pièces similaires selon les normes appliquées aux zones de tolérance. Il faut citer plusieurs facteurs qui ont participé à ce progrès tels que : l'évolution des outils de machine, l'amélioration de la précision des machines-outils, la normalisation du langage de tolérance. La normalisation des dimensions a contribué à l'avancement de l'industrie mondiale et c'est parce qu'il a rendu les données sur les zones de tolérance interchangeables entre les nations, les sociétés multinationales et les

fabricants. Cependant, en dépit de ces faiblesses, les normes sont la seule langue commune dans la disposition de tous les concepteurs, les fabricants et métrologues pour exprimer l'apparence géométrique d'un mécanisme. [4]

Dans le sens commun, il s'agit de la normalisation quand c'est une question de spécification et simplification des échanges entre les individus. C'est une question du fait de monter un code commun, comme celle des alphabets ou de la numération.

Pendant plusieurs siècles, la normalisation a consisté à harmoniser et à déterminer des procédures ou des règles afin de mettre en place des ordres de grandeur et des unités de mesure qui seront utilisées par autant de personnes que possible (une unité de poids, une unité de distance, une unité de temps, etc.). Ces règles ne sont pas systématiquement contraignantes.

Toutefois, afin de faciliter l'interchangeabilité internationale dans le domaine industriel, il est essentiel d'établir et d'adopter un système normatif commun: simplifier les codes pour une meilleure compréhension de tous et échanger les produits de la meilleure manière possible. Les avantages techniques de la normalisation sont incontestables et favorisent la production aussi bien que l'économie [18].

La standardisation a commencé dans le monde entier dans le champ électrotechnique en 1906 avec la création d'International Electronics Commission (IEC). Alors, en 1940, le Département de la Défense américain a publié les « military normes ». Les premières normes internationales sont apparues selon le titre « La Température de Référence standard de Mesures de Longueur Industrielles » en 1951.

Entre les années 1960 et 2019, l'Organisation internationale de normalisation (ISO) a commencé à s'impliquer dans le tolérancement, en particulier au niveau de la symbolique. En dépit de diverses opinions au niveau de la symbolique et de son interprétation, la norme ASME Y14.5 est publiée dans sa version de 1994. Pour parler d'un langage universel (uniforme mondialement) aujourd'hui, la norme *ASME Y14.5-*

1994 (*American Society of Mechanical Engineers*) est presque identique à la norme ISO. En 1995, la norme GPS a été proposée (*Geometrical Product Specification : Spécifications géométriques du Produit*). La norme ISO résume la proposition par une matrice nommée : *matrice GPS*. La *matrice GPS* est décrite précisément dans le document d'ISO : spécification géométrique des produits (GPS) Schéma directeur FD CR ISO/TR 14638 décembre 96, cette norme devient le modèle SKIN plus tard. Pour suivre l'évolution de la technologie et de l'informatisation, la normalisation tend vers une formulation plus mathématique, dans le but d'avoir des normes qui seront plus facilement intégrables dans les systèmes de CFAO. La figure suivante montre une vue globale de l'évolution de la normalisation :

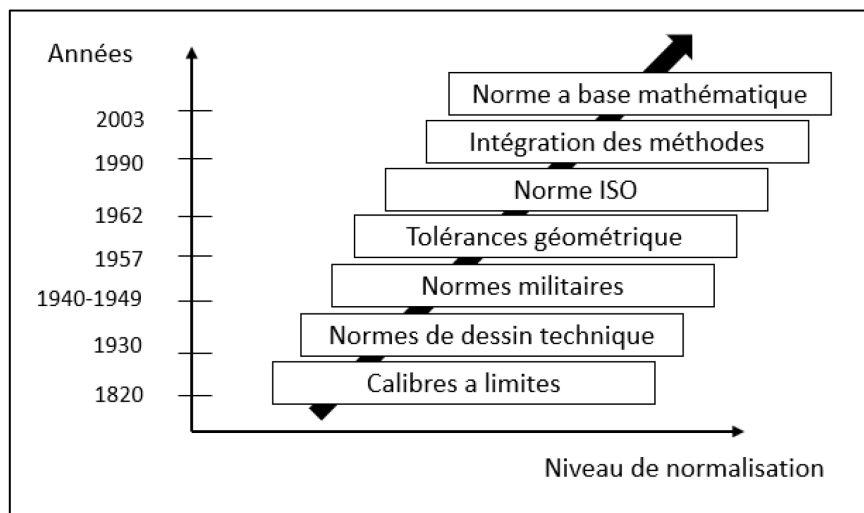


Figure 1 : L'évolution de la normalisation jusqu'à nos jours [4]

Toutefois, les normes ne présentent aucune hypothèse théorique à suivre en ce qui concerne la tolérance fondée sur un modèle mathématique ou une méthode de vérification du bon fonctionnement d'un système mécanique. Les normes ne couvrent que les parties isolées et ne considèrent pas le mécanisme à part pour l'ajustement. Cela

justifie le fait que, dans l'industrie d'aujourd'hui, on ne peut jamais être certain d'avoir une tolérance exacte des pièces, ce qui complique le processus de fabrication.

Même en ce qui concerne les logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO), il est difficile de fournir un modèle qui tienne compte des spécifications fonctionnelles de tolérance et des données d'ajustement. Il faut dire que certains logiciels font l'étude de tolérancement pour deux dimensions (Solidworks, Inventor...). Pour l'étude tridimensionnelle, il faut toujours avoir recours à l'utilisateur qui doit intervenir pour guider le logiciel.

1.3- Chaîne de tolérance

La chaîne de cotes est une boucle fermée constituée, en partant, par la condition fonctionnelle (représentée par des lignes d'attache liés à deux surfaces appartenant à deux pièces différentes) et passant par d'autres surfaces de pièces de mécanisme jusqu'au retour à la surface terminale (CF) [19][20][21].










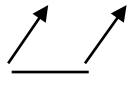



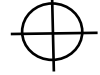
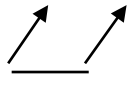
La chaîne de tolérances est principalement constituée par trois éléments : géométrique et dimensionnelle d'une zone de tolérance où l'intervalle, l'analyse et la synthèse de la tolérance sont utilisés pour réaliser la conception ou prouver un assemblage sur la base d'éléments nommés auparavant. Dans les logiciels actuels, les tolérances sont représentées comme des textes qui n'ont aucun lien avec l'assemblage. Les tolérances sont disponibles juste pour des pièces individuelles.

1.3.1-Spécifications géométriques

Une spécification géométrique sert à bien distribuer le tolérancement et le jeu fonctionnel de mécanisme d'une façon adéquate sur toutes les surfaces de la géométrie selon leur importance. On peut diviser la chaîne de cote en deux catégories : 1) Dimensionnement et tolérancement des assemblages et 2) Dimensionnement et tolérancement des pièces isolées.

En ce qui concerne le dimensionnement et le tolérancement des pièces isolées, le concepteur peut faire la distribution adéquate en se basant sur le tolérancement indiqué dans le tableau 1 :

Tableau 1 : Tableau de tolérances géométriques [3]

Forme		Orientation	Position	Battement
 RECTITUDE	 CYLINDRICITE	 PARALLÉLISME	 CONCENTRICITÉ	
 PLANÉITÉ	 PROFESSEURIL D'UNE LIGNE	 PERPENDICULARITÉ	 SYMETRIE	
 CIRCULARITÉ	 PROFESSEURIL D'UNE SURFACE	 INCLINAISON	 LOCALISATION	 TOTAL

1.3.1-Spécifications dimensionnelles

Pour bien définir une cote dans un dessin technique, il faut préciser ces spécifications dimensionnelles qui sont des normes à respecter lors de la production ou de l'usinage après.

1.3.1.1-Cote et cotation dimensionnelle

Une cote est une spécification dimensionnelle qui représente un ensemble borné de dimensions admissibles.

Exemple d'une cote :

$80^{+0.2}_{+0.1}$ Avec

80 : Cote nominale

+0.2 : Écart supérieur

+0.1 : Écart inférieur

Une cotation dimensionnelle est l'ensemble de cotes nécessaires à la fabrication d'une pièce mécanique. Cependant, coter, c'est inscrire de manière lisible et exacte les mesures des dimensions sur un dessin et, pour cela, il faut utiliser l'écriture normalisée. Le but principal de la cotation, c'est de réaliser un objet à partir d'un dessin.

1.3.1.2-Cote nominale [11]

N'importe quelle pièce mécanique est définie par le concepteur afin de s'assurer de son bon fonctionnement et, en même temps, de garder le prix de fabrication minimal. À partir d'un cahier de charge, le concepteur choisit les solutions techniques les plus adéquates et définit le dessin d'ensemble le plus détaillé ainsi que le dessin de définition. Une pièce est donc définie par :

- Sa forme nominale qui est limitée par des surfaces géométriques simples (plans, cylindres, etc.) ou complexes ;
- Ses dimensions nominales, définies par des valeurs numériques (appelées aussi cotes sur les dessins) ;

1.3.1.3-Cote minimale

Une cote tolérancée est composée de la cote maximale, cote minimale, de l'écart supérieur, de l'écart inférieur et de son intervalle de tolérance. Ces termes seront définis dans les sections suivantes.

Une cote minimale est une cote qui laisse la moins grande quantité de matière sur la pièce. Elle correspond généralement à la cote minimum d'une dimension extérieure ou à la cote maximum d'une dimension intérieure est définie par :

$$\text{Cote minimale} = \text{Cote nominale} + \text{Écart inférieur} \quad (1.1)$$

1.3.1.4-Cote maximale

Cote qui laisse la plus grande quantité de matière sur la pièce. Elle correspond généralement à la cote maximum d'une dimension extérieure ou à la cote minimum d'une dimension intérieure. Cette cote maximale est définie par :

$$\text{Cote maximale} = \text{Cote nominale} + \text{Écart supérieur} \quad (1.2)$$

1.3.1.5-Intervalle de tolérance

À cause de l'incertitude due à l'imprécision des méthodes de fabrication (usure de l'outil par exemple), l'indication d'une cote ne suffit pas. On devra préciser, en plus de la cote théorique, l'intervalle dans lequel pourra varier la cote réelle (après fabrication) [12][13].

Il représente la variation admissible de la dimension. On peut le calculer de deux façons :

$$\text{➤ Intervalle de tolérance} = \text{Cote maximale} - \text{Cote minimale} \quad (1.3)$$

$$\text{➤ Intervalle de tolérance} = \text{Écart supérieur} - \text{Écart inférieur} \quad (1.4)$$

1.3.1.6-Cote moyenne

La cote moyenne peut être calculée de trois façons :

➤ $Cote\ moyenne = (Cote\ minimale + Cote\ maximale) / 2$ (1.5)

➤ $Cote\ moyenne = Cote\ minimale + (Intervalle\ de\ tolérance) / 2$ (1.6)

➤ $Cote\ moyenne = Cote\ maximale - (Intervalle\ de\ tolérance) / 2$ (1.7)

1.3.2-Zone de tolérance

Une zone de tolérance est un volume contenant une partie ou la totalité d'une surface géométrique, sachant que la surface peut prendre diverses formes (plan, ligne, point), où le concepteur a commis des erreurs.

On peut même superposer plusieurs zones de tolérance sur la même surface, mais elles doivent toutes répondre aux normes et aux priorités : la tolérance dimensionnelle vient en premier par ordre d'importance, puis on a la tolérance de localisation suivie par la tolérance d'orientation et enfin la tolérance de forme.

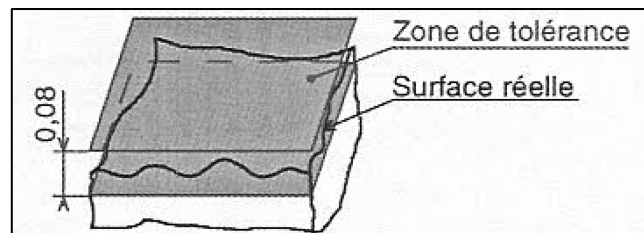


Figure 2 : Exemple de zone de tolérance [3]

1.4-Définition de l'analyse et la synthèse des tolérances

L'analyse et la synthèse des tolérances dimensionnelles et géométriques est une étape importante dans la simulation totale du cycle de vie d'un produit en conception assistée par ordinateur et de systèmes de fabrication. Le développement de tolérances CFAO est basée sur la maîtrise des quatre phases successives du processus de tolérance : la représentation, la spécification, l'analyse et la synthèse des tolérances.

Plusieurs études sont consacrées exclusivement à ces deux domaines. L'analyse consiste à vérifier les tolérances présentes sur le modèle géométrique. Cependant, la synthèse sert à distribuer la condition fonctionnelle (jeu) sur les tolérances des pièces dans le modèle.

La figure 3 montre la différence entre les deux types de problèmes que l'on rencontre en tolérancement (analyse et synthèse en tolérancement).

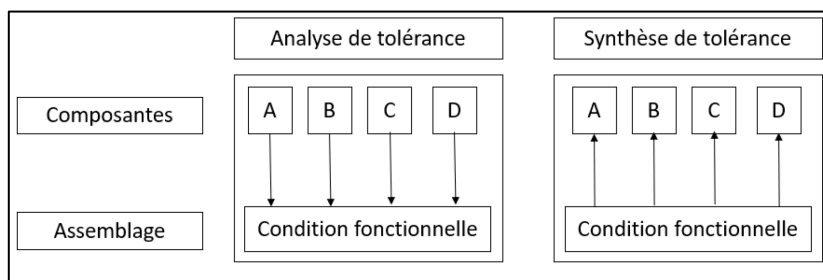


Figure 3 : comparaison entre l'analyse et la synthèse [4]

Par rapport la figure 3, on peut dire que l'analyse de tolérance est la vérification des tolérances avec la condition fonctionnelle. Cependant, la synthèse de tolérance est la distribution des tolérances en se basant sur la condition fonctionnelle.

1.4.1-L'analyse de tolérance

L'analyse de tolérance est le nom de nombreuses méthodes utilisées dans la conception des produits d'aujourd'hui afin de comprendre comment les défauts de fabrication et d'assemblage combinés influencent la capacité du produit à répondre aux attentes du client. L'analyse de tolérance est un moyen de comprendre comment les variations de taille des composantes et des sources de contraintes d'assemblage influent sur la capacité du produit à satisfaire aux exigences de conception tout en respectant le processus de production et la capacité des chaînes d'approvisionnement.

La tolérance affecte directement le prix et la performance des produits. Par exemple, si on prend la balance d'or, plus les pièces de la balance sont bien tolérées, plus elle nous donnera des mesures de masse d'or adéquates, ce qui engendre des effets remarquables sur le prix pour le client. L'analyse de tolérance peut déterminer si la distance évaluée spécifiée par l'ingénieur satisfait les besoins de sécurité, en tenant compte de l'impact des changements pendant la production et l'assemblage.

Dans ce cas, le concepteur peut poser la question suivante : **POURQUOI L'ANALYSE DE TOLÉRANCE EST-ELLE IMPORTANTE EN PHASE DE CONCEPTION ?** Avec les cycles de vie des produits en abrégé, des délais de mise sur le marché de plus en plus courts, et des coûts de plus en plus serrés, les différences entre un produit et un autre concurrent résident maintenant dans des détails de conception. Les ingénieurs tentent donc d'optimiser le temps de cycle, la qualité et les coûts. Ils cherchent à connaître les raisons pour lesquelles les pièces et l'assemblage qu'ils ont reçus de la production ne correspondent pas exactement à ce qu'ils s'attendaient, et tentent ensuite d'optimiser les tolérances sur la prochaine version du produit. L'optimisation de la tolérance au cours de la conception a un impact positif sur les rendements de production, et de meilleurs rendements affectent directement le coût et la qualité du produit.

L'analyse de tolérance et des variations permet également aux ingénieurs d'éviter de longues itérations lorsqu'ils arrivent vers la fin du cycle de développement d'un produit.

Conscientes de ce que peut apporter l'analyse de tolérance, de nombreuses industries cherchent à améliorer leur compétitivité.

1.4.2-La synthèse de tolérancement

L'existence d'une bonne méthode de synthèse facilite la tâche du concepteur. Un modèle d'optimisation (distribution de tolérance) aide le concepteur à réduire le temps de conception. Selon le bon fonctionnement du mécanisme, cette méthode calcule les bornes supérieure et inférieure de tolérance sur les différentes pièces constituant ce mécanisme. Rappelons que la condition de bon fonctionnement est exigée par les clients ou les fournisseurs de pièces.

1.4.3-Méthodes d'analyse et de synthèse en tolérancement assisté par ordinateur

Il existe plusieurs méthodes pour appliquer l'analyse et la synthèse en tolérancement. Les méthodes les plus utilisées sont les méthodes déterministes (Worst-case) et statistiques.

Dans la production en série, l'écart de fabrication des pièces présente souvent une certaine distribution de probabilité, donc la présentation de l'analyse statistique de la tolérance et de la conception est basée sur un tel fait.

Les erreurs de pièces dans le traitement mécanique obéissent principalement à une distribution normale, comme le montre la figure 4 :

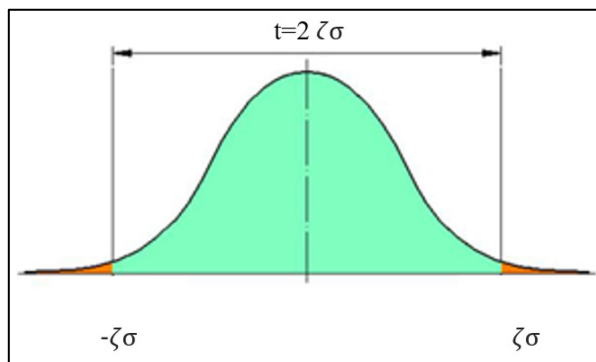


Figure 4 : Zone d'erreurs pour une distribution normale et intervalle de confiance

Généralement, la largeur de l'intervalle $[-\zeta\sigma, +\zeta\sigma]$ est considérée comme la tolérance t de la pièce, où σ est l'écart type. Selon la méthode d'analyse de tolérance 6σ , les erreurs d'usinage d'une pièce sont comprises dans l'intervalle $[-3\sigma, +3\sigma]$ pour un taux de rejet de seulement 0.27% , et les erreurs d'usinage se situent dans l'intervalle $[-1.96\sigma, +1.96\sigma]$ pour un taux de rejet de 5%.

Un problème de tolérancement peut être résolu soit par la méthode classique du cas le plus défavorable (déterministe), soit par la méthode statistique. La méthode déterministe garantit un taux de qualification du produit à 100% et une interchangeabilité totale des pièces assemblées, ce qui entraîne des tolérances plus strictes et des coûts de production plus élevés, notamment lorsque le nombre de pièces assemblées augmente. D'autre part, la méthode statistique repose sur l'hypothèse qu'un pourcentage raisonnable de pièces non conformes peut se produire, ce qui entraîne une réduction des coûts de fabrication, d'assemblage et de contrôle, en particulier dans la fabrication en série.

Par la suite, le chapitre suivant donne un aperçu sur les notions citées précédemment pour élaborer un modèle pour permettre d'appliquer l'analyse et la synthèse en tolérancement. Ce modèle sera utilisé dans les deux domaines : déterministe (Worst-Case) et statistique.

CHAPITRE 2 : DESCRIPTION DE MODÈLE JACOBIEN-TORSEUR

2.1- Théorie de modèle J-T pour l'analyse en tolérancement

Une étude[4] a été menée par le professeur Ghié Walid en 2004 afin d'élaborer un modèle unifié entre les matrices jacobiniennes et les zones de tolérances par torseurs. Ce modèle est donné par l'équation généralisée suivante :

$$[CF]=[J] \times [EFs] \quad (2.1)$$

Où :

[CF] : Matrice colonne des tolérances sur la condition fonctionnelle.

[J] : Ensembles de matrices jacobiniennes des éléments fonctionnels.

[EFs] : Matrice colonne qui sert à définir en même temps les dispersions de translations et de rotations des éléments fonctionnels.

Les matrices [CF] et [EFs] contiennent des valeurs réelles. Dans l'intention d'avoir une expression mathématique qui prend en considération les intervalles au lieu d'un point unique, les contenus de ces matrices doivent être exprimés par intervalles. L'introduction des intervalles dans les matrices [CF] et [EFs] dans l'expression finale est ainsi :

$$\begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} = [[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EF1} \dots [J_{6n-5} J_{6n-4} J_{6n-3} J_{6n-2} J_{6n-1} J_{6n}]_{EFn}] \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{EF1} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{EFn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Où:

$$[CF] = \begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{CF}, [EFi] = \begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{EFi}$$

: Représentent des torseurs de petits déplacements associés à une condition fonctionnelle, une paire d'éléments fonctionnels internes ou à une paire de contact. En fait, chacun contient deux éléments fonctionnels qui appartiennent à la même pièce. Toutefois, certains contacts sont définis en fonction des liens entre les différents éléments.

$$[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EFi}$$

: Toutes les paires de matrice jacobienne 6x6 couplées aux paires d'éléments fonctionnels. Chaque matrice représente les contributions (translation et rotation) de la paire sur l'état de fonctionnement en question.

N : Nombre de torseurs dans la chaîne cinématique.

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}$: Limites minimales des u, v, w, α , β , δ .

$\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\delta}$: Limites maximales des u, v, w, α , β , δ .

La représentation inter-matrice, telle qu'elle est offerte, représente mieux la réalité de la tolérance. La dispersion d'un état fonctionnel est représentée par la colonne matricielle [CF]. La colonne matrice [EFs] contient la distribution des éléments fonctionnels et les incertitudes de quelques contacts.

Les deux matrices comprennent des intervalles de tolérance de translation et de rotation. Cette expression est utilisée pour représenter la tolérance avec une bande de tolérance, au lieu d'un point. Les termes utilisés dans l'expression sont identiques à

ceux utilisés par la modélisation jacobienne. En fait, certaines valeurs de $(u, v, w, \alpha, \beta, \delta)$ contiennent des zéros.

Par la suite, les détails du modèle J-T seront abordés. En effet, le modèle consiste à appliquer six théories :

- 1) Obtention de la chaîne de cotes
- 2) Obtention des torseurs d'éléments fonctionnels internes
- 3) Obtention des torseurs de zones de contact
- 4) Obtention de la matrice jacobienne
- 5) Calcul du torseur de la condition fonctionnelle
- 6) Application pour l'analyse en tolérancement

Par la suite, ces six étapes seront expliquées en détails en indiquant le démarche à suivre pour assembler tous les paramètres de calcul de la CF.

Obtention de la chaîne de cotes :

Pour pouvoir utiliser un modèle unifié, il faut prendre des mesures préalables très importantes afin de déterminer la chaîne de cotes autour des conditions fonctionnelles dans le mécanisme.

Dans le but d'obtenir ce dernier, le modèle est basé sur l'identification des surfaces de contact entre les différentes composantes. L'identification de ces surfaces permet d'obtenir le graphe de liaison du mécanisme concerné comme l'indique la figure 5.

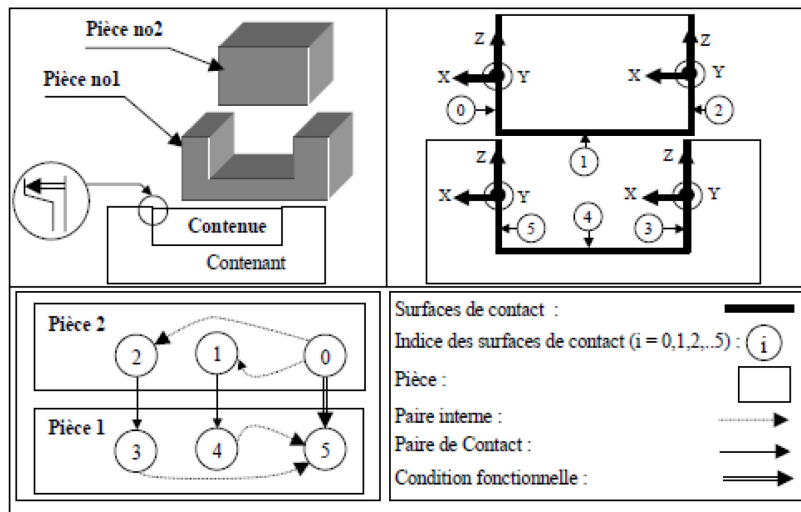


Figure 5 : Surfaces de contact, graphe de liaisons et référentiels fixes de blocs simples [4]

Après avoir déterminé cette chaîne, il est nécessaire d'associer des référentiels à chacune des surfaces de contact dans celle-ci. Le vecteur de la condition fonctionnelle a son origine et son référentiel (référentiel global) sur la première surface dans la chaîne de cotes. Il se termine sur la dernière surface dans la chaîne avec le dernier référentiel. Les référentiels servent à déterminer l'orientation et la position de ces surfaces par rapport au système global (origine de la chaîne).

La chaîne de tolérance comprend des paires d'éléments fonctionnels et paires de contact. La transition entre ces composants fonctionnels est réalisée à l'aide d'une série de transformations qui ont chacun un système d'axes propre. Par conséquent, la matrice de colonne de droite de l'équation (2.2) contient deux types de torseurs: torseurs de petits déplacements d'éléments fonctionnels internes et torseurs de contact entre éléments fonctionnels appartenant à des pièces différentes.

Obtention des torseurs d'éléments fonctionnels internes (Torseurs de zones de tolérances) [4] :

La matrice colonne de droite contient un ensemble de torseurs de zones de tolérances dans une chaîne de cotes. Chaque torseur est associé aux paires d'éléments fonctionnels appartenant à une même pièce. Dans une paire, la deuxième surface doit être tolérée par rapport à la première. Le torseur obtenu contient trois dispersions en translation (u , v et w) et trois dispersions en rotation (α , β et δ). Ce dernier doit avoir des limites minimales et maximales.

Dans la chaîne des scores obtenus au stade préliminaire du modèle unifié, une série de paires d'éléments fonctionnels est obtenue et chaque paire a un torseur d'éléments tolérés par rapport à celui qui l'a précédé. Ces torseurs sont obtenus en se basant sur les contraintes des zones de tolérance et l'application de la notion de projection sur ce torseur. [4]

Le tableau 2 montre un torseur général d'une paire d'éléments fonctionnels et ses différents termes :

Tableau 2 : Équations d'un torseur d'EF par intervalles [4]

Torseur	Désignation de termes de torseur
$[EFi] = \begin{bmatrix} \underline{u} & \overline{u} \\ \underline{v} & \overline{v} \\ \underline{w} & \overline{w} \\ \underline{\alpha} & \overline{\alpha} \\ \underline{\beta} & \overline{\beta} \\ \underline{\delta} & \overline{\delta} \end{bmatrix}_{EFi}$	<p>$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}$: limites minimales des $u, v, w, \alpha, \beta, \delta$; $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\delta}$: limites maximales des $u, v, w, \alpha, \beta, \delta$; i : indique l'élément toléré i par rapport au précédent $(i-1)$, i varie entre 0 et N.</p>

En résumé, ce type de torseur peut être obtenu en deux étapes : premièrement, il est possible d'obtenir le *torseur classique* en se basant sur le tableau 6 page 26 répertoriant les zones de tolérance. Deuxièmement, il est possible de déterminer le *torseur projeté* par la projection du *torseur classique* afin d'obtenir un torseur respectant la direction de déplacement de la totalité de la zone de tolérance en question. Cette projection est établie par un changement de base appliqué au *torseur classique* déterminé au début de l'étude.

Obtention des torseurs de zones de contact (Torseurs de contact) [4]: dans la chaîne de valeurs obtenues à l'étape préliminaire du modèle unifié, une série de paires d'éléments fonctionnels de contact est obtenue et chaque paire est associée à un torseur selon le type de contact (lien).

Ces torseurs sont obtenus par des formes générales de liaison entre les éléments de contact associés aux méthodes de mesure par métrologie dans le cas non cylindrique et par application du concept de projection à ce torseur.

Les torseurs de contact sont intégrés dans la matrice colonne de droite de l'équation générale du modèle unifié. De toute évidence, le torseur qui en résulte contient trois dispersions translationnelles (u , v et w) et trois dispersions rotationnelles (α , β et δ).

Les dispersions translationnelles et rotationnelles doivent avoir des limites minimales et maximales similaire aux couples de paires d'éléments fonctionnels internes.

Il est à noter qu'un torseur de contact a la même forme qu'une zone de tolérance sauf que le torseur de contact est relatif à des valeurs résultant des spécifications de réglage dans le cas d'un contact d'arbre-alésage ou de l'incertitude de mesure dans tous les autres cas.

Obtention de la matrice jacobienne : la matrice $[J]$ de l'équation 2.1 est une matrice jacobienne, qui peut être définie comme étant la matrice d'influence caractérisant le système mécanique.

Chaque colonne J_i de la matrice d'influence résulte de la contribution unitaire de chaque joint sur le dernier membre de la chaîne cinématique. Le tableau 3 illustre les différents termes d'une matrice jacobienne.

Tableau 3 : Équation d'une matrice jacobienne [4]

Matrice jacobienne	Désignation de terme de torseur
$[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EFi}$	<p>EFi : indique que la matrice jacobienne sert à déterminer les contributions de l'élément fonctionnel i sur la condition fonctionnelle de la chaîne de cotes avec $i=1, 2, \dots, N$ sachant que N est le nombre de torseurs à exprimer dans le référentiel global 0;</p> <p>$[J_1 J_2 J_3]_{EFi}$: contribution unitaire des dispersions en translation.</p> <p>$[J_4 J_5 J_6]_{EFi}$: contribution unitaire des dispersions en rotation.</p>

La matrice $[J]$ consiste en un ensemble de N (nombre de paires d'éléments fonctionnels dans une chaîne cinématique) matrices 6×6 de forme $[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EFi}$. Chaque colonne du tableau représente la contribution (en translation et en rotation) de la paire donnée à la condition fonctionnelle en question. Ce dernier est utilisé pour exprimer le torseur classique projeté de l'élément i dans le réf 0 .

Toutefois, la matrice jacobienne est définie comme une matrice de changement de coordonnées globales allant de la référentiel i à la référentiel globale 0 .

Cette matrice (la matrice $[J]$) repose sur trois autres matrices : la première matrice $[T_0^i]_{4 \times 4}$ de transformation du référentiel i dans le référentiel 0 ; la deuxième matrice $[R_{PTi}]_{3 \times 3}$ de changement de base du référentiel i pour respecter le déplacement de la totalité d'une zone de tolérance ; et la troisième matrice $[W_i^n]_{3 \times 3}$ qui est une matrice « pré-vectorielle ». Deux vecteurs de position sont extraits de la matrice de conversion des éléments fonctionnels pour obtenir la dernière matrice.

Le premier vecteur est le vecteur de position reçu de la matrice de transformation $[T_0^i]_{4 \times 4}$ de l'élément i (l'élément considéré). Le deuxième vecteur est reçu, à son tour, de la matrice de transformation $[T_0^n]_{4 \times 4}$ du dernier élément de la chaîne de cotes. La

combinaison de ces trois matrices donne l'équation finale de la matrice jacobienne simplifiée $[J]_{EFi}$ ou $[J]_0^i$.

Cette relation devrait être incorporée dans l'expression finale du modèle unifié afin de remplacer les termes utilisés dans le modèle $[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EFi}$.

Calcul du torseur de la condition fonctionnelle : la colonne matricielle de gauche de l'équation générale représente le torseur d'une condition fonctionnelle dans une chaîne de cotes.

Pendant l'application de l'étape préliminaire, le vecteur de l'état fonctionnel origine sur la première surface dans la chaîne de cotes et se termine sur la dernière surface de celui-ci.

Pour l'analyse de tolérance, cette dernière surface reçoit la somme des dispersions de la chaîne. La colonne de gauche du modèle détermine comment la surface se déplace et donne un jeu cumulatif représenté dans le repère global.

La matrice jacobienne prend en charge cette transformation (cumul) sur les différentes zones (zones de tolérance et zones de contacts) dans le système global. Le torseur de la condition fonctionnelle obtenu contient trois dispersions en translation (u , v et w) et trois dispersions en rotation (α , β et δ).

Ces dispersions doivent être minimales et maximales. Le tableau 2-3 présente une condition fonctionnelle et ses différentes terminologies :

Tableau 4 : Équation d'un torseur d'une CF

Torseur	Désignation de termes de torseur
$[CF]$ $= \begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{CF}$	$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}$: limites minimales des u , v , w , α , β , δ . $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\delta}$: limites maximales des u , v , w , α , β , δ . CF : indique que le torseur sert à décrire les dispersions de la condition fonctionnelle.

Ce type de torseur est obtenu, en analyse, en multipliant la matrice jacobienne par les diverses paires de torseurs des éléments fonctionnels. En d'autres termes, la condition fonctionnelle obtenue est la somme de tous les éléments du torseur dans les systèmes locaux (système de référence sur les différentes surfaces de la chaîne des cotes) accumulés dans l'ensemble du système (système attaché à la première surface de la condition fonctionnelle).

Une condition fonctionnelle hérite alors du torseur de tolérancement relié à SATT et sera exprimé dans un repère localisé sur la première surface de condition fonctionnelle. Les composants de torseur nul correspondent aux degrés de liberté de la zone cumulée obtenues à partir de la transformation de tous les torseurs dans la chaîne de cotes en considération.

Application pour l'analyse en tolérancement : Une zone de tolérance (t) doit être spécifiée entre les paires d'éléments fonctionnels internes. En connaissant les conditions de contrainte entre ces éléments, on obtient des limites extrêmes de la condition fonctionnelle en fonction de la zone de tolérance correspondante.

Par conséquent, en un mot, les restrictions imposées à chaque point de dispersion suffiront à résoudre notre système final. Donc il est possible de déterminer la matrice jacobienne, qui est la matrice d'influence du système mécanique, et les dispersions des éléments fonctionnels, qui sont dans la colonne matricielle [EFs].

On obtient les dispersions de la condition fonctionnelle résultante par une simple multiplication des deux matrices [J] et [EFs]. Cette multiplication devrait prendre en considération les opérations de l'arithmétique par intervalles. [4]

2.1.1-Theorie de l'analyse déterministe par le modèle jacobien-torseur

Pour montrer l'utilisation du modèle unifié, il sera appliqué au problème d'analyse en tolérancement par la méthode déterministe. L'approche déterministe connu aussi sur le

nom de Worst-Case est une méthode simple à utiliser. Cette méthode est basée sur zéro default théorique. En effet, cette approche est conservatrice et considère la possibilité d'obtenir simultanément tous les composants à leurs limites de tolérances permises. Cette analyse est réalisée en quatre blocs :

Bloc #1 : détermination d'une chaîne de cotes tridimensionnelles autour d'une condition fonctionnelle (CF) à partir d'un graphe de liaison

La chaîne de cotes est modélisée par une chaîne cinématique. Un exemple (figure 5) servira de référence pour illustrer ces termes.

La figure ci-après montre un assemblage comprenant deux parties ayant une condition fonctionnelle entre deux plans en contact avec des blocs simples. En effet, l'objet de cet exemple est d'illustrer graphiquement les différents termes. Dans ce cas, les symboles sont omis pour clarifier le dessin.

Par la suite, voici les définitions des différents termes indiqués précédemment dans la figure 5.

Éléments fonctionnels (EFs) : La structure d'un système mécanique est habituellement modélisée par un graphique de contact pour montrer les pièces du système et les contacts entre les pièces. Ces éléments sont les éléments fonctionnels des pièces à assembler et peuvent être réels (contournant un cylindre, un cercle, etc.) ou fictifs (point, axe d'un cylindre, rencontre de deux plans « droite », etc.). [4]

Paires d'éléments fonctionnels internes (PEFIs) : Les deux éléments fonctionnels forment une paire d'éléments fonctionnels internes, à condition qu'ils appartiennent à la même pièce et qu'ils soient en contact avec les autres éléments. [4]

Paires d'éléments fonctionnels de contact (PEFCs) : Si les deux éléments fonctionnels sont physiquement en contact avec les différents éléments de tout mécanisme à assembler, ils ont une relation de contact.

Un contact physique est défini entre deux pièces ou deux éléments géométriques si, pendant l'opération du mécanisme, il y a peut-être une interaction mécanique entre les pièces ou éléments considérés.

Paire d'une condition fonctionnelle (PCF) : Les conditions fonctionnelles requises pour la connexion correspondent à l'espace entre les deux surfaces terminales, c'est-à-dire des surfaces qui ne sont pas sur une même pièce. En mode d'assemblage, les flèches doubles orientées sont utilisées pour indiquer la condition fonctionnelle.

Le figure ci-après montre la chaîne d'identification de ces différents éléments dans le même exemple afin de bien comprendre le principe:

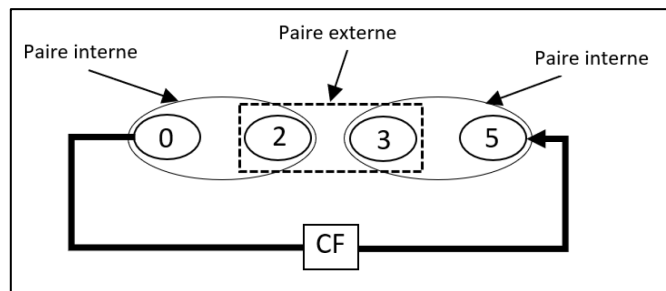


Figure 6 : Chaîne de cotes autour de la condition fonctionnelle des blocs simples [4]

La chaîne comprend deux paires de contacts internes (EF0, EF2), (EF3, EF5) et un contact entre les deux pièces par l'EF3 de la pièce n°1 et l'EF2 de la pièce n°2. Ensuite, il est nécessaire de relier des systèmes de référence à chacune des faces de contact dans la chaîne considérée.

Une paire d'éléments fonctionnels internes de la chaîne est identifiée. Pour chaque paire de surface, la deuxième surface doit être tolérancée par rapport à la première. Il faut identifier les paires d'éléments fonctionnels en contact dans la chaîne obtenue. Dans ce cas, il est nécessaire de vérifier si des données sont disponibles pour décrire l'incertitude du contact identifié.

Bloc #2 : de transformation homogène utilisé dans le domaine la théorie de probabilité :

L'arithmétique par intervalles : [1][3] est une arithmétique définie sur des intervalles, plutôt que sur des nombres réels.

Notation d'un élément par intervalles :

$$x = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (2.3)$$

Où :

$$\underline{x} : \text{limite inférieure} \qquad \bar{x} : \text{limite supérieure.}$$

Un élément de \mathbb{R}^n est noté par **un pavé** ou **une boîte**.

Le modèle unifié utilise les opérations $\{+, -, \cdot\}$ seulement. D'autre part, il n'y a aucune opération de division. Soit X et Y, on obtient des intervalles avec : $X = [\underline{x}, \bar{x}]$, $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$. On peut définir l'ensemble des opérations : $X \square Y = \{x \square y / x \in X, y \in Y\}$. Les règles ci-après s'appliquent à l'utilisation des méthodes de calcul : $X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$, $X - Y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$

La multiplication et la division sont calculées de la même manière, mais il faudrait tenir compte du signe des bornes. Aussi, pour d'autres fonctions fondamentales (comme la racine carrée, exponentielle, le sinus), on définit des fonctions qui prennent un intervalle pour la variable et rendent un intervalle comme la valeur.

Tableau 5 : Opérations pour les multiplications de l'arithmétique par intervalles [4]

$x.y$	$y \geq 0$	$0 \in y$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$[x\underline{y}, \overline{x}y]$	$[\overline{x}y, \overline{x}y]$	$[\overline{x}y, \underline{x}y]$
$0 \in x$	$[x\underline{y}, \overline{x}y]$	$[\min(x\underline{y}, \overline{x}y), \max(x\underline{y}, \overline{x}y)]$	$[\overline{x}y, \underline{x}y]$
$x \leq 0$	$[x\underline{y}, \overline{x}y]$	$[x\underline{y}, \underline{x}y]$	$[\overline{x}y, \underline{x}y]$

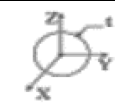
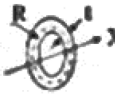
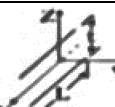
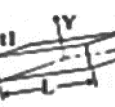
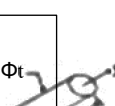
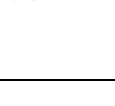


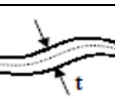
Dans l'arithmétique par intervalles, les nombres sont donc remplacés par les intervalles, les vecteurs par les vecteurs d'intervalles et les matrices par les matrices d'intervalles. L'intérêt est que l'incertitude sur les données est par nature prise en compte.

Effectivement, l'arithmétique par les intervalles permet d'utiliser des opérations matricielles (multiplication, addition, soustraction, etc.). Ces dernières utilisent des opérations réelles en suivant les règles de l'arithmétique des intervalles. [4]

Torseurs de petits déplacements : [2] Afin de résoudre les problèmes de la combinaison de surface et de nuages de points, le concept de petit déplacement a été proposé.

Ce principe, utilisé à l'origine dans le domaine de la métrologie sur une machine de mesure des coordonnées afin de mettre au point un logiciel associé, a depuis lors été utilisé plus largement, en particulier dans le contexte de la tolérance tridimensionnelle. Le torseur d'un élément fonctionnel montre les différentes dispersions de translations (u, v, w) et des rotations (α, β et δ). On peut obtenir un torseur en utilisant les degrés de liberté de l'élément. Par conséquent, un torseur peut être représenté par des intervalles en utilisant les contraintes du tableau 6. Cette expression doit être basée sur les valeurs limites. (Les limites minimales sont $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}$ et les limites maximales sont $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\delta}$ des petits déplacements $u, v, w, \alpha, \beta, \delta$.)

Tableau 6 : Contraintes des zones de tolérance par torseur [4]

Cas	Nom	Zone de tolérance	Torseur	Contraintes
1	Disque plan		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \\ w & 0 \end{Bmatrix}$	$\frac{-t}{2} \leq v \leq \frac{t}{2}, \frac{-t}{2} \leq w \leq \frac{t}{2}$ $v^2 + w^2 \leq \left(\frac{t}{2}\right)^2$
2	Anneau circulaire plan		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \\ w & 0 \end{Bmatrix}$	$v = \left(\frac{t}{2}\right) \cos(\theta); (v^2 + w^2) \leq \left(\frac{t}{2}\right)^2$ $w = \left(\frac{t}{2}\right) \sin(\theta)$
3	Bande rectiligne plane		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \\ w & 0 \end{Bmatrix}$	$\frac{-t}{2} \leq w \leq \frac{t}{2}; \frac{-t}{2} \leq \beta \leq \frac{t}{2}$
4	Parallélépipède		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ v & \beta \\ w & \delta \end{Bmatrix}$	$\frac{-t_2}{2} \leq v \leq \frac{t}{2}, \frac{-t_1}{2} \leq w \leq \frac{t_1}{2}$ $\frac{-t_2}{L} \leq \beta \leq \frac{t_2}{2}, \frac{-t_1}{2} \leq w \leq \frac{t_1}{L}$
5	Cylindre		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ v & \beta \\ w & \delta \end{Bmatrix}$	$\frac{-\Phi t}{2} \leq v \leq \frac{\Phi t}{2}, \frac{-\Phi t}{2} \leq w \leq \frac{\Phi t}{2}$ $\frac{-\Phi t}{L} \leq \beta \leq \frac{\Phi t}{L}, \frac{-\Phi t}{L} \leq \delta \leq \frac{\Phi t}{L}$ $v^2 + w^2 \leq \left(\frac{\Phi t}{2}\right)^2$
6	Anneau cylindrique		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \pm v & 0 \\ \pm w & 0 \end{Bmatrix}$	$v = \left(\frac{t}{2}\right) \cos(\theta); w = \left(\frac{t}{2}\right) \sin(\theta); (v^2 + w^2) \leq \left(\frac{t}{2}\right)^2$ $\frac{-\Phi t}{L} \leq \beta \leq \frac{\Phi t}{L}, \frac{-\Phi t}{L} \leq \delta \leq \frac{\Phi t}{L}$
7	Décalage d'un plan		$\begin{Bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \\ w & 0 \end{Bmatrix}$	$\frac{-t}{2} \leq w \leq \frac{t}{2}; \frac{-t}{L_1} \leq \alpha \leq \frac{t}{L_1}; \frac{-t}{L_2} \leq \beta \leq \frac{t}{L_2}$
8	Décalage d'une courbe		$\begin{Bmatrix} u & 0 \\ v & 0 \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}$	Non défini
9	Décalage d'une surface		$\begin{Bmatrix} u & \alpha \\ v & \beta \\ w & \delta \end{Bmatrix}$	Non défini

En résumé, un torseur est caractérisé par des intervalles dont les bornes de déplacements admissibles sont entre deux surfaces idéales (de forme parfaite), à l'intérieur de ces bornes peuvent varier les composantes du torseur de petits déplacements, l'orientation et la position relative entre les deux surfaces idéales sont modélisé dans une base donnée et un point donné. Alors, le torseur par intervalles caractérise une infinité de torseurs de petits déplacements au lieu d'un seul point. La figure 2.9 montre les différentes classes de zones de tolérance avec les torseurs et les contraintes correspondantes proposées par Desrochers [6].

Il faut aussi, dans le cadre de ce bloc, obtenir la matrice d'orientation $[R_{PTi}]_{3 \times 3}$ pour chaque référentiel d'une zone de tolérance, ou d'une zone de contact, pour que le torseur classique puisse prendre en compte le déplacement de la totalité de la zone étudiée par l'équation suivante :

$$[R_{PTi}] = [\vec{C}_1 \quad \vec{C}_2 \quad \vec{C}_3] \quad (2.4)$$

Les colonnes \vec{C}_1 , \vec{C}_2 et \vec{C}_3 désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes \vec{X}_i , \vec{Y}_i et \vec{Z}_i d'orientation inclinée de la zone de tolérance selon la direction à analyser dans le repère i .

Il faut aussi déterminer l'ensemble des matrices jacobiniennes $[J]_{EFi}$ ou $[J]_0^i$ pour chaque élément fonctionnel étudié (paire interne ou contact).

Bloc #3 : de la détermination de la projection des torseurs pour chacune des surfaces appartenant aux paires d'éléments fonctionnels internes et de contact qui consiste à :

Déterminer l'ensemble des *torseurs classiques* $[EF_i]$ pour chacune des paires d'éléments fonctionnels (les paires internes et les paires de contacts) trouvées. Cette étape est basée sur les contraintes des zones de tolérance (tableau 6) et les contraintes de mesure décrites dans l [4].

Déterminer la projection de chaque torseur classique de bloc 2 selon la direction de déplacement de la zone de tolérance en utilisant la matrice d'orientation $[R_{PTi}]_{3 \times 3}$ et le principe de changement de base [4]. Notons qu'il faut aussi appliquer cette étape aux

Dans le chapitre 3, la méthodologie du modèle unifié de la figure 7 est appliquée à deux exemples (blocs inclinés et contre pointe) pour mieux comprendre la démarche à suivre dans l'utilisation de ce modèle.

2.1.2-Application de l'analyse déterministe par le modèle jacobien-torseur

Dans cette section, le premier exemple traité est un assemblage constitué de deux pièces, l'une étant insérée dans l'autre. La figure montre une vue en perspective tridimensionnelle de ce dernier et les dessins techniques de chacune des pièces de l'assemblage avec la condition fonctionnelle entre les deux pièces.

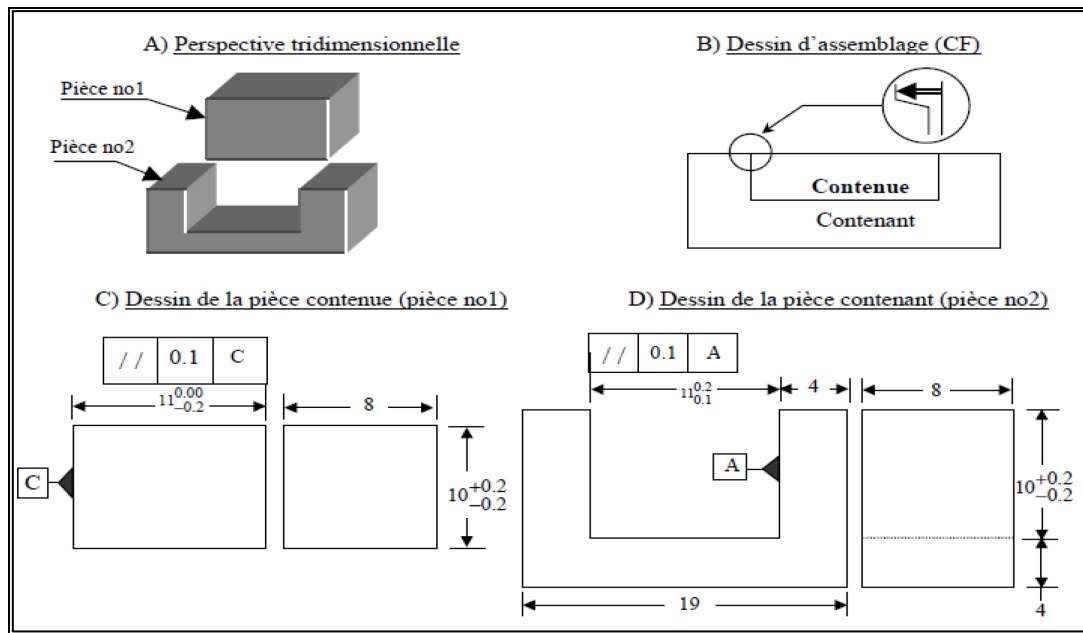


Figure 8 : Dessin de l'assemblage de blocs simples [4]

Premièrement, l'étape préliminaire du modèle unifié est appliquée. Cette étape sert à établir les surfaces de contact afin d'obtenir une chaîne de cotes autour de la condition fonctionnelle et d'associer une série de référentiels aux différentes surfaces identifiées dans la chaîne de cotes choisie. La chaîne peut être obtenue en utilisant les notions de graphe de liaisons entre les différentes pièces dans un mécanisme.

La figure suivante montre le mécanisme de l'exemple avec ses référentiels fixes et la chaîne de cotes autour de la condition fonctionnelle étudiée.

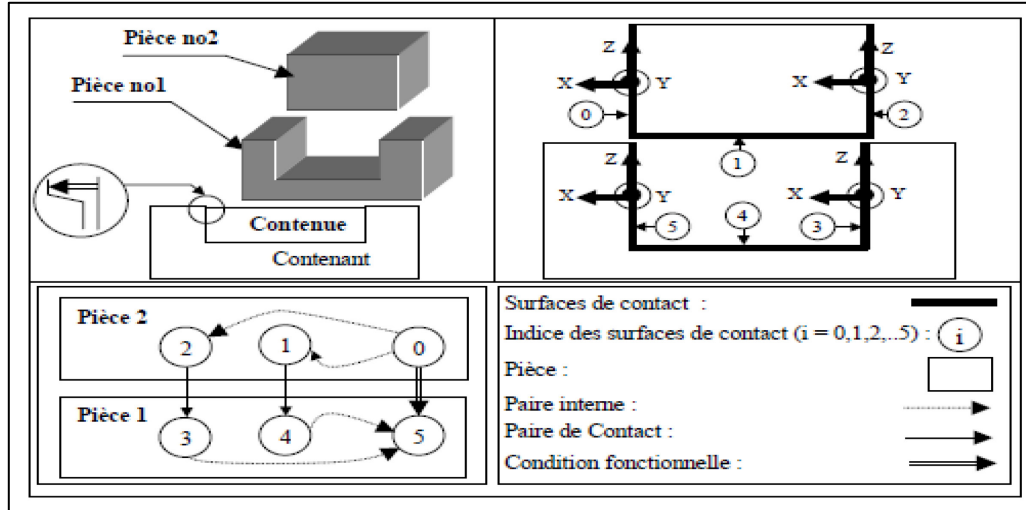


Figure 9 : Graphes de liaisons et la chaîne de cotes associée aux blocs simples [4]

Étape #1 : Analyse de la chaîne de cotes en tolérancement pour le modèle unifié :

La chaîne de cotes obtenue contient deux paires internes (EF_0, EF_2), (EF_3, EF_5) et un contact entre les deux pièces impliquant l' EF_2 de la pièce n°1 et l' EF_3 de la pièce n°2. Il faut déterminer les torseurs de ces paires internes : le premier torseur ($T_{2/0}$) de l'élément 2 par rapport à l'élément 0; le deuxième torseur ($T_{5/3}$) de l'élément 5 par rapport à l'élément 3. La détermination des torseurs de contact de type plan-plan est basée sur les notions de mesure en métrologie. Étant donné qu'aucune donnée n'est disponible pour l'étude des paires de contact entre les deux plans (2 et 3), la paire de contact de ces deux plans sera négligée dans ce mécanisme.

Dans le mécanisme des blocs simples, les deux zones de tolérance identifiées (décalage d'un plan) sont orientées de façon équivalente. Autrement, les deux surfaces sont placées verticalement dans le mécanisme, donc selon une orientation correspondant à celle de la zone de tolérance classique standard. Dans ces conditions, les matrices d'opérateur de projection des surfaces (2) et (5), $[R_{PT2}]_{3 \times 3}$ et $[R_{PT5}]_{3 \times 3}$, sont associées à des matrices identités pour que les deux zones de tolérance respectent le déplacement

total des surfaces 2 et 5. Effectivement, l'intérêt des matrices $[R_{PT2}]_{3x3}$ et $[R_{PT5}]_{3x3}$ est moins remarquable dans ce cas parce qu'elles sont des matrices identités.

Selon la figure 10, les éléments fonctionnels (1) et (4) n'apparaissent pas dans le graphe de liaison parce que le modèle unifié ne considère qu'une chaîne de cotes à la fois. En effet, la chaîne étudiée pour cet exemple ne contient pas ces éléments fonctionnels.

Étape #2 : Obtention des matrices jacobiennes :

La matrice jacobienne est basée sur les matrices de passage entre un référentiel global et un référentiel d'éléments fonctionnels dans une chaîne de cotes. Afin d'exprimer les torseurs projetés, obtenus à partir du deuxième bloc du modèle unifié dans le système global, la matrice jacobienne pour chacune des zones de tolérance dans la chaîne doit être établie. La suite de cette section montre la démarche pour établir la matrice jacobienne afin de transformer le torseur $T_{2/0}$ de la zone de tolérance de l'élément fonctionnel 2 du référentiel 2 dans le référentiel global 0. L'obtention du torseur $T_{2/0}$ qui est exprimé dans le référentiel 2 sera détaillée plus loin dans cette section.

En appliquant l'équation de projection de torseur d'un référentiel à un autre, il suffit d'appliquer la formule suivante sur l'élément 2, on aura :

$$[J]_{EF2} = [J]_0^2 = \begin{bmatrix} [R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3} & \cdots & [W_2^5]_{3x3} \cdot ([R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{3x3} & \cdots & [R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3} \end{bmatrix}_{6x6} \quad (2.5)$$

La relation $[J]_{EF2}$ ou $[J]_0^2$ repose sur la matrice d'orientation $[R_{PT2}]_{3x3}$ de la surface 2 dans le mécanisme et deux autres matrices de transformation : La matrice $[T_0^2]_{4x4}$ de l'élément 2 et la matrice $[T_0^5]_{3x3}$ de l'élément 5 (le dernier élément de la chaîne de cotes).

La matrice d'orientation $[R_0^2]_{3x3}$ doit être obtenue à partir de la matrice de transformation du référentiel 2 au repère 0. Les trois premières colonnes et les trois premières lignes de la matrice 2 $[T_0^2]_{4x4}$ sont affectées à la matrice $[R_0^2]_{3x3}$.

L'obtention de la matrice pré-vectorielle $[W_2^5]$ à son tour est basée sur les vecteurs de position extraits des matrices de transformation $[T_0^2]_{4x4}$ et $[T_0^5]_{4x4}$. Les dernières colonnes des deux matrices $[T_0^2]_{4x4}$ et $[T_0^5]_{4x4}$ sont associées respectivement aux vecteurs de position \vec{d}_2 et \vec{d}_5 . Le tableau 5.1 montre les détails de calcul de la matrice $[W_2^5]$ des blocs simples en utilisant des référentiels fixes.

Tableau 7 : Matrice W de l'élément 5 par rapport à l'élément 2 pour les blocs simples [4]

Surface (EF)	Matrice de transformation $[T_0^i]_{4x4}$	Matrice d'orientation $[R_0^i]_{3x3}$	Vecteur de position \vec{d}_i	$\vec{d}_i^n = \vec{d}_n - \vec{d}_i$ avec la matrice pré-vectorielle est $[W_i^n]$ Ou $i=2$ et $n=5$
EF en cours (i=2)	$[T_0^2]_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[R_0^2]_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_2 = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_2^5 = \begin{bmatrix} dxn - dxi \\ dyn - dyi \\ dzn - dzi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Dernier EF dans la chaîne (n=5)	$[T_0^5]_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[R_0^5]_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[W_2^5] = \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

Dans la relation $[J]_{EF2}$, il faut calculer le produit matriciel entre la matrice pré-vectorielle $[W_2^5]_{3x3}$ (tableau précédent) et la matrice $([R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3})$. Étant donné que les deux matrices $[R_0^2]_{3x3}$ et $[R_{PT2}]_{3x3}$ sont des matrices identités, le produit final est lui-même une matrice identité.

$$[W_2^5]_{3x3} \cdot ([R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

L'expression finale de la matrice jacobienne simplifiée est ainsi :

$$J]_{EF1} = \begin{bmatrix} [R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3} & \cdots & [W_2^5]_{3x3} \cdot ([R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{3x3} & \cdots & [R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3} \end{bmatrix}_{6x6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Finalement, le même principe est appliqué au deuxième élément fonctionnel (surface 5) pour compléter la matrice totale de l'expression finale du modèle unifié. Le tableau 8 illustre le détail des calculs de la matrice jacobienne (l'ensemble des matrices jacobiniennes de l'élément 2 et de l'élément 5 du modèle unifié).

Tableau 8 : Matrices jacobiniennes pour les blocs simples [4]

Les composantes des matrices jacobiniennes		Paire interne (0,2)	Paire interne (3,5)
0 → i		0 → 2 (EF1)	0 → 5 (EF2)
Matrice de transformation	$[T_0^i]_{4x4}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matrice de rotation du référentiel i	$[R_0^i]_{3x3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matrice d'orientation du référentiel i pour respecter le déplacement de la zone de tolérance	$[R_{PTi}]_{3x3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matrice « pré-vectorielle »	$[W_i^n]_{3x3}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Calcul servant à déterminer la contribution de translation et de rotation	$([R_0^i]_{3x3} \cdot [R_{PTi}]_{3x3})$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Calcul servant à déterminer la contribution de la rotation pour la translation	$[W_2^5]_{3x3} \cdot ([R_0^2]_{3x3} \cdot [R_{PT2}]_{3x3})$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrice jacobienne simplifiée $[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EF}$	$\begin{bmatrix} [R_0^i]_{3 \times 3} \cdot [R_{PT1}]_{3 \times 3} & \cdots & [W_i^n]_{3 \times 3} \cdot ([R_0^i]_{3 \times 3} \cdot [R_{PT1}]_{3 \times 3}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{3 \times 3} & \cdots & [R_0^2]_{3 \times 3} \cdot [R_{PT2}]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
--	---	---	--

La dernière ligne (matrice jacobienne simplifiée) du tableau précédent sera intégrée directement dans l'expression du modèle unifié. Ainsi la dernière ligne devrait apparaître dans la matrice du milieu ([J]).

*Obtention des différents torseurs de la chaîne de cotes:

Lors de l'étude du mécanisme des blocs simples, par le modèle unifié, deux torseurs classiques doivent être calculés. L'obtention de ces torseurs est basée sur les zones de tolérance standards du tableau 6. Le deuxième élément fonctionnel de la paire (0,2) est un plan. Alors, la zone de tolérance de cette paire est un décalage d'un plan qui correspond au septième cas du tableau 6. À priori, l'élément 2 est tolérancé par rapport à l'élément 0.

Finalement, un premier torseur $T_{2/0}$ de l'élément fonctionnel 2 par rapport à l'élément fonctionnel 0 doit être obtenu. Le même principe est appliqué sur la deuxième paire (3,5), l'élément 5 de cette paire étant tolérancé par rapport à l'élément 3. En effet, un deuxième torseur $T_{5/3}$ dans la chaîne de cotes étudiée est établi.

Toutefois, pour obtenir les torseurs finaux du modèle unifié, deux principes doivent être pris en considération. Premièrement, les dispersions dans les torseurs classiques doivent être exprimées dans les référentiels locaux, advenant que les origines de chacun de ces référentiels se trouvent au bout de la cote nominale considérée. En plus, selon le principe d'indépendance de la norme, les tolérances dimensionnelles et d'orientations (géométriques) sont étudiées d'une façon indépendante. Deuxièmement, afin de déterminer les *torseurs projetés*, l'utilisation de l'inverse des matrices d'opérateur de projection $[R_{PTi}]_{3 \times 3}$ est prévue.

Pour obtenir le torseur classique $T_{2/0}$, les contraintes de tolérance dimensionnelle et d'orientation pour chaque dispersion de translation et de rotation doivent être déterminées. Ces contraintes seront exprimées dans le système local du référentiel X_2, Y_2, Z_2 . De plus, dans le but de respecter le déplacement et l'orientation de la zone de tolérance de la surface 2, il faut déterminer la projection du torseur classique $T_{2/0}$ dans la direction de son déplacement dans le mécanisme.

La figure 10 montre la cote nominale entre les surfaces 0 et 2 de la pièce n°1, la position de la zone de tolérance *dimensionnelle* et de la tolérance d'orientation (*parallélisme*) de la surface 2 ainsi que le référentiel de cette surface.

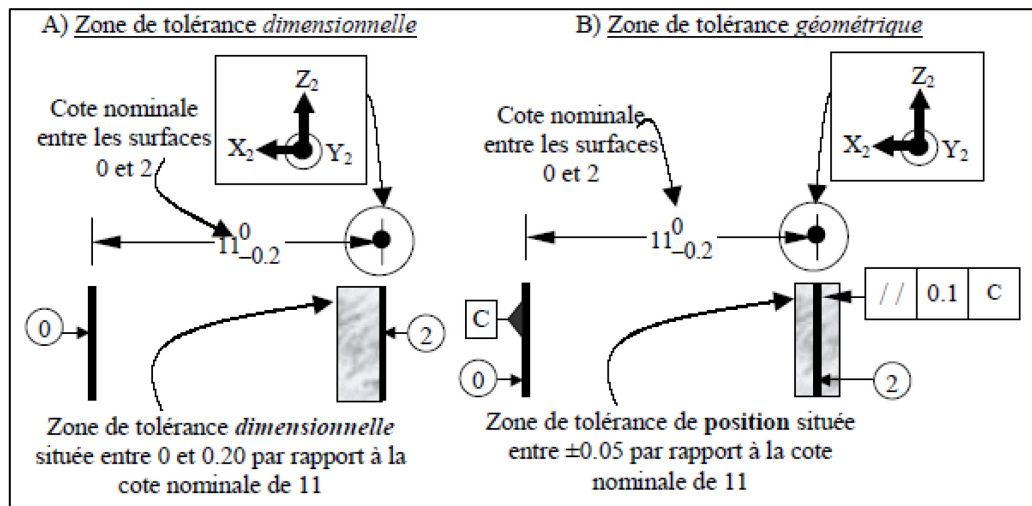


Figure 10 : Principe de détermination des contraintes dimensionnelle et de position [4]

En se basant sur le cas du décalage d'un plan tel qu'indiqué au tableau 6, il est possible d'obtenir la forme générale du torseur $T_{2/0}$ de la zone de tolérance de la surface 2 et les différentes contraintes de base de cette zone. Cependant, le torseur de cette zone contient trois dispersions : une dispersion de translation u et deux dispersions de rotation β et δ et μ .

Théoriquement, dans un torseur de petits déplacements général, les contraintes de tolérance dimensionnelle (u, v et w) sont basées sur les tolérances dimensionnelles et les contraintes de tolérances d'orientation (α, β et δ) sont quant à elles basées sur les tolérances géométriques (forme, d'orientation, position). Le principe de la détermination des contraintes de tolérancement fait l'objet du paragraphe suivant.

Étape #3 : Principe de détermination des contraintes de tolérancement :

Les composantes des torseurs de petits déplacements par intervalles sont obtenues par la détermination des contraintes de tolérancement. Ces contraintes sont basées sur les intervalles de tolérances dimensionnelles et de tolérances d'orientation imposées sur les dessins. Le principe d'obtention des contraintes est défini dans le tableau 9.

Tableau 9: Contraintes du torseur de l'élément 2 par rapport l'origine pour les blocs simples [4]

Torseur classique : $T_{2/0} = \begin{Bmatrix} u & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}$	Équations des contraintes	Contraintes obtenues
Tolérance dimensionnelle Limite inférieure : $TDim_{inf} = 0.0$ Limite supérieure : $TDim_{sup} = 0.2$ Intervalle de tolérance: $ITDim = 0.2$	$TDim_{inf} \leq u \leq TDim_{sup}$ $-\frac{ITDim}{10} \leq \beta \leq +\frac{ITDim}{10}$ $-\frac{ITDim}{8} \leq \delta \leq +\frac{ITDim}{8}$	$0 \leq u \leq 0.2$ $-\frac{0.2}{10} \leq \beta \leq +\frac{0.2}{10}$ $-\frac{0.2}{8} \leq \delta \leq +\frac{0.2}{8}$
Tolérance de position Intervalle de tolérance: $ITPos = 0.1$	$-\frac{ITPos}{10} \leq \beta \leq +\frac{ITPos}{10}$ $-\frac{ITPos}{8} \leq \delta \leq +\frac{ITPos}{8}$	$-\frac{0.1}{10} \leq \beta \leq +\frac{0.1}{10}$ $-\frac{0.1}{8} \leq \delta \leq +\frac{0.1}{8}$
Contraintes retenues	Les contraintes les plus serrées	$0 \leq u \leq 0.2$ $-\frac{0.2}{10} \leq \beta \leq +\frac{0.2}{10}$ $-\frac{0.2}{8} \leq \delta \leq +\frac{0.2}{8}$

Selon le tableau 9, si une tolérance dimensionnelle est imposée à une cote, les contraintes appliquées sur cette cote sont obtenues d'une façon que le déplacement de la surface nominale ne dépasse pas le déplacement maximal autorisé par la zone de

tolérance dimensionnelle (deuxième ligne du tableau 9). Les contraintes sont appliquées sur les trois dispersions en translation (u, v et w) et sur les trois dispersions en rotation (α, β et δ). Cependant, si une tolérance d'orientation est adjointe à la tolérance dimensionnelle des relations (contraintes) supplémentaires ne portant que sur les déplacements engendrés par les petites rotations (α, β et δ) viennent se rajouter (deuxième ligne du tableau 9).

Selon la figure 11, la zone de tolérance dimensionnelle de la surface tolérancée se trouve dans le quadrant positif du référentiel de cette surface. En conséquence, la contrainte associée à la dispersion de translation du torseur $T_{2/0}$ s'écrit $0 \leq u \leq 0,2$. Cependant, le référentiel de la surface 2 (figure 11.B) est situé au milieu de la zone de tolérance géométrique (parallélisme).

Cela donne les contraintes d'orientation, respectivement, autour de l'axe Y_2 et Z_2 :

$$\frac{0.1}{10} \leq \beta \leq + \frac{0.1}{10} \text{ et } - \frac{0.1}{8} \leq \delta \leq + \frac{0.1}{8}.$$

Tel que mentionné précédemment, la zone de tolérances géométriques doit être inférieure à celle d'une tolérance dimensionnelle. Donc, pour le modèle unifié, les contraintes les plus serrées seront prises en considération.

En utilisant le même principe de calcul que pour le torseur $T_{2/0}$, le torseur $T_{5/3}$ de la zone de tolérance de la surface 5 est obtenu. Cette surface appartient à la paire d'éléments fonctionnels (3,5). À priori, la surface 5 est tolérancée par rapport à la surface 3. Les deux tableaux 10 et 11 montrent les détails de calcul des torseurs $T_{2/0}$ et $T_{5/3}$ des blocs simples avec référentiels fixes.

Tableau 10 : Détails du torseur de l'élément 2 par rapport l'origine des blocs simples [4]

Le torseur de l'élément 2 par rapport à l'élément 0			
Torseur classique : $T_{2/0} = \begin{Bmatrix} u & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}_{2/0}$		Torseur projeté : $\{T_{2/0}\}_{projeté} = \begin{Bmatrix} u & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}_{2/0,projeté}$	
<i>Contraintes de zone de tolérance</i>	<i>Torseur intermédiaire</i>	<i>Projection du torseur classique</i>	<i>Torseur final</i>
Tolérance dimensionnelle : $0 \leq u \leq 0.2$	$\{T\}_{classique}$ $= \{\vec{D} \vec{\Omega}\}_{classique}$ \Downarrow $\begin{Bmatrix} [0.1,0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{Bmatrix}_{EF1}$	Dispersion en translation : Sachant que : $\vec{D}_{Projeté} = [R_{PT1}]^{-1} \cdot \vec{D}_{Classique}$ $\vec{D}_{Projeté} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} [0,0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \end{Bmatrix}$	$\{T\}_{projeté} = \{\vec{D} \vec{\Omega}\}_{projeté}$ \Downarrow $\begin{Bmatrix} [0.1,0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{Bmatrix}_{EF1}$
Tolérance d'orientation : : $-\frac{0.1}{10} \leq \beta \leq +\frac{0.1}{10}$ $-\frac{0.1}{8} \leq \delta \leq +\frac{0.1}{8}$		Dispersion en rotation : Sachant que : $\vec{\Omega}_{Projeté} = [R_{PT1}]^{-1} \cdot \vec{\Omega}_{Classique}$ $\vec{\Omega}_{Projeté} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{Bmatrix}$	

Tableau 11 : Torseur T de l'élément 5 par rapport à l'élément 3 des blocs simples

Le torseur $T_{5/3}$ de l'élément 5 par rapport à l'élément 3			
Torseur classique : $T_{5/3} = \begin{Bmatrix} u & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}_{5/3}$		Torseur projeté : $\{T_{5/3}\}_{projeté} = \begin{Bmatrix} u & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}_{5/3,projeté}$	
Contraintes de zone de tolérance	Torseur intermédiaire	Projection du torseur classique	Torseur final
Tolérance dimensionnelle : $0 \leq u \leq 0.2$	$\{T\}_{classique} = \{\bar{D} \bar{\Omega}\}_{classique}$ \Downarrow $\begin{Bmatrix} [0,0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{Bmatrix}_{EF1}$	Dispersion en translation : $\bar{D}_{Projeté} = [R_{PT1}]^{-1} \cdot \bar{D}_{Classique}$ $\bar{D}_{Projeté} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} [0.1, +0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \end{Bmatrix}$	$\{T\}_{projeté} = \{\bar{D} \bar{\Omega}\}_{projeté}$ \Downarrow $\begin{Bmatrix} [+0, +0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{Bmatrix}_{EF2}$
Tolérance d'orientation : $-\frac{0.1}{10} \leq \beta \leq +\frac{0.1}{10}$ $-\frac{0.1}{8} \leq \delta \leq +\frac{0.1}{8}$		Dispersion en rotation : $\bar{\Omega}_{Projeté} = [R_{PT1}]^{-1} \cdot \bar{\Omega}_{Classique}$ $\bar{\Omega}_{Projeté} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{Bmatrix}$	

En utilisant l'équation 2.2 et la dernière ligne du tableau précédent, cela permet d'avoir l'expression finale du modèle unifié telle qu'énoncée dans l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{u} & \bar{u} \\ \underline{v} & \bar{v} \\ \underline{w} & \bar{w} \\ \underline{\alpha} & \bar{\alpha} \\ \underline{\beta} & \bar{\beta} \\ \underline{\delta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}_{CF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0,0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{bmatrix}_{EF1} \begin{bmatrix} [+0.1, +0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{bmatrix}_{EF2} \quad (2.8)$$

En utilisant l'expression précédente et après élimination des colonnes qui multiplient les dispersions nulles, l'expression du modèle unifié devient :

$$\begin{bmatrix} [\underline{u} \quad \bar{u}] \\ [\underline{v} \quad \bar{v}] \\ [\underline{w} \quad \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} \quad \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} \quad \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} \quad \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0,0.2] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \\ [+0.1, +0.2] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A l'aide de logiciel Matlab on applique le calcul matriciel et on obtient le résultat suivant pour la condition fonctionnelle :

$$CF = \begin{bmatrix} [\underline{u} \quad \bar{u}] \\ [\underline{v} \quad \bar{v}] \\ [\underline{w} \quad \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} \quad \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} \quad \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} \quad \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} = \begin{bmatrix} [+0.1, +0.4] \\ [-0.1375, +0.1375] \\ [-0.11, +0.11] \\ [0,0] \\ [-0.02, +0.02] \\ [-0.025, +0.025] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{u} \quad \bar{u}] \\ [\underline{v} \quad \bar{v}] \\ [\underline{w} \quad \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} \quad \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} \quad \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} \quad \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0,0.2] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \\ [+0.1, +0.2] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125] \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

En analyse, le calcul prend en compte les tolérances géométriques et l'analyse se fait dans la direction de la CF.

Étant donné que l'étude est appliquée dans la direction « x » (direction de l'analyse), seul le premier élément du torseur de la condition fonctionnelle est considéré:

$$CF = \begin{bmatrix} +0.1 & +0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{CF} \quad (2.11)$$

Par la méthode déterministe, la condition fonctionnelle doit être entre **+0.1** et **+0.4** dans la direction de l'axe des X. On peut dire que le dernier élément peut avoir une tolérance de +0.1 et +0.4.

2.2-Théorie de l'analyse statistique par la méthode Monte-Carlo) :

Les méthodes statistiques sont des méthodes basées sur le pourcentage de défauts et les probabilités d'interférence réelles entre les composantes. Ces méthodes sont plus complexes à utiliser que la méthode déterministe. La méthode statistique la plus connue est connue par la méthode de Monte-Carlo (MMC). La méthode de Monte-Carlo est la plus simple simulation et la plus populaire pour analyser statistiquement la tolérance non linéaire. Pour chaque cotation X_i , une valeur aléatoire est générée en fonction de la distribution des composants, et la valeur de la fonction est ensuite calculée pour chaque ensemble de valeurs de composants. Ainsi un échantillon de valeur de la fonction réponse est généré, et les dispersions de cette population sont calculées en utilisant les formules statistiques pour aboutir à une plage de tolérance. La figure suivante représente la démarche générale d'application de cette méthode [5] :

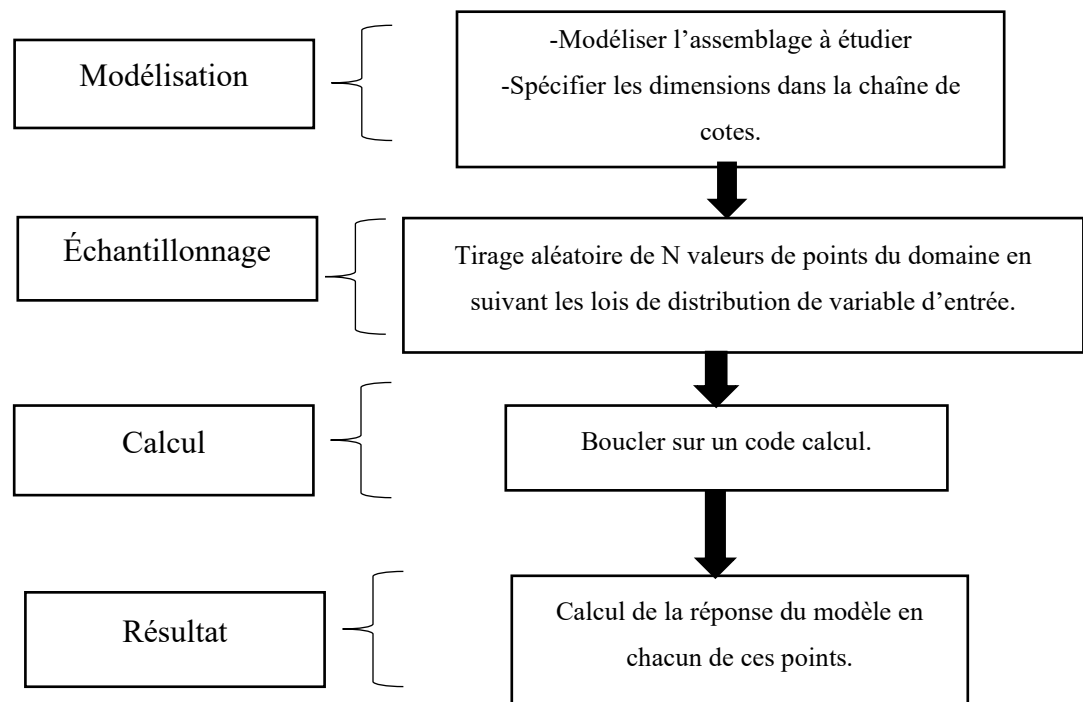


Figure 11 Démarche générale de la méthode MMC

L'application de la méthode de MMC débute par la définition de la chaîne de cotes et les éléments contributeurs à cette chaîne. L'échantillonnage consiste à effectuer par la génération de valeurs aléatoire sur chaque caractéristique selon une loi de distribution (normale, uniforme...). Dans l'actuelle recherche, la loi normale a été choisie, car elle décrit ce qui se passe réellement en production. Cette étape est suivie par la phase de calcul et de simulation des valeurs des itérations.

La simulation à l'aide de la méthode MMC nécessite comme donnée la valeur autour de laquelle sera faite la génération des valeurs aléatoires. Ainsi, il faut calculer la valeur moyenne autour de laquelle se fait la simulation. Pour une répartition symétrique, la valeur moyenne coïncide avec la valeur nominale. Cependant, pour la répartition dissymétrique, la valeur moyenne est déterminée par une opération de centrage de la répartition décentre. La figure suivante montre les règles à suivre pour le centrage :

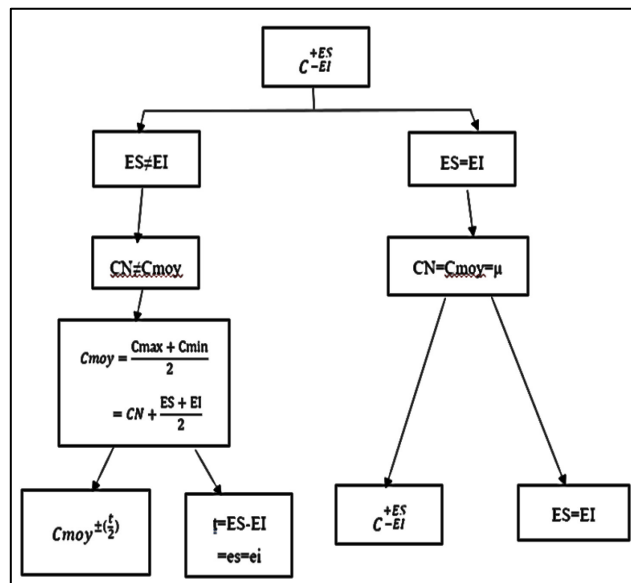


Figure 12 : Algorithme de centrage de valeur de cotes [5]

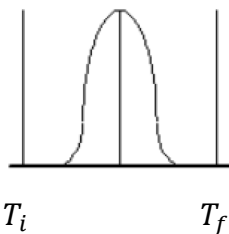
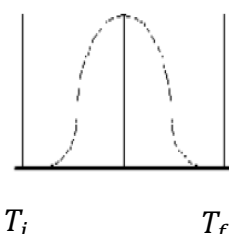
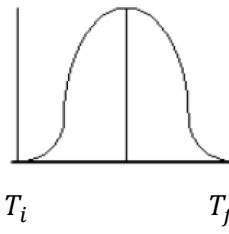
La loi normale représente la dispersion de N cotes (dimension dans une pièce) autour de la valeur moyenne, elle est caractérisée par une moyenne (μ) et un écart type (σ). Ce dernier est déterminé à partir de l'indice de capabilité. L'indice de capabilité (C_p)

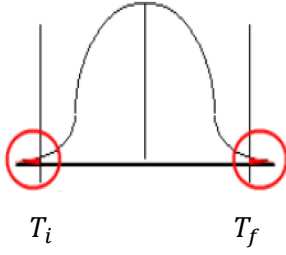
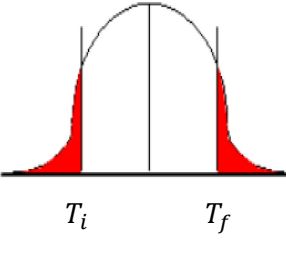
est une mesure établissant un lien ou une liaison entre la dispersion réelle d'une machine et la dispersion demandée. Il est donné par la relation suivante :

$$Cp = \frac{\text{Intervalle de tolérance}}{\text{Dispersion du procédé}} = \frac{IT}{6\sigma} \quad (2.12)$$

Pour le contrôle de qualité, selon les valeurs de l'indice de capabilité, on peut juger si un système est réputé capable si la dispersion de ses résultats est faible comparativement à la tolérance. Le tableau suivant montre les interprétations selon les valeurs de l'indice de capabilité [14] :

Tableau 12 : Processus de capabilité, interprétation [7]

1	$Cp > 1.67$		Plus que suffisant	Non préoccupant, chercher à simplifier la gestion pour réduire les coûts
2	$1.67 > Cp > 1.33$		Suffisant	Situation idéale à maintenir.
3	$1.33 > Cp > 1.00$		Trop juste	Nécessite de l'attention Cp proche de 1 signifie qu'une dérive peut créer des défauts.

4	$1.00 > C_p > 0.67$		Insuffisant	Existence de non-conformité, il faut contrôler à 100%, analyser le processus et si possible l'améliorer.
5	$0.67 > C_p$		Très insuffisant	Analyse immédiate des causes, urgence de mise en place de contre-mesures, révision tolérance.

Ainsi, l'écart type est donné par :

$$\sigma = \frac{IT}{6C_p} \quad (2.13)$$

D'après le tableau précédent, la fabrication des pièces sera bonne pour un indice de capabilité égale à 1. D'où :

$$\sigma = \frac{IT}{6} \quad (2.14)$$

Cette dernière liaison permet de lier l'écart type à l'intervalle de tolérance. La figure suivante montre l'algorithme de la MMC. Cet algorithme permet, à partir des données de problème, de vérifier le tolérancement déjà spécifié par comparaison du pourcentage de rebut calculé au pourcentage de rebut imposé [5]. Il permet donc, sur la base de cette comparaison, de désigner un nouveau tolérancement :

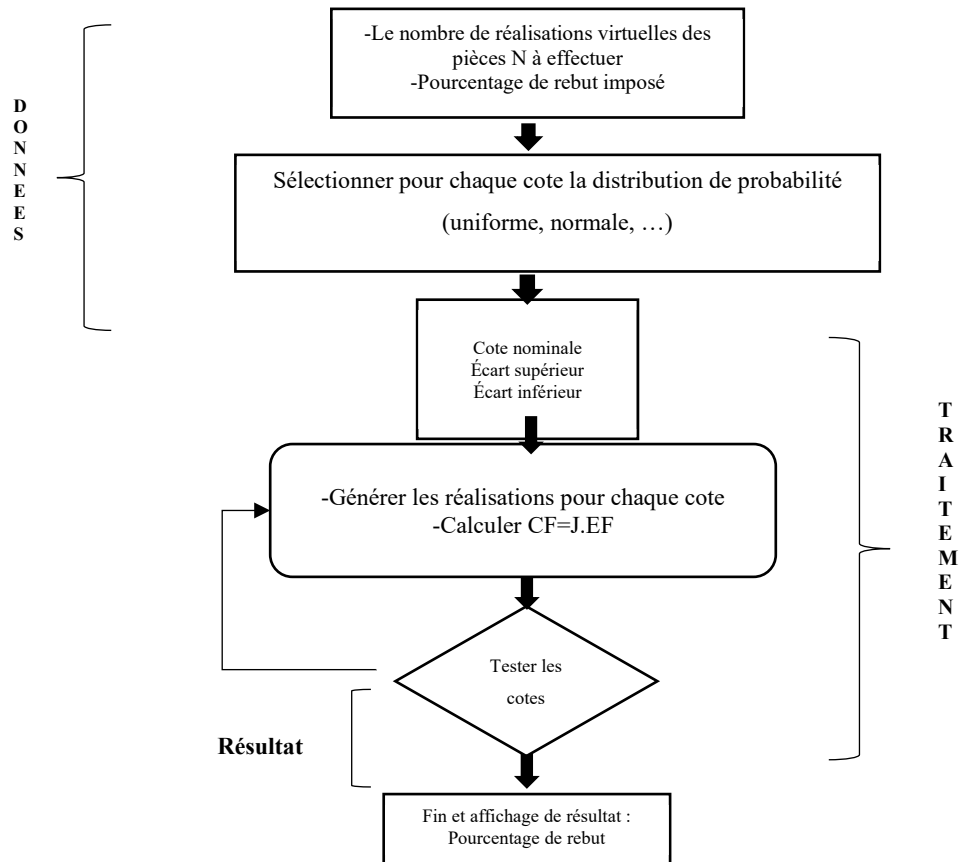


Figure 13 : Organigramme d'application de MMC [5]

L'organigramme précédent explique qu'au niveau de l'assemblage de données, il faut fixer le nombre de réalisations virtuelles (nombre de valeurs aléatoires à générer), le pourcentage de rebut imposé par le concepteur ainsi que la nature de loi à utiliser pour générer ces réalisations.

Ensuite, au niveau de traitement de données, en partant de la cote nominale et ces limites (son écart supérieur et inférieur), il faut générer les valeurs aléatoires en respectant la loi choisie précédemment, calculer le produit $CF=J.EF$ et appliquer le test de normalité selon les différentes lois (on a choisi la loi de Henry dans cette étude).

Enfin, nous obtiendrons l'affichage des résultats qui nous permet de déterminer les différents paramètres qui permettent de calculer CF comme la moyenne et l'écart type.

Il s'agit par la suite de vérifier la conformité de la chaîne à partir des points générés vis-à-vis de la cote condition. Les points générés correspondent à des pièces réalisées virtuellement ou des cotes.

En effet, le principe de cette approche est d'utiliser les composants maximums et minimums de torseur pour générer des valeurs aléatoires pour chaque ligne de torseur. La génération de ces valeurs aléatoires est basée sur une loi normale.

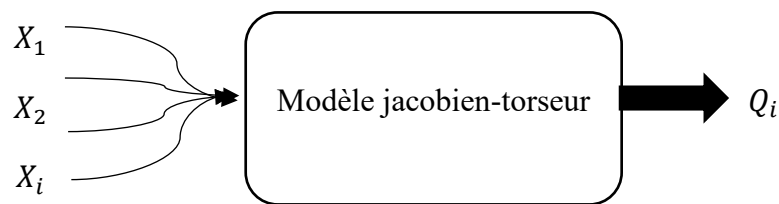


Figure 14 : La simulation de Monte-Carlo

Pour programmer une combinaison de valeurs de la condition fonctionnelle, CF la procédure de simulation utilise des valeurs moyennes générées à partir des intervalles de tolérance sur chaque axe. Finalement, on multiplie la matrice jacobienne des valeurs moyennes par la matrice.

En utilisant cette méthode, on obtient les éléments de torseur de la condition fonctionnelle. L'équation suivante montre les différents blocs obtenus ainsi que leur interaction :

$$\begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \\ \alpha_m \\ \beta_m \\ \delta_m \end{bmatrix}_{CF} = [[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EF1} \dots [J_{6n-5} J_{6n-4} J_{6n-3} J_{6n-2} J_{6n-1} J_{6n}]_{EFn}] \cdot \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \\ \alpha_m \\ \beta_m \\ \delta_m \end{bmatrix}_{EF1} \vdots \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \\ \alpha_m \\ \beta_m \\ \delta_m \end{bmatrix}_{EFn} \quad (2.15)$$

Où:

$$[CF] = \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \\ \alpha_m \\ \beta_m \\ \delta_m \end{bmatrix}_{CF}, [EFi] = \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \\ \alpha_m \\ \beta_m \\ \delta_m \end{bmatrix}_{EFi} :$$

Représentent des torseurs de petits déplacements associés à une condition fonctionnelle, à une paire d'éléments fonctionnels internes, ou à une paire de contacts. Mais, dans ce cas, chaque ligne contient une valeur au lieu d'un intervalle.

$[J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6]_{EFi}$: Ensemble des matrices jacobiennes 6x6 associées aux paires d'éléments fonctionnels. Chaque matrice représente les contributions (en translation et en rotation) de la paire considérée à la condition fonctionnelle.

$u_m, v_m, w_m, \alpha_m, \beta_m, \delta_m$: sont les meilleures estimations de u, v, w, α, β, δ en respectant les limites maximales et minimales .

2.2.1-Application de l'analyse statistique par le modèle jacobien-torseur

Rappelons que l'objectif de l'analyse de tolérance est de trouver la CF. Dans cette section, le but est de trouver la condition fonctionnelle par la MMC.

On reprend le même exemple de blocs simples et on essaye de le résoudre par la méthode de Monte-Carlo (méthode statistique). En effet, on utilisera le même modèle unifié obtenu dans la méthode déterministe :

$$\begin{bmatrix} \underline{u} & \overline{u} \\ \underline{v} & \overline{v} \\ \underline{w} & \overline{w} \\ \underline{\alpha} & \overline{\alpha} \\ \underline{\beta} & \overline{\beta} \\ \underline{\delta} & \overline{\delta} \end{bmatrix}_{CF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0, +0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125]_{EF1} \\ [+0, +0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125]_{EF2} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

À l'aide de la simulation de Monte-Carlo, on cherche une valeur aléatoire pour chaque intervalle de tolérance de la dernière colonne pour avoir un vecteur de valeurs aléatoires, ces valeurs suivent la loi normale.

L'outil informatique est utilisé pour calculer les distributions finales de la CF dans la direction de l'analyse (la direction d'analyse dans l'exemple traité est l'axe X).

Le programme génère 1000 valeurs pour chaque élément dans les torseurs des éléments fonctionnels (coté droit du modèle J-T). Pour ensuite appliquer la multiplication à chaque itération afin d'obtenir une valeur de la CF (côté gauche du modèle J-T).

Nous portons ici une attention particulière à la composante 'u' de EF qui caractérise la variation de l'horizontale de la CF. L'interface d'exécution est illustrée à la figure 15. Selon l'histogramme de la composante u de CF représenté à la figure suivante, les données de la distribution sont très proches de la distribution normale. La moyenne et l'écart type de w calculés à partir de ces 1000 valeurs sont respectivement 0.00840078 et 0.18910006. Comme la moyenne de u est approximativement égale à zéro, nous allons adopter le système de tolérance bidirectionnel.

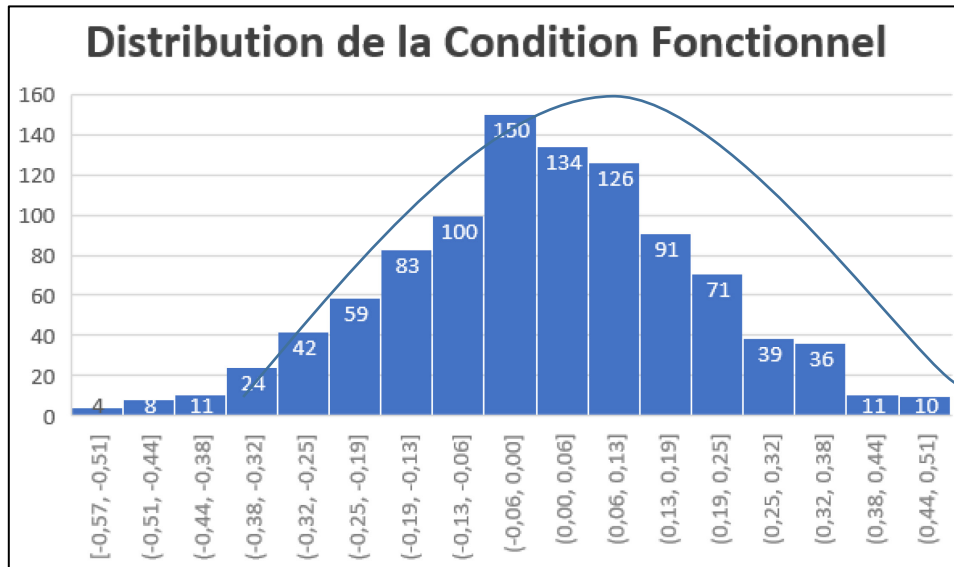


Figure 15 : Histogramme de distribution de la CF selon la direction X

Les résultats ressemblent à l'allure d'une loi normale. Pour confirmer la normalité de ce dernier, il faut appliquer certains tests de normalité.

On a choisi la loi de Henry comme test pour valider la normalité de notre série de données aléatoires générées. Pour réaliser la procédure de ce test, il faut [15]:

1. Prélever un échantillon d'une population à observer,
2. Ranger les valeurs des caractères X_i par ordre croissant,
3. Calculer les fréquences cumulées croissantes F_i ,
4. Placer les points de coordonnées (X_i, F_i) sur le papier gauss-arithmétique,
5. Prendre une décision suivant l'allure du nuage de points,
 - Si les points (X_i, F_i) sont proches d'une même droite : on accepte la normalité de la population,
 - Si ces points sont trop dispersés, on rejette la normalité de la population.

En appliquant le test de normalité (droite de Henry) sur les données de la méthode statistique en utilisant la fonction dans le logiciel Excel **LOI.NORMAL**.

STANDARD.INVERSE (méthode numérique), on obtient l'allure de courbe suivante de normalité :

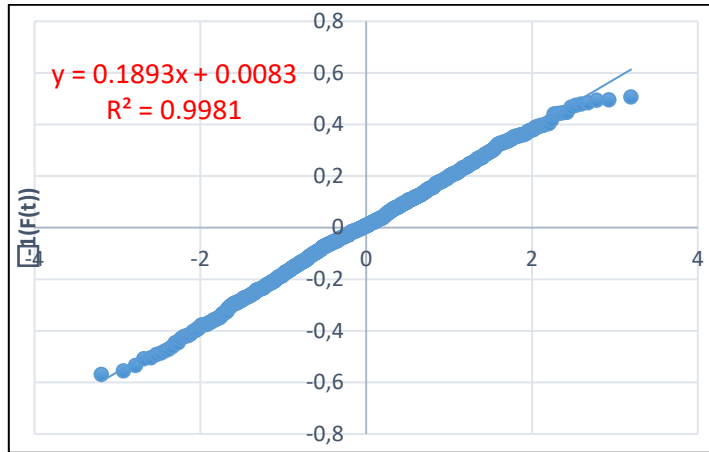


Figure 16 : Ajustement des distributions aux données de la simulation (Loi normale)

Donc les observations à mentionner à partir l'allure de la figure 16 précédente qui confirme la normalité :

- L'allure de la courbe est une droite;
- La corrélation est de $R^2 \approx 0.99$;
- Et en utilisant le graphique, on peut trouver les résultats suivants :
 - La moyenne : $\mu = 0.0083$
 - L'écart type: $\sigma = 0.189$

En plus, la méthode statistique nous permet de déterminer le rebut et l'acceptation des cotes.

Par exemple: Pour un rebut de 5% (taux d'acceptation de 95%):

$$[-1.96 \sigma; +1.96 \sigma] = [-0.37; 0.37] \quad (2.17)$$

En effet, dans l'approche statistique, les variables aléatoires générées nous donnent une moyenne proche de zéro. La moyenne de la CF est considérée nulle, ainsi, en appliquant le principe de l'incertitude de propagation, la tolérance statistique selon la direction X devient :

$$CF = FR_{Dm} \pm \delta FR_D = 0.00 \pm 0.189 \text{ mm} = FR_X \quad (2.18)$$

ce qui implique que la valeur de CF est comprise dans l'intervalle [-0.189; +0.189] selon la méthode statistique.

2.3- La synthèse de tolérance

Comme très peu de recherches sont axées sur la synthèse en tolérancement et que la synthèse est une façon logique de concevoir, il est donc très pertinent de chercher une façon de faire dans ce domaine. Dans ce travail, le but est de montrer la réversibilité du modèle développé par Laperrière, Desrochers et Ghié basé sur le modèle jacobien-torseur. Le modèle devra pouvoir être utilisé en synthèse pour traiter le pire des cas.

Pour vérifier la réversibilité du modèle jacobien-torseur, nous utiliserons un exemple (même exemple du bloc simple) déjà utilisé en analyse dans la partie 2.1. En utilisant cet exemple, on pourra vérifier, si lorsque l'on fait le processus inverse (la synthèse), on peut retrouver les données de départ en analyse. L'équation de base pour faire l'analyse avec cette méthode est la suivante:

$$[CF] = [J][EF]$$

Où :

[CF] : Matrice colonne 1 x 6 des spécifications d'une condition fonctionnelle

[J] : Ensemble des matrices jacobien 6 x 6n des éléments fonctionnels, 'n' étant le nombre d'éléments fonctionnels.

[EF] : Ensemble des matrices colonne 1 x 6n servant à définir les dispersions de translation et de rotation des éléments fonctionnels (torseur local de l'élément fonctionnel), 'n' étant le nombre d'éléments fonctionnels.

2.3.1-Pseudo-inverse pour la synthèse

Nous remarquons que nous avons 6 équations. Cependant, le nombre d'inconnues varie assez rapidement (pour chaque EF, il y aura 6 inconnues), donc il est impossible d'utiliser l'inversion ordinaire de matrice pour pouvoir résoudre notre système. On utilisera la méthode de la matrice pseudo-inverse [8].

Pour réaliser la synthèse, nous inverserons, comme suggéré par professeur Ghié, le modèle pour obtenir la formulation suivante:

$$[EF]=[J^{-1}][CF] \quad (2.19)$$

Où :

$[J^{-1}]$: Matrice inverse de l'ensemble des matrices jacobiennes des éléments fonctionnels.

Selon [8], la matrice J a « n » lignes et « p » colonnes. On appelle *pseudo inverse* de J toute matrice J^+ à « p » lignes et « n » colonnes telle que :

$$JJ^+J=J \text{ et } J^+JJ^+=J^+ \quad (2.20)$$

Ceci ne définit pas la pseudo inverse de J de façon unique. Si on ajoute les deux conditions :

$$(JJ^+)^t=JJ^+ \text{ et } (J^+J)^t=J^+J \quad (2.21)$$

Alors, il existe une unique matrice J^+ qui vérifie les conditions précédentes. On l'appelle alors souvent pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Si la matrice J est à « n » lignes et « p » colonnes, alors :

$$J^+ = J^{-1} \text{ et } [EF] = J^{-1}[CF] \quad (2.22)$$

Sinon si J est une matrice à n lignes et p colonnes, alors :

$$J^+ = (J^t J)^{-1} J^t \text{ et } [EF] = (J^t J)^{-1} J^t [CF] \quad (2.23)$$

La pseudo-inverse intervient notamment pour donner une solution de *norme minimale* à un système d'équations où il y a plus d'équations que d'inconnues.

La section suivante permet l'application de la théorie de pseudo-inverse sur le modèle J-T.

2.3.2-Exemple du bloc simple avec méthode déterministe en synthèse

Dans cette section, le but est de faire la synthèse sur les résultats obtenus par la méthode déterministe.

Les mêmes résultats obtenus dans 2.1.2.1 seront appliqués par cette méthode. Les résultats sont ainsi :

$$[CF] = [J] \cdot [EF] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0,0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125]_{EF1} \\ [+0, +0.2] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.01, +0.01] \\ [-0.0125, +0.0125]_{EF2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [+0.1, +0.4] \\ [-0.1375, +0.1375] \\ [-0.11, +0.11] \\ [0,0] \\ [-0.02, +0.02] \\ [-0.025, +0.025] \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

En analyse, le calcul prend en compte la tolérance dimensionnelle et géométrique. Cependant, en synthèse, le calcul considère seulement la direction de l'étude. Par exemple, une CF est une distance entre deux plans (aucune géométrie à traiter). Dans cet exemple, étant donné que l'étude est appliquée dans la direction « x », seul le premier élément du torseur de la condition fonctionnelle est considéré:

$$CF = \begin{bmatrix} +0.1 & +0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

En considérant le résultat de l'exemple trouvé par l'analyse, les éléments fonctionnels seront obtenus par la méthode de synthèse alors seulement la direction X est considérée non nulle qui est comprise entre +0.1 et +0.4.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

La matrice pseudo-inverse jacobienne telle que déterminée par l'outil informatique est:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$[EF] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} & \bar{u} \\ \underline{v} & \bar{v} \\ \underline{w} & \bar{w} \\ \underline{\alpha} & \bar{\alpha} \\ \underline{\beta} & \bar{\beta} \\ \underline{\delta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}_{EF1} \\ \begin{bmatrix} \underline{u} & \bar{u} \\ \underline{v} & \bar{v} \\ \underline{w} & \bar{w} \\ \underline{\alpha} & \bar{\alpha} \\ \underline{\beta} & \bar{\beta} \\ \underline{\delta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}_{EF2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} +0.1 & +0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Pour la multiplication des matrices de cette taille, il vaut mieux utiliser un outil informatique tel que Matlab, Matrix calculator, etc.

Par la suite, le calcul aboutit aux valeurs des éléments fonctionnels suivantes :

Tableau 13 : Calcul de tolérance par la méthode déterministe en synthèse

Éléments	Torseurs par la méthode statistique	Calcul des tolérances
Élément 1	$EF_1 = \begin{bmatrix} +0.05 & +0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$+0.05 \leq u_1 \leq +0.2$
Élément 2	$EF_2 = \begin{bmatrix} +0.05 & +0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$+0.05 \leq u_2 \leq +0.2$

Les résultats de [EF] obtenus par la synthèse déterministe sont similaires à ceux introduits par le modèle J-T. Donc, le concepteur a la possibilité de varier l'intervalle

de tolérance de la C-F selon ses besoins fonctionnels et en utilisant la matrice pseudo-inverse calculée pour optimiser la tolérance sur les EFs.

2.3.3-L'application de la synthèse en statistique sur les blocs simples :

Dans la section suivante, une étude statistique en synthèse sera introduite afin de comparer et d'en conclure des résultats plus tard.

De même, la matrice pseudo-inverse calculée précédemment sera utilisée dans le calcul du statistique en synthèse :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Il faut spécifier que : $[EF] = (J^t J)^{-1} J^t [CF]$ avec $J^{-1} = (J^t J)^{-1} J^t$

La condition fonctionnelle a été calculée précédemment par la méthode statistique. Cette condition fonctionnelle a la forme suivante :

$$CF = \begin{bmatrix} -0.189 & +0.189 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

En remplaçant ces résultats dans la formule de synthèse :

$$[EF]= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & -0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & 0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.189 & +0.189 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Les valeurs des éléments fonctionnels suivantes sont sélectionnées:

Tableau 14 : Calcul de tolérance par la méthode statistique en synthèse

Éléments	Torseurs par la méthode statistique	Calcul des tolérances
Élément 1	$EF_1 = \begin{bmatrix} -0.0945 & +0.0945 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0945 \leq u_1 \leq +0.0945$
Élément 2	$EF_2 = \begin{bmatrix} -0.0945 & +0.0945 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0945 \leq u_2 \leq +0.0945$

La dernière colonne permet l'obtention de la tolérance sur les éléments fonctionnels.

3.3-Conclusion

À partir des résultats obtenus pour l'exemple de blocs simples, il faut mentionner que :

- L'intervalle de dispersion de la condition fonctionnelle selon la méthode statistique est $([-0.189; +0.189])$ qui est un intervalle centré. Par contre le même

intervalle selon la méthode déterministe est égal à $([+0.1; +0.4])$ qui n'est pas symétrique;

- La méthode statistique en synthèse donne des dispersions de conditions fonctionnelles plus petites que la méthode déterministe en synthèse. Plus l'intervalle de dispersion est petit, plus le coût de fabrication augmente.

Tout au long de ce chapitre, la procédure d'étude statistique et déterministe en analyse et en synthèse a été élaborée pour un exemple général. Dans la prochaine section, l'étude d'exemples plus sophistiqués sera réalisée pour entamer le plus de cas possibles dans l'industrie.

CHAPITRE 3 : RÉSULTATS

Dans les chapitres précédents, un modèle unifié jacobien-torseur a été étudié et ces divers aspects ont été décrits en détail. Les aspects les plus importants du modèle unifié sont comme suit: l'obtention de la matrice jacobienne, des torseurs classiques, des matrices d'opérateur de projection des torseurs, des torseurs projetés, la combinaison des matrices jacobienes avec les torseurs projetés de chaque élément dans la chaîne des cotes étudiée, une démonstration du mode d'utilisation et de l'implémentation de ce principe en analyse, déterministe et en synthèse ainsi que de faire le test de normalité des données obtenues et enfin la détermination de la CF.

3.1 Exemple de la perforatrice de carton [9]

3.1.1 Application de la méthode déterministe par le modèle jacobien-torseur pour la perforatrice

Dans la section suivante, l'étude sera réalisée sur une perforatrice de carton (figure 17). Cette perforatrice est composée d'une base dans laquelle est insérée une matrice. Sur la même base, un support est monté en appui sur une butée et le poinçon glisse dans le trou prévu à cet effet.

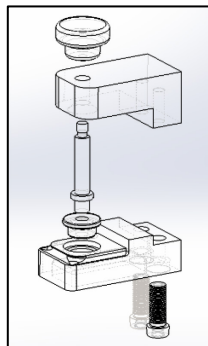


Figure 17 : Vue éclatée du mécanisme de perforatrice

Un dimensionnement détaillé des différentes pièces de ce mécanisme sera présenté par les figures suivantes, les cotes définies seront utilisées dans la démarche de calcul de modèle jacobien-torseur ainsi que pour la détermination des dispersions d'éléments fonctionnels :

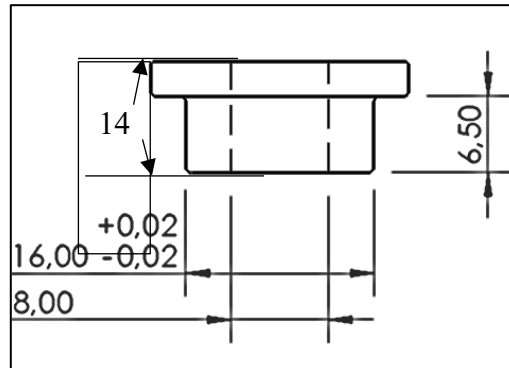


Figure 18 : Dessin de la matrice de perforatrice

La figure ci-dessus montre la bague de la matrice, cette bague a pour rôle de guider le poinçon pendant le découpage des cartons.

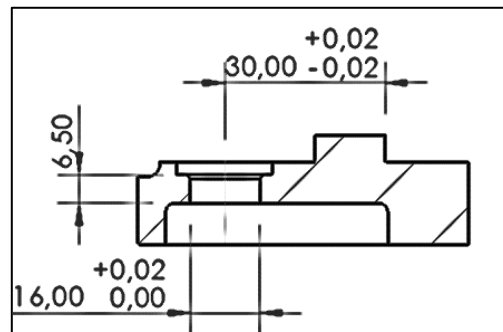


Figure 19 : dessin de base de perforatrice

La base de perforatrice sert à immobiliser le mécanisme au complet et joue le rôle de support fixe pour la perforatrice à carton.

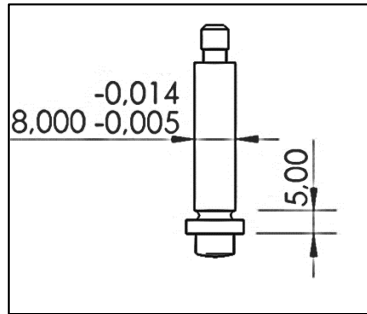


Figure 18 : Dessin de poinçon de la perforatrice

La figure 18 présente le poinçon, ce dernier a pour rôle de percer les cartons avec la forme souhaitée par le concepteur (dans ce cas forme circulaire).

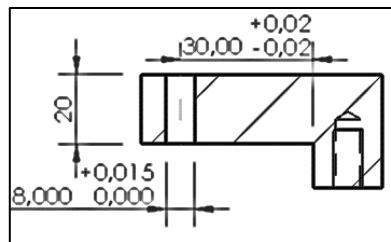


Figure 19 : Dessin de support de la perforatrice

Ci-dessus dans la figure 19, on voit le dessin de support de la perforatrice qui sert à tenir le poinçon dans sa position verticale.

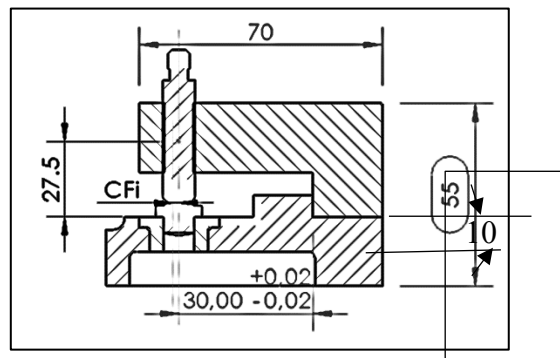


Figure 18 : Identification de l'assemblage de perforatrice

Dans cet assemblage, le concepteur souhaite un jeu entre le poinçon et la matrice de $\pm 0,1$ mm (CF) qui correspond à 10% de l'épaisseur du carton d'épaisseur 1mm, cette contrainte représentera la condition fonctionnelle de nos cotes. En effet, un jeu de plus de 10 % de l'épaisseur permettrait de s'assurer que l'équipement serait déformé autour du trou percé. Cependant, si le jeu est trop faible, l'effort requis pour percer serait trop grand pour rester fonctionnel.

Parmi les éléments fonctionnels, le jeu entre le poinçon et le support (EF_2) est défini selon les normes recommandées (American National Standard Preferred Hole Basis Metric Clearance Fits), on utilise l'ajustement **H7/g6** ce qui nous donne, pour un diamètre de 8 mm sur l'alésage, un jeu minimum de 0mm et un jeu maximum de 0.015mm et, pour l'arbre, un jeu min de -0.005mm et un jeu max de -0.014mm.

Dans le but de réaliser la chaîne de cotes autour de la condition fonctionnelle (CF) de ce mécanisme, les éléments fonctionnels seront déterminés et le graphe de liaisons sera établi dans la figure 18 et 19.

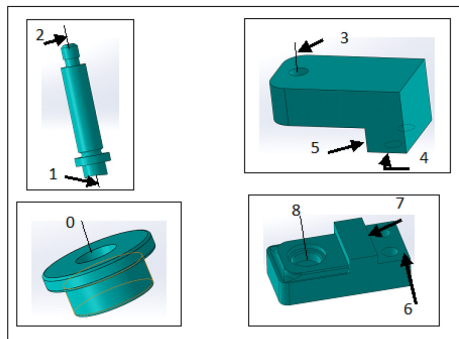


Figure 19 : Identification des éléments fonctionnels du mécanisme de perforatrice

Après avoir déterminé les différentes surfaces de contact, un repère local sera attribué à chaque surface tout en respectant la direction de la condition fonctionnelle pour des raisons de simplification de calcul. Une détermination des différents couples de paires

interne et de contact sera réalisée dans la figure 19 pour définir les types de liaison qui vont permettre le calcul du modèle jacobien et les éléments fonctionnels :

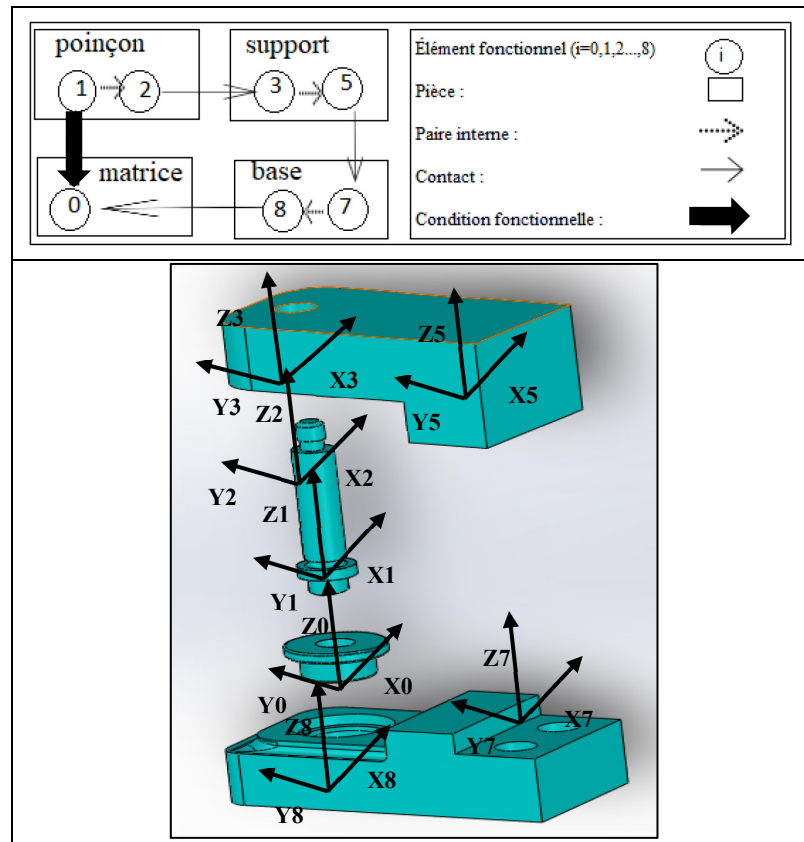


Figure 20 : identification des éléments de chaîne de cote autour de la CF

L'étape suivante sera de déterminer les éléments fonctionnels impliqués dans cette chaîne de cotes ainsi que la condition fonctionnelle de la perforatrice à carton à étudier comme suit:

1. EF_1 présente la coaxialité des deux diamètres de poinçon ,
2. EF_2 présente le jeu entre le poinçon est les supports,
3. EF_3 présente la distance entre le trou de pour le poinçon et la surface d'appui sur la même pièce (support),
4. EF_5 présente la surface d'appui verticale entre le support et la base,

5. EF_7 présente la distance entre la surface d'appui et le trou pour la matrice sur la même pièce (base),
6. EF_8 présente la coaxialité entre la matrice et le trou pour la matrice sur la base,
7. CF_i présente la coaxialité entre l'axe de la matrice et l'axe de poinçon,

La chaîne de cotes introduite dans la figure 19 présente trois paires internes (EF_1, EF_2), (EF_3, EF_5) et (EF_5, EF_7) et deux paires de contacts (EF_2, EF_3) et (EF_0, EF_8). Alors cinq torseurs interviennent dans la chaîne étudiée. Il faut noter que les surfaces de contact entre (4,6) (élément EF_4) et (5,7) (élément EF_6) doivent être négligées parce qu'il n'y a aucune donnée sur les contacts de types plan-plan.

Pour résumer, deux torseurs pour les paires de contacts ($T_{3/2}$) et ($T_{5/4}$) doivent être déterminés ainsi que trois torseurs de paires internes. Les torseurs des paires internes sont : ($T_{2/1}$), ($T_{4/3}$) et ($T_{7/5}$). Pour transformer les différents torseurs identifiés dans le repère de la première condition fonctionnelle, il faut d'abord établir leurs matrices jacobiniennes.

Les zones de tolérance dans la perforatrice sont orientées de façon que leurs déplacements respectent la direction de l'analyse (directement suivant la condition fonctionnelle). Donc les matrices $[R_{PTi}]_{3 \times 3}$ de tous les éléments sont ici des matrices identités.

Les tableaux suivants montrent les étapes de calcul de la matrice pré-vectorielle pour chaque élément fonctionnel :

Tableau 15 : Calcul de W de l'élément 3 par rapport l'origine de perforatrice

Surface (EF)	Matrice de transformation $[T_0^i]_{4x4}$	Matrice d'orientation $[R_0^i]_{3x3}$	Vecteur de position	Matrice pré-vectorielle $[W_i^n]_{3x3}$
EF en cours (i=0)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_0^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.5 \end{bmatrix}$
EF en cours (i=3)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 27.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.5 \end{bmatrix}$	$[W_0^3]_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -27.5 & 0 \\ 27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La valeur de la matrice W_0^3 calculée dans le tableau précédent sera utilisée dans le calcul de la matrice jacobienne de l'élément 3 par la suite.

Tableau 16 : Calcul de W de l'élément 7 par rapport l'origine de perforatrice

Surface (EF)	Matrice de transformation $[T_0^i]_{4x4}$	Matrice d'orientation $[R_0^i]_{3x3}$	Vecteur de position	Matrice pré-vectorielle $[W_i^n]_{3x3}$
EF en cours (i=0)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 27.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_0^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 10 \end{bmatrix}$
EF en cours (i=7)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 10 \end{bmatrix}$	$[W_0^7]_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 30 \\ 10 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

De même, la valeur de W_0^7 calculée dans le tableau précédent sera utilisé dans le calcul de la matrice jacobienne de l'élément 7 par la suite.

Tableau 17 : Calcul de W de l'élément 8 par rapport l'origine de perforatrice

Surface (EF)	Matrice de transformation $[T_0^i]_{4x4}$	Matrice d'orientation $[R_0^i]_{3x3}$	Vecteur de position	Matrice pré-vectorielle $[W_i^n]_{3x3}$
EF en cours (i=0)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_0^8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$
EF en cours (i=8)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vec{d}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$	$[W_0^8]_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Il faut bien déterminer les vecteurs position sachant que les repères locaux sont toujours fixés au milieu des surfaces de contacts appartenant à la chaîne de cotes choisie pour l'étude.

Le tableau 18 suivant accumule tous les éléments nécessaires pour le calcul des matrices jacobiniennes pour les paires internes (1,2), (3,5) et (7,8) et les paires de contacts (2,3) (7,8), on rappelle qu'une paire interne concerne deux surfaces ou éléments fonctionnels appartenant à la même pièce. Cependant, une paire externe désigne deux surfaces en contact, mais qui n'appartiennent pas à la même pièces).

Tableau 18 : Matrices jacobiennes de la perforatrice

Composant	Paire interne (1,2)	Paire interne (3,5)	Paire de contact (0,8)
	Paire de contact (2,3)	Paire de contact (7,8)	
Matrice de transformation $[T_0^i]_{4x4}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 27.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matrice de rotation du référentiel i $[R_0^i]_{3x3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matrice d'orientation du référentiel i pour respecter le déplacement de la zone de tolérance $[R_0^i]_{3x3} \cdot [R_{PTi}]_{3x3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matrice « pré-vectorielle » $[W_0^i]_{3x3}$	$\begin{bmatrix} 0 & -27.5 & 0 \\ 27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -10 & 30 \\ 10 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Calcul servant à déterminer la contribution de translation et de rotation $[W_0^i]_{3x3} \cdot ([R_0^i]_{3x3} \cdot [R_{PTi}]_{3x3})$	$\begin{bmatrix} 0 & -27.5 & 0 \\ 27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -10 & 30 \\ 10 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Jacobien de l'élément fonctionnel $[J_0^i]_{6x6}$	$J_1 = J_2$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 27.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$J_3 = J_5$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	J_7 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Il faut mentionner qu'on a des égalités de matrices jacobiennes dans le tableau précédent puisque ses surfaces appartiennent à la même pièce, ce qui explique l'égalité entre J_1, J_2 et J_3, J_5 .

La dernière ligne du tableau précédent sera intégrée directement dans l'expression du modèle unifié. Cette ligne devrait apparaître dans la matrice du milieu ([J]) de l'équation finale de modèle. Le tableau 19 suivant présente les détails de calcul pour l'obtention des torseurs classiques (torseurs intermédiaires) pour la perforatrice:

Tableau 19 : Torseurs classiques du mécanisme de perforatrice

Paire	Forme générale	Contrainte de zone de tolérance	Torseur intermédiaire
Paire interne (1,2)	$T_{2/1} = \begin{Bmatrix} u & \alpha \\ v & \beta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{2/1}$	$-\frac{0.1}{2} \leq u \leq \frac{0.1}{2}$ $-\frac{0.1}{2} \leq v \leq \frac{0.1}{2}$ $-\frac{0.1}{5} \leq \alpha \leq \frac{0.1}{5}$ $-\frac{0.1}{5} \leq \beta \leq \frac{0.1}{5}$	$\begin{Bmatrix} [-0.05, 0.05] \\ [-0.05, 0.05] \\ [0, 0] \\ [-0.02, 0.02] \\ [-0.02, 0.02] \\ [0, 0] \end{Bmatrix}_{EF_1}$
Paire de contact (2,3)	$T_{3/2} = \begin{Bmatrix} u & \alpha \\ v & \beta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{3/2}$	$-\frac{0.02}{2} \leq u \leq \frac{0.02}{2}$ $-\frac{0.02}{2} \leq v \leq \frac{0.02}{2}$ $-\frac{0.1}{20} \leq \alpha \leq \frac{0.1}{20}$ $-\frac{0.1}{20} \leq \beta \leq \frac{0.1}{20}$	$\begin{Bmatrix} [-0.01, 0.01] \\ [-0.01, 0.01] \\ [0, 0] \\ [-0.005, 0.005] \\ [-0.005, 0.005] \\ [0, 0] \end{Bmatrix}_{EF_2}$
Paire interne (3,5)	$T_{5/3} = \begin{Bmatrix} u & \alpha \\ v & \beta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{5/3}$	$-\frac{0.04}{2} \leq u \leq \frac{0.04}{2}$ $-\frac{0.04}{2} \leq v \leq \frac{0.04}{2}$ $-\frac{0.1}{20} \leq \alpha \leq \frac{0.1}{20}$ $-\frac{0.1}{20} \leq \beta \leq \frac{0.1}{20}$	$\begin{Bmatrix} [-0.02, 0.02] \\ [-0.02, 0.02] \\ [0, 0] \\ [-0.005, 0.005] \\ [-0.005, 0.005] \\ [0, 0] \end{Bmatrix}_{EF_3}$
Paire interne (7,8)	$T_{8/7} = \begin{Bmatrix} u & \alpha \\ v & \beta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{8/7}$	$-\frac{0.04}{2} \leq u \leq \frac{0.04}{2}$ $-\frac{0.04}{2} \leq v \leq \frac{0.04}{2}$ $-\frac{0.1}{14} \leq \alpha \leq \frac{0.1}{14}$ $-\frac{0.1}{14} \leq \beta \leq \frac{0.1}{14}$	$\begin{Bmatrix} [-0.02, 0.02] \\ [-0.02, 0.02] \\ [0, 0] \\ [-0.007, 0.007] \\ [-0.007, 0.007] \\ [0, 0] \end{Bmatrix}_{EF_5}$
Paire de contact (0,8)	$T_{8/0} = \begin{Bmatrix} u & \alpha \\ v & \beta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{8/0}$	$-\frac{0.04}{2} \leq u \leq \frac{0.04}{2}$ $-\frac{0.04}{2} \leq v \leq \frac{0.04}{2}$ $-\frac{0.1}{14} \leq \alpha \leq \frac{0.1}{14}$ $-\frac{0.1}{14} \leq \beta \leq \frac{0.1}{14}$	$\begin{Bmatrix} [-0.02, 0.02] \\ [-0.02, 0.02] \\ [0, 0] \\ [-0.007, 0.007] \\ [-0.007, 0.007] \\ [0, 0] \end{Bmatrix}_{EF_7}$

Sachant que chaque matrice $[R_{PTi}]_{3 \times 3}$ est égale à l'identité pour chaque élément de la chaîne, les torseurs projetés finaux seront égaux à ceux obtenus lors du calcul de torseur classique.

En utilisant tous les résultats obtenus dans les tableaux précédents, ça nous permet de construire le modèle jacobien-torseur du mécanisme de la perforatrice suivant :

$$\begin{bmatrix} \underline{[u]} \\ \underline{[v]} \\ \underline{[w]} \\ \underline{[\alpha]} \\ \underline{[\beta]} \\ \underline{[\delta]} \end{bmatrix}_{CFI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -27.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -27.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & 30 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & 30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 27.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 27.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [-0.05,0.05] \\ [-0.05,0.05] \\ [0,0] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [0,0] \end{bmatrix}_{EF_1} \\ \begin{bmatrix} [-0.01,0.01] \\ [-0.01,0.01] \\ [0,0] \\ [-0.005,0.005] \\ [-0.005,0.005] \\ [0,0] \end{bmatrix}_{EF_2} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [0,0] \\ [-0.007,0.007] \\ [-0.007,0.007] \\ [0,0] \end{bmatrix}_{EF_3} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [0,0] \\ [-0.007,0.007] \\ [-0.007,0.007] \\ [0,0] \end{bmatrix}_{EF_4} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Dans l'expression précédente, après l'élimination des colonnes qui multiplient les dispersions nulles, l'expression du modèle unifié devient :

$$\begin{bmatrix} \underline{[u]} \\ \underline{[v]} \\ \underline{[w]} \\ \underline{[\alpha]} \\ \underline{[\beta]} \\ \underline{[\delta]} \end{bmatrix}_{CFI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -27.5 & 1 & 0 & 0 & -27.5 & 1 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 27.5 & 0 & 0 & 1 & 27.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [-0.05,0.05] \\ [-0.05,0.05] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \end{bmatrix}_{EF_1} \\ \begin{bmatrix} [-0.01,0.01] \\ [-0.01,0.01] \\ [-0.005,0.005] \\ [-0.005,0.005] \end{bmatrix}_{EF_2} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.005,0.005] \\ [-0.005,0.005] \end{bmatrix}_{EF_3} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.007,0.007] \\ [-0.007,0.007] \end{bmatrix}_{EF_4} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.007,0.007] \\ [-0.007,0.007] \end{bmatrix}_{EF_5} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

En tenant compte juste de la direction de la condition fonctionnelle, les dispersions de CF selon l'outil informatique dans la direction des Y sont égales à :

$$CF = \begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{CFi} = \begin{bmatrix} [0,0] \\ [-0.8785,0.8785] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Selon l'étude déterministe de l'exemple de la perforatrice, CF est une valeur comprise entre ± 0.87885 . Dans la section suivante et, selon la méthode statistique, une étude sera appliquée afin de comparer les résultats plus tard.

3.1.2 Application de l'analyse statistique par le modèle jacobien-torseur pour la perforatrice

Le système de perforatrice de carton sera traité par la méthode statistique idem à l'exemple des blocs simples traité dans le chapitre 2. Les résultats obtenus par la méthode suivante seront comparés à ceux obtenus par la méthode déterministe. On reprend le modèle jacobien-torseur obtenu précédemment par la méthode déterministe et on garde seulement les dispersions selon l'axe Y des éléments fonctionnels:

$$\begin{bmatrix} [\underline{u} & \overline{u}] \\ [\underline{v} & \overline{v}] \\ [\underline{w} & \overline{w}] \\ [\underline{\alpha} & \overline{\alpha}] \\ [\underline{\beta} & \overline{\beta}] \\ [\underline{\delta} & \overline{\delta}] \end{bmatrix}_{CFi} = \begin{bmatrix} 100 & -27.5 & 100 & -27.5 & 100 & -10 & 100 & -10 & 100 & 7 \\ 0 & 1 & 27.5 & 0 & 0 & 1 & 27.5 & 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [-0.05,0.05] \\ [-0.05,0.05] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \end{bmatrix}_{EF_1} \\ \begin{bmatrix} [-0.01,0.01] \\ [-0.01,0.01] \\ [-0.005,0.005] \\ [-0.005,0.005] \end{bmatrix}_{EF_2} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.005,0.005] \\ [-0.005,0.005] \end{bmatrix}_{EF_3} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.007,0.007] \\ [-0.007,0.007] \end{bmatrix}_{EF_5} \\ \begin{bmatrix} [-0.02,0.02] \\ [-0.02,0.02] \\ [-0.007,0.007] \\ [-0.007,0.007] \end{bmatrix}_{EF_7} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

De la même façon que dans le chapitre 2, il faut commencer tout d'abord par générer les valeurs aléatoires selon la loi normale par l'outil informatique afin de calculer la CF à partir des intervalles de dispersions d'éléments fonctionnels. Selon la loi de Monte-Carlo, il faut générer 1000 valeurs aléatoires pour chaque intervalle de dispersions des éléments fonctionnels. La figure suivante montre la dispersion de ces valeurs:

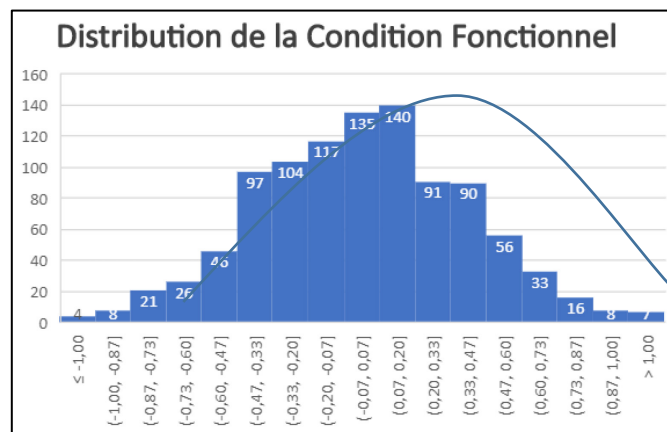


Figure 21 : Histogramme de distribution de la condition fonctionnelle selon la direction Y

En appliquant le test de normalité par l'intermédiaire de la droite de Henry sur les données de la méthode statistique obtenus précédemment en utilisant la commande

LOI.NORMALE. STANDARD.INVERSE (méthode numérique), on obtient l'allure de courbe suivante de normalité :

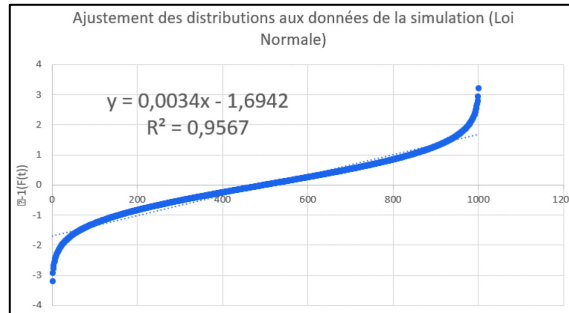


Figure 22 : Ajustement des distributions aux données de la simulation (Loi normale)

Comme les points sont assez bien alignés, la normalité des valeurs aléatoires est bien respectée selon la loi de Henry. De même, à partir de la figure 22, il faut mentionner que :

- L'allure de la courbe est une droite
- La corrélation : $R^2 \approx 0.95$
- Et en utilisant le graphique, on peut trouver les résultats suivants :
 - La moyenne : $\mu = 0.0057$
 - L'écart type: $\sigma = 0.389$

En effet, dans l'approche statistique, les variables aléatoires générées nous donnent une moyenne proche de zéro. La moyenne de la CF est considérée nulle ainsi en appliquant le principe de l'incertitude de propagation de Monte-Carlo [10], la tolérance statistique selon la direction Y devient :

$$FR_D = FR_{Dm} \pm \delta FR_D = -0.00 \pm 0.389 \text{ mm} = FR_Y$$

ce qui implique que la valeur de CF est comprise dans l'intervalle **[-0.389; +0.389]** selon la direction Y par la méthode d'analyse statistique.

3.1.3-Exemple de la perforatrice avec méthode déterministe en synthèse

Pour applique de la synthèse par la méthode déterministe, il faut commencer par le calcul de pseudo-inverse de la matrice [J] de perforatrice afin de la multiplier par la matrice colonne des dispersions de la condition fonctionnelle pour ensuite trouver les intervalles de dispersion des éléments fonctionnels [CF].

En utilisant le logiciel Matlab et par l'intermédiaire de la commande **pinv[J]**, on obtient le résultat suivant :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0288 & 0.0168 & 0.7929 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0107 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3458 & -0.1286 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

On a aussi comme données les dispersions de la CF trouvées plus haut :

$$CF = \begin{bmatrix} [0,0] \\ [-0.8785,0.8785] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

En remplaçant ces résultats dans la formule de synthèse de tolérance définie dans le chapitre 2 :

$$[EF] = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0288 & 0.0168 & 0.7929 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0107 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3459 & -0.1286 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0,0] \\ [-0.8785,0.8785] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

On prend en considération seulement la composante selon l'axe Y de la CF et en tire :

Tableau 20 : Calcul de tolérance par la méthode déterministe en synthèse

Éléments	Torseurs par la méthode statistique	Calcul des tolérances
Élément 1	$EF_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0011 & 0.0011 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0011 \leq u_1 \leq 0.0011$
Élément 2	$EF_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0011 & 0.0011 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0011 \leq u_2 \leq 0.0011$
Élément 3	$EF_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0011 & 0.0011 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0011 \leq u_3 \leq 0.0011$

Élément 5	$EF_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0011 & 0.0011 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0011 \leq u_5 \leq 0.0011$
Élément 7	$EF_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0011 & 0.0011 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0011 \leq u_7 \leq 0.0011$

3.1.4-Exemple de perforatrice avec la méthode statistique en synthèse

On reprend la même matrice pseudo-inverse calculée précédemment avec la méthode déterministe en synthèse:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0288 & 0.0168 & 0.7929 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0107 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3458 & -0.1286 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Pour les dispersions de CF, il faut utiliser celles calculées par la méthode statistique calculée comme suit :

$$CF = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.255 & 0.255 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

D'où, après, on calcule le produit de matrice pseudo-inverse par les dispersions de l'élément fonctionnel obtenu par la méthode statistique suivante :

$$[EF] = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0144 & 0.0082 & 0.1023 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0072 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1016 & 0.0868 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0166 & 0.0013 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0019 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2255 & -0.0225 \\ 0.0094 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1274 & 0.0876 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0071 & -0.0062 \\ 0 & 0.0013 & -0.0002 & -0.0200 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0150 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0288 & 0.0168 & 0.7929 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0107 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3458 & -0.1286 \\ -0.0062 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & 0.2749 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.255 & 0.255 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Les différentes valeurs de dispersion d'éléments fonctionnels de l'exemple précédent seront calculées par l'outil informatique et seront accumulées dans le tableau suivant :

Tableau 21 : Calcul de tolérance par la méthode statistique en synthèse

Éléments	Torseurs par la méthode statistique	Calcul des tolérances
Élément 1	$EF_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_1 \leq +0.0003$
Élément 2	$EF_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_2 \leq +0.0003$
Élément 3	$EF_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_3 \leq +0.0003$
Élément 5	$EF_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_5 \leq +0.0003$
Élément 7	$EF_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_7 \leq +0.0003$

3.1.5-Conclusion

Pour l'exemple de la perforatrice à carton, on récapitule les résultats trouvés par les différentes méthodes :

- La dispersion de CF trouvée par la méthode déterministe est égale à $[-0.8785, 0.8785]$,
- La dispersion de CF selon la méthode statistique est égale à $[-0,389; +0,389]$,

→ Dans cet exemple, la méthode déterministe donne un intervalle de dispersion de la condition fonctionnelle plus large que celui déterminé par la méthode statistique.

- Pour chaque élément fonctionnel, la méthode déterministe en synthèse a donné sa dispersion par l'intervalle $[-0.0011, 0.0011]$,
- Pour chaque élément fonctionnel, la méthode statistique en synthèse a donné sa dispersion par l'intervalle $[-0.0003, 0.0003]$

→ Donc la synthèse de la méthode déterministe, cela donne des intervalles de dispersion d'éléments fonctionnels plus larges que ceux déterminés par la synthèse de la méthode statistique.

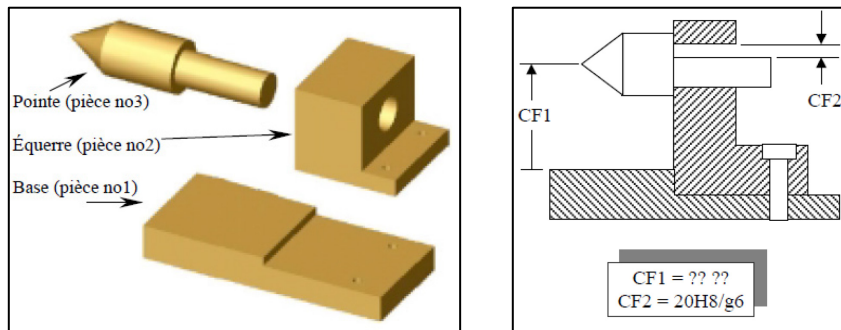
→ Dans l'industrie, plus l'intervalle de tolérance est petit, plus le coût de la fabrication sera élevé.

3.2 Exemple de contre pointe

Par la suite, l'exemple proposé par le professeur Ghié [4] sera traité avec l'analyse statistique et l'analyse en synthèse. On reprend le même modèle unifié obtenu par la méthode déterministe dans la thèse du professeur Ghié afin de réaliser une continuité des deux études.

3.2.1 Application de la méthode statistique pour l'exemple de contre pointe

Ce mécanisme est constitué de 3 pièces (base, équerre, pointe) comme le montre la figure 23 ainsi que l'assemblage de ce mécanisme de contre pointe :



Le modèle jacobien-torseur obtenu est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{u} & \overline{u} \\ \underline{v} & \overline{v} \\ \underline{w} & \overline{w} \\ \underline{\alpha} & \overline{\alpha} \\ \underline{\beta} & \overline{\beta} \\ \underline{\delta} & \overline{\delta} \end{bmatrix}_{CFi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -50 & 100 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.2,0.2] \\ [-0.00125,0.00125] \\ [-0.0025,0.0025] \\ [0,0] \\ [-0.2,0.2] \\ [0,0] \\ [-0.2,0.2] \\ [-0.0025,0.0025] \\ [0,0] \\ [-0.0025,0.0025] \\ [-0.0205,0.0205] \\ [0,0] \\ [-0.0205,0.0205] \\ [-0.001025,0.001025] \\ [0,0] \\ [-0.001025,0.001025] \\ [-0.05,0.05] \\ [0,0] \\ [-0.05,0.05] \\ [-0.0033,0.0033] \\ [0,0] \\ [-0.0033,0.0033] \end{bmatrix}_{\substack{EP_1 \\ EP_2 \\ EP_3 \\ EP_4}} \quad (3.11)$$

En réalisant le calcul matriciel avec l’outil informatique, on obtient le résultat suivant :

$$CF = \begin{bmatrix} \underline{u} & \overline{u} \\ \underline{v} & \overline{v} \\ \underline{w} & \overline{w} \\ \underline{\alpha} & \overline{\alpha} \\ \underline{\beta} & \overline{\beta} \\ \underline{\delta} & \overline{\delta} \end{bmatrix}_{CFi} = \begin{bmatrix} [0,0] \\ [0,0] \\ [-0.87750,0.87750] \\ [-0.008105,0.008105] \\ [-0.0025,0.0025] \\ [0,0] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

On procède de la même manière que le dernier exemple de la perforatrice, il faut commencer par adéquatement insérer les différentes données à notre fichier Excel pour calculer la dispersion de condition fonctionnelle à partir de 1000 valeurs aléatoires. Sachant que, en augmentant le nombre de valeurs générées, on obtiendra une meilleure observation.

Nous portons ici une attention particulière à la composante ‘‘Z’’ de la CF qui est caractérisée par la variation de composantes verticales.

La figure 24 montre l'histogramme des dispersions de la condition fonctionnelle, on remarque par inspection que les données suivent la loi normale.

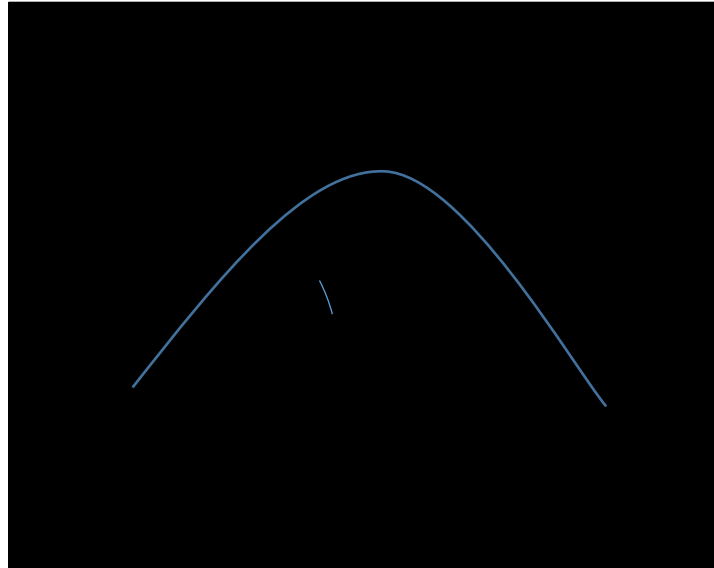


Figure 24 : Histogramme de distribution de la condition fonctionnelle selon la direction Z

En appliquant le test de normalité par l'intermédiaire de la droite de Henry sur les données de la méthode statistique obtenues précédemment en utilisant la commande

LOI.NORMALE. STANDARD.INVERSE (méthode numérique), on obtient l'allure de courbe suivante de normalité :

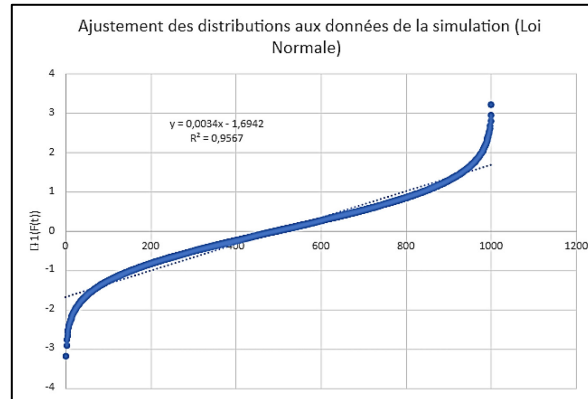


Figure 25 : Ajustement des distributions aux données de la simulation (Loi normale)

Comme les points sont assez bien alignés , la normalité des valeurs aléatoires est bien respectée selon la loi de Henry.

De même, à partir de la figure 25, il faut mentionner que :

- L'allure de la courbe est une droite
- La corrélation : $R^2 \approx 0.95$
- Et en utilisant le graphique, on peut trouver les résultats suivants :
 - La moyenne : $\mu = -0.0078$
 - L'écart type: $\sigma = 0.2548$

En effet, dans l'approche statistique, les variables aléatoires générées nous donnent une moyenne proche de zéro. La moyenne de la CF est considérée nulle. Ainsi, en appliquant le principe de l'incertitude de propagation de Monte-Carlo [10], la tolérance statistique selon la direction Z de mécanisme de contre pointe devient :

$$FR_D = FR_{Dm} \pm \delta FR_D = -0.00 \pm 0.255 \text{ mm} = FR_Y$$

Ce qui implique que la valeur de CF déterminée par la méthode statistique est comprise dans l'intervalle [-0,2548; +0,2548].

3.2.2-Exemple de contre pointe avec méthode synthèse en déterministe

Dans cette partie, on traite l'exemple par la méthode déterministe en synthèse. Il faut commencer par le calcul de pseudo-inverse de la matrice [J] de contre pointe afin de la multiplier par la matrice colonne des dispersions de la condition fonctionnelle pour ensuite trouver les intervalles de dispersion des éléments fonctionnels [CF].

En utilisant le logiciel Matlab et par l'intermédiaire de la commande **pinv[J]**, on obtient le résultat suivant :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0199 & -0.0000 & -0.0004 & 0 & 0 \\ & -0.0001 & 0 & 0 & 0.2493 & 0.0160 \\ & 0.0010 & 0 & 0 & 0.0131 & -0.0536 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 \\ & 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ & 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0125 & -0.0062 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 \\ & -0.0003 & 0 & 0 & -0.0039 & 0.3398 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 \\ & 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ & 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0125 & -0.0062 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 \\ & -0.0003 & 0 & 0 & -0.0039 & 0.3398 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 \\ & 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ & 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ & 0 & 0.0050 & 0.0125 & 0.9993 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 \\ & -0.0004 & 0 & 0 & -0.0053 & 0.3740 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La dispersion de la condition fonctionnelle est comme suit :

$$CF = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.87750 & 0.87750 \\ -0.008105 & 0.008105 \\ -0.0025 & 0.0025 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

En remplaçant ces résultats dans la formule de synthèse :

$$[EF] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0199 & -0.0000 & -0.0004 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0.2493 & 0.0160 \\ 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0.0131 & -0.0536 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0125 & -0.0062 & 0.0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0 & -0.0039 & 0.3398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 & 0 \\ 0 & -0.0125 & -0.0062 & 0.0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0 & -0.0039 & 0.3398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0050 & 0.0125 & 0.9993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0 & -0.0053 & 0.3740 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.87750 & 0.87750 \\ -0.008105 & 0.008105 \\ -0.0025 & 0.0025 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

On prend seulement en considération la direction de la condition fonctionnelle selon l'axe Z de la CF et en tire :

Tableau 22 : Calcul de tolérance par la méthode déterministe en synthèse

Éléments	Torseurs par la méthode statistique	Calcul des tolérances
Élément 1	$EF_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_1 \leq +0.0003$
Élément 2	$EF_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_2 \leq +0.0003$
Élément 3	$EF_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_3 \leq +0.0003$
Élément 4	$EF_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0003 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-0.0003 \leq u_4 \leq +0.0003$

3.2.3-Exemple de contre pointe avec la méthode statistique en synthèse

On reprend la même matrice pseudo-inverse calculée précédemment dans la méthode déterministe en synthèse:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0199 & -0.0000 & -0.0004 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 0 & 0.2493 & 0.0160 & 0 \\ 0.0010 & 0 & 0 & 0.0131 & -0.0536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0125 & -0.0062 & 0.0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0 & -0.0039 & 0.3398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0125 & -0.0062 & 0.0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0 & -0.0039 & 0.3398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0050 & 0.0125 & 0.9993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2502 & -0.0053 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0 & -0.0053 & 0.3740 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Pour les dispersions de CF, il faut utiliser celles calculées par la méthode statistique, sa valeur est comme suit :

$$CF = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,2548 & -0,2548 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

On multiplie la matrice pseudo-inverse jacobienne par la matrice des dispersions de la condition fonctionnelle pour calculer les dispersions des EF :

3.2.4-Concluseon

Pour conclure, pour l'exemple de contre pointe, on récapitule les résultats trouvés par les différentes méthodes :

- La dispersion de CF trouvée par la méthode déterministe est égale à $[-0.8775, 0.8755]$,
- La dispersion de CF selon la méthode statistique est égale à $[-0,2548; +0,2548]$,

→Dans cet exemple, la méthode déterministe donne un intervalle de dispersion de la condition fonctionnelle plus grand que celui déterminé par la méthode statistique.

- Pour chaque élément fonctionnel, la méthode déterministe en synthèse a donné sa dispersion par l'intervalle $[-0.0003, 0.0003]$,
- Pour chaque élément fonctionnel, la méthode statistique en synthèse a donné sa dispersion par l'intervalle $[-0.0001, 0.0001]$

→Donc, la méthode déterministe en synthèse donne des intervalles de dispersion d'éléments fonctionnels plus grands que ceux déterminés par la méthode statistique en synthèse.

CHAPITRE 4 : CONCLUSION ET PERSPECTIVES

4.1-Conclusion :

Dans ce mémoire, une étude déterministe, statistique en analyse et en synthèse a été présentée et appliquée sur des exemples de l'industrie (blocs simples, perforatrice à carton, système de contre pointe).

Dans le premier chapitre, une étude bibliographique a été réalisée dans le but de définir quelques notions générales de tolérance dimensionnelle et fonctionnelle. Ainsi, une présentation du modèle J-T a été expliquée afin d'introduire la procédure d'obtention et d'utilisation de ce modèle.

Dans le deuxième chapitre, une démarche détaillée de l'application des méthodes statistique et déterministe, en analyse et en synthèse, a été réalisée sur l'exemple de blocs simples, ainsi que l'introduction des outils informatiques utilisés pour entamer le calcul de la CF.

Dans le troisième chapitre, modèle numérique a été appliqué sur les deux exemples de perforatrice à carton et contre-pointe afin de diversifier les cas traités dans ce mémoire et dans le but de couvrir le plus d'échantillons possibles de cas industriels.

Le modèle jacobien-torseur unifié est un modèle typique de tolérancement 3 dimensionnel qui combine le torseur modèle de tolérance et le modèle de matrice jacobienne.

Un aperçu sur le résultat de la loi de normalité nous montre que les dispersions des intervalles de tolérances suivent la loi normale (selon le test de normalité de la droite

de Henry), ce qui nous permet par la suite d'appliquer les procédures de la statistique sur les résultats obtenus.

Les coûts augmentent avec le degré de précision exigé. Schématiquement, au-dessous de l'intervalle de tolérance 0,1 à 0,05 mm, les coûts augmentent très rapidement. Si la tolérance augmente, le coût augmente exponentiellement et c'est pour cette raison qu'il est important d'avoir les tolérances les plus larges possibles. Mais dans les industries de précision (biomédicale, aéronautique, etc.), là où il faut absolument avoir la meilleure précision, le bon choix sera d'aboutir l'analyse statistique de tolérance.

L'originalité de cette étude consiste à appliquer l'approche statistique sur le modèle J-T et de comparer les résultats obtenus à ceux déterminés par la méthode déterministe. D'autre part, l'application de la synthèse de tolérance sur les dispersions obtenues pour enfin en conclure sur les résultats.

4.2-Perspectives :

Exercer un test simple de normalité sur le nombre de cotes ou dispersion d'éléments fonctionnels ne vérifie pas le pourcentage de rebut imposé par l'utilisateur qui permet de se décider sur le tolérancement spécifié [5].

Donc il faut faire une optimisation des résultats trouvés qui consiste aux étapes suivantes :

- Déterminer le pourcentage de rebut de pièce ou d'assemblage de la chaîne : pourcentage de rebut calculé.
- Comparer le pourcentage de rebut calculé à celui imposé
- Modifier les écarts sur la base de la comparaison précédente :

- Si le pourcentage (%) de rebut calculé $<$ pourcentage de rebut imposé $\pm \varepsilon$ alors, élargir les intervalles de tolérances les plus fines. (ε est l'écart attribué au pourcentage de rebut imposé).
- Si pourcentage de rebut calculé $>$ pourcentage de rebut imposé $\pm \varepsilon$ alors, réduire les intervalles de tolérances les plus larges.
- Sinon accepter le résultat.

L'utilisation d'autres tests de normalités (Test de Shapiro-Wilk, Test de Lilliefors, Test de Anderson-Darling, Test d'Agostino, etc.) est nécessaire afin d'étudier le p-value issue de chaque test et dans le but de déterminer les degrés de compatibilité des données de la distribution pour chaque test.

Toutefois, la question qui se pose : pourquoi étudier à l'aide de tests compliqués ce que l'on pouvait constater sur des graphiques simples ? Ces tests nous permettent d'obtenir des résultats concrets avec une approche précise et délicate, cette argumentation est très importante lorsque le risque mis en jeu est éminent. Il faut noter qu'il est indispensable d'avoir des outils informatiques automatisés pour traiter ces variables (logiciel R par exemple) ainsi que pour identifier les valeurs aberrantes par la suite. Mais, pour cela, il faut avoir les compétences ainsi que l'expertise dans l'utilisation des outils automatisés de statistique [16].

Références bibliographiques

- [1] G. Alefeld et D. Claudio, "The basic properties of interval arithmetic, its software realizations and some applications," *Computers & Structures*, vol. 67, pp. 3-8, 1998.
- [2] P. Bourdet et A. Clement, "A study of optimal-criteria identification based on the small-displacement screw model," *CIRP annals*, vol. 37, pp. 503-506, 1988.
- [3] J.-F. Debonnie, "La fabrication, un problème de conception," 1999.
- [4] W. Ghié, "Modèle unifié Jacobien-Torseur pour le tolérancement assisté par ordinateur," Université de Sherbrooke., 2004.
- [5] A. Hassani, N. Aifaoui, A. Benamara et S. Samper, "Méthodologie d'analyse et d'optimisation des tolérances dans un contexte de conception intégrée: TOL_ANALYSES," *Mechanics & Industry*, vol. 9, pp. 381-395, 2008.
- [6] A. Yettou et A. Maslouhi, "Méthodologie de conversion des spécifications géométriques de tolérance en zones d'incertitude," Université de Sherbrooke., 2011.
- [7] C. Hohmann, "Audit combiné qualité/supply chain," *Edition d'organisation, Paris*, 2004
- [8] M. Desplas, "Matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose et variables duales généralisées en programmation mathématique," *RAIRO-Operations Research*, vol. 26, pp. 313-360, 1992.
- [9] D. Nadeau, "Étude en synthèse des tolérances en conception mécanique," Université du Québec à Trois-Rivières, 2006.
- [10] M. Rousseau, "Propagation d'incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l'infiltration et de l'érosion," 2012.
- [11] J. Boulanger, *Tolérances et écarts dimensionnels, géométriques et d'états de surface*: Ed. Techniques Ingénieur, 1991.
- [12] M. El Feki, "Analyse et synthèse de tolérance pour la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques," 2011.
- [13] P. Beaucaire, "Application des méthodes fiabilistes à l'analyse et à la synthèse des tolérances," 2012.
- [14] W. J. Stevenson, C. Benedetti et Y. A. Youssef, *La gestion des opérations: produits et services*: Chenelière McGraw-Hill, 2012.

- [15] R. Tomassone, "Méthode graphique de calculs de la moyenne et de l'écart type d'une distribution normale-test de normalité," *Revue Forestière Française*, 1963.
- [16] R. Rakotomalala, "Tests de normalité–Techniques empiriques et tests statistiques," *Université Lumière Lyon 2, Version*, vol. 2, 2008.
- [17] B. Anselmetti, "Cotation fonctionnelle tridimensionnelle et statistique," *Hermès*, 2008.
- [18] B. Anselmetti, *Langage des normes ISO de cotation*: Hermès, 2003.
- [19] W. Ghié, "Algorithme d'identification des chaînes de cotes en tolérancement assisté par ordinateur," Université du Québec à Trois-Rivières, 1999.
- [20] A. Chevalier, *Guide du dessinateur industriel*: Hachette, 1989.
- [21] M. Giesecke et H. Spencer, "DYGDON. 1982," *Dessin technique*.