

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI TÉMISCAMINQUE

THÈME :
MODÉLISATION ET SIMULATION DES
ÉCOULEMENTS DANS LES CENTRALES
HYDROÉLECTRIQUES

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR
ZANGA Joseph Maurency

Mai 2018



BIBLIOTHÈQUE

Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue obtained the permission of the author to use a copy of this document for non-profit purposes in order to put it in the open archives Depositum, which is free and accessible to all.

The author retains ownership of the copyright on this document. Neither the whole document, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

À MIEAGHAN

REMERCIEMENTS

Mes remerciements s'adressent en premier lieu mon directeur de recherche le Pr. FOUAD ERCHIQUI, pour son encadrement, sa patience, son professionnalisme, ses conseils, et sa disponibilité.

Je suis également reconnaissant envers tout le personnel administratif et enseignant L'UQAT, en particulier Madame Manon Champagne, Ph. D. Vice-rectrice intérimaire à l'enseignement, à la recherche et à la création, pour sa disponibilité et diligence, qui ont facilité mon cheminement universitaire.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes collègues du département d'électromécanique : PATRICK JODOUIN, FRANCIS KIFUMBI, et MBOCK SINGOCK THOMAS ALPHONSE pour leur très grande collaboration, en ce qui concerne l'initiation aux différents programmes de modélisation et de simulation utilisés dans le cadre de ce travail de recherche. Merci les gars....

Je remercie ma famille et mes amis, pour tout le soutien moral et financier qu'ils m'ont apporté pendant les moments difficiles,

Enfin un merci particulier à celle qui a été des tous les jours mon compagnon dans l'épreuve. Et qui a enduré mes moments de doutes et de frustrations, ...Merci NANA.

Trouvez en ce travail, le fruit de tous vos efforts consentis.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	i
TABLE DES MATIÈRES	ii
LISTE DES TABLEAUX	v
LISTE DES FIGURES	v
LISTES DES SYMBOLES ET DES ABRÉVIATIONS	vii
RESUMÉ	x
ABSTRACT	xi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
1.1 Problématique	3
1.2 Objectif général.....	4
1.3 Objectifs spécifiques et organisation du travail.....	5
CHAPITRE 2 GÉNÉRALITÉS ET ÉTAT DE L'ART	6
2.1 Introduction.....	6
2.2 Composition et fonctionnement d'une centrale hydroélectrique	7
2.2.1 Composition.....	7
2.2.2 Fonctionnement.....	8
2.3 Classifications des turbines	9
2.4 La turbine FRANCIS	11
2.5 Etat de l'art sur la modélisation des centrales hydroélectriques	12
2.6 Conclusion	16

CHAPITRE 3 THÉORIE DES ÉCOULEMENTS DANS LES TURBOMACHINES.....	17
3.1 Introduction.....	17
3.2 Les équations de conservation.....	17
3.2.1 Conservation de la masse (continuité).....	18
3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement.....	19
3.2.3 Conservation de la quantité d'énergie.....	23
3.3 Forme conservative des équations de mouvements.....	24
3.3.1 Equations de Navier-Stokes (continuité et équation dynamique).....	27
3.3.2 Equations d'Euler.....	29
3.3.3 Équations d'Euler dans les turbomachines : le repère relatif.....	32
3.3.4 La méthode unidimensionnelle ou méthode d'Euler.....	34
3.3.5 La méthode quasi-tridimensionnelle / Q-3D.....	36
3.4 Équations de Navier-Stokes dans le repère relatif.....	39
3.4.1 Turbulence et concept de Reynold.....	40
3.4.2 Modélisation de la turbulence.....	42
3.5 Modélisation de l'écoulement près des surfaces : lois de parois.....	45
3.6 Conclusion.....	46
CHAPITRE 4 MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUES DES ÉCOULEMENTS DANS UNE TURBOMACHINES	47
4.1 Introduction.....	47
4.2 Modélisation des milieux continus en mécanique des fluides.....	48
4.2.1 Méthodes des différences finis.....	48
4.2.2 Méthodes des éléments finis.....	50
4.2.3 Méthodes des volumes finis.....	51
4.3 Méthodes des volumes finis et application aux écoulements dans les turbines .	52

4.3.1 Principe de la méthode des volumes finis (MVF) et utilisation par CFX ...	52
4.4 Conclusion	61
CHAPITRE 5 MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE : MÉTHODOLOGIE.....	62
5.1 Introduction.....	62
5.2 Représentation géométrique virtuelle de l'objet étudié.....	63
5.2.1 Calcul des dimensions et DAO des différents éléments.....	65
5.3 Maillage des différents éléments	71
5.4 Simulations	74
5.4.1 Conditions aux frontières.....	74
5.4.2 Critères de convergence.....	76
5.5 Conclusion.....	76
CHAPITRE 6 RÉSULTATS ET ANALYSES.....	77
6.1 Introduction.....	77
6.2 La conduite forcée.....	78
6.3 La bêche spirale	79
6.4 Le distributeur.....	80
6.5 La roue.....	81
6.6 L'aspirateur.....	83
CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES.....	85
ANNEXES.....	91
Annexe 1 : Calculs du distributeur et de la roue.....	91
Annexes 2: Calculs des paramètres de simulations (pressions/vitesses).....	94

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2-1 Comparaison des caractéristiques principales de turbines usuelles	10
Tableau 5-1 Données de base de la centrale LA-1	63
Tableau 5-2 Dimensions de la conduite forcée	65
Tableau 5-3 Dimensions de la bêche spirale	66
Tableau 5-4 : Dimensions du distributeur	67
Tableau 5-5 : Dimensions de la roue	69
Tableau 5-6 : Dimensions du distributeur	70
Tableau 5-7 : Quelques paramètres de Maillage	72
Tableau 5-8 Paramètres généraux de simulations	74
Tableau 5-9 Paramètres d'entrée et de sortie de chaque éléments	75

LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 Estimation de la pénurie des énergies fossiles	2
Figure 1-2 Part de l'hydroélectricité dans la production mondiale et des énergies renouvelables	2
Figure 1-3 Processus général de modélisation de la centrale	4
Figure 2-1 schéma de fonctionnement d'une centrale hydroélectrique	6
Figure 2-2 Turbines: Pelton (à gauche); Francis (Au milieu); Kaplan (à droite)	9
Figure 2-3 Diagramme de sélection du type de turbines en fonction de la vitesse spécifique	10
Figure 2-4 Vue en coupe d'une turbine Francis	12
Figure 3-1 Ligne de courant sur une surface axisymétrique	35
Figure 3-2 Écoulement tridimensionnel dans un canal inter-aube	36
Figure 3-3 Conditions aux limites de Neumann et Dirichlet	38
Figure 3-4 approche de lois de paroi	45
Figure 3-5 approche des modèles bas-Reynolds	45
Figure 4-1 Élément triangulaire à trois nœuds i, j et k	56
Figure 4-2 Propriétés des fonctions de forme dans le cas d'un triangle linéaire	57

Figure 4-3 Représentation des repères : local et global	58
Figure 4-4 Organigramme de calcul(CFX)	60
Figure 5-1 Algorithme de modélisation et de simulation de la centrale	64
Figure 5-2 CAO de la conduite forcée : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide	66
Figure 5-3 CAO de la bêche spirale : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide	67
Figure 5-4 CAO du distributeur : (À gauche) Modèle solide; (À droite) Modèle liquide	68
Figure 5-5 CAO de la bêche spirale : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide	69
Figure 5-6 CAO de l'aspirateur : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide	70
Figure 5-7 Modules Workbench de géométrie et de maillage	71
Figure 5-8 Maillage de la conduite forcée	72
Figure 5-9 Maillage de l'aspirateur	73
Figure 5-10 Maillage de : la bêche spirale (À gauche), les directrices (Au centre), la roue (à droite)	73
Figure 5-11 Identification des points d'entrée et de sortie de chaque élément de la centrale.....	75
Figure 6-1: Modules Workbench complet de simulation pour chaque élément	78
Figure 6-2 (À gauche) profil de pression ; (À droite) Coupe du profil de vitesse	78
Figure 6-3 (À gauche) profil de pression simulé; (À droite) profil de pression issu de la littérature.....	79
Figure 6-4 Profil de vitesse	79
Figure 6-5 (À gauche) profil de pression ; (À droite) profil de vitesse	80
Figure 6-6 (À gauche) profil de pression ; (À droite) Coupe du profil de pression	81
Figure 6-7 (À gauche) profil de vitesse ; (À droite) Coupe du profil de vitesse.....	81
Figure 6-8 (À gauche) profil de vitesse simulé; (À droite) profil de vitesse issu de la littérature [19]	83

Figure 6-9 (À gauche) profil de pression simulé; (À droite) profil de pression issu de la littérature [20] 83

Figure 6-10 Modèle fluide de l'ensemble de la centrale..... 86

LISTES DES SYMBOLES ET DES ABRÉVIATIONS

Liste des paramètres utilisant l'alphabet grec		
Paramètres	Description	Unités
	Angle d'attaque de l'aube	(°) degré
α		
β	Angle de fuite de l'aube	(°) degré
ε	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente	m^2/s^3
ϕ	Potentiel scalaire de vitesse	-
φ	Densité de flux	J/m ²
$\Gamma\kappa, \Gamma\omega$	Diffusivités effectives	-
Φ	Fonction de dissipation visqueuse	-
η	Rendement	-
λ	Coefficient de puissance	-
μ	Viscosité dynamique	N.s/m ²
μ_t	Viscosité dynamique de turbulence	N.s/m ²
ν	Viscosité cinématique	m ² /s
θ	Composante angulaire en coordonnées cylindriques	(°) degré
ρ	Masse volumique	Kg/m ³
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	Nombres de PRANDTL	-
τ	Facteur de blocage	-
τ_p	Contrainte pariétale	Pa
τ_{ij}	Forces tangentielles de contraintes visqueuses	-
ω	Taux de dissipation spécifique	m ³ /s
$\bar{\omega}$	Vitesse angulaire de la roue	Rad/s
Ω	Vorticité	s ⁻¹

Liste de paramètres

A	Aire de la section	m^2
B	Hauteur d'entrée de la roue	m
D	Diamètres	m
C	Vitesse d'entraînement	m/s
g	Gravité	m/s^2
\vec{F}_{ext}	Forces extérieures	N
H	Enthalpie	J
H_b	Hauteur de chute brute	m
H_n	Hauteur de chute nette	m
I	Intensité turbulente	-
k	Énergie cinétique de turbulence	m^2/s^2
L	Longueur de la conduite forcée	m
m	Masse	kg
N	Vitesse de rotation de la turbine	Tr/mn
\vec{n}	Normale à la surface	-
P	Pression statique	Bars
P_{ext}, P_{cal}	Puissances de forces extérieures et calorifiques	Watts
p_{atm}	Pression atmosphérique	Bars
\bar{p}, p'	Pressions moyenne et fluctuante	Bars
Q	Débit	m^3/s
Q_{op}	Débit optimum	m^3/s
Q_{max}	Débit maximal	m^3/s
q	Terme source	-
R	Rayons	m
r	Composante radiale en coordonnées sphérique	m
Re	Nombre de REYNOLD	-
$S\omega$	Coefficient de moment cinétique	-
T	Température	K
\vec{T}	Tenseurs de contraintes visqueuses	Pa
U	Vitesse absolue	m/s
$u_x, u_y, u_z = u, v, w$	Composantes cartésiennes de la vitesse absolue	m/s
u_θ, u_r, u_z	Composantes sphérique de la vitesse absolue	m/s

\bar{u}, u'	Vitesses moyenne et fluctuante	m/s
V	Volume	m ³
W	Vitesse relative	m/s
y^+	Distance à la paroi	-

RESUMÉ

Grâce aux progrès informatique, il est maintenant possible de faire des calculs numériques précis sur les écoulements tridimensionnels, internes ou externes, compressibles ou incompressibles, visqueux ou potentiels dans les systèmes mécaniques. Dans le cas des turbomachines, la modélisation des équations qui régissent les écoulements est complexe et fait intervenir des interactions entre des structures de formes variées et le fluide (couplage entre les effets de rotations engendré par l'écoulement et les effets des courbures des surfaces solides). Cette interaction modifie l'écoulement moyen de fluide et la turbulence. Toutefois, cette dernière décennie, on constate des avancées considérables en ce qui concerne la résolution des problèmes d'écoulements et d'interactions fluide-structure, autant pour les turbomachines que pour les réacteurs. À cet effet, plusieurs types d'algorithmes et de méthodes numériques sont disponibles dans la littérature, et, généralement, les plus performants sont utilisés par des Logiciels commerciaux.

Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation des écoulements dans une centrale hydroélectrique avec un accent sur les écoulements dans les turbomachines. Pour cela, dans un premier temps, nous développerons différents modèles pour chaque composante de la centrale. Ensuite, nous utiliserons le Logiciel ANSYS-CFX pour la simulation. Une validation qualitative des modèles de ces composantes sera enfin effectuée grâce à des résultats obtenus dans la littérature ; ceci dans la perspective de la simulation et de la caractérisation de l'ensemble d'une centrale hydroélectrique.

ABSTRACT

Thanks to the developments in computer science, it is now possible to make precise numerical calculations on three-dimensional, internal or external, compressible or incompressible viscous or potential flow in mechanical systems. In the case of turbomachines, the modeling of the equations governing the flows is complex and involves interactions between structures of various shapes and the fluid (coupling between the effects of rotations generated by the flow and the effects of the curvatures of the solid surfaces). This interaction modifies the average fluid flow and the turbulence. However, in the last decade, considerable progress has been made in resolving flow problems and fluid-structure interaction for both turbomachines and reactors. For this purpose, several types of algorithms and numerical methods are available in the literature, and generally, Commercial Software uses the best performing ones.

In this work, we are interested in the modeling of flows in a hydroelectric plant, with a focus on turbomachine's flows. Doing so, we will firstly design different models for each component of the plant. Then we will use the ANSYS-CFX Software for simulation. Finally, after validation tests, we will present the results from the modalisation of each component on the one hand and the entire assembly plant on the other hand.

CHAPITRE 1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

Jadis, l'hydraulique était la principale force utilisée pour la production de l'énergie électrique. Toutefois, après la deuxième guerre mondiale, le bas prix des matières fossiles, les coûts élevés des installations hydroélectriques, ainsi que l'avènement du nucléaire ont renvoyés cette source de production d'énergie au second plan. Les questions environnementales (réchauffement climatique, développement durable, énergies renouvelable) ainsi que les pénuries annoncées des matières fossiles (voir Figure 1-1), ont petit à petit réhabilité l'hydroélectricité.

Le grand défi des prochaines décennies est de juguler l'augmentation prévue de la consommation énergétique mondiale avec les coûts et les impacts environnementaux. Ce paradigme nous impose une analyse judicieuse de l'utilisation des différentes sources d'énergies telle que : les combustibles fossiles, le nucléaire et les énergies dites renouvelables. Dans cette dernière catégorie, l'hydroélectricité est une solution à la problématique (coûts/environnement). En effet, elle est la plus économique des énergies renouvelables, elle offre un très bon rendement de transformation (94% - 96%) [1], et un excellent facteur de rendement (nombre de kilowatts-heures produit pendant la durée de vie, par rapport à l'énergie investie dans la construction de l'installation). La production d'électricité venant de l'hydraulique représente 16 à 17% de la production mondiale et représente à elle seule 70% de la production d'électricité par les énergies renouvelables (voir Figure 1-2) [1]. La technologie utilisée dans ce domaine de nos jours repose sur des siècles de développement continu. En outre le coût du kilowattheure ne dépend pas comme pour les énergies fossiles ou nucléaires du coût des combustibles, soumis aux fluctuations du marché mondial. De ce fait l'hydroélectricité est un facteur d'indépendance énergétique pour les pays qui l'exploitent.

Tout ce qui précède nous permet de constater que l'hydroélectricité est l'une des ressources énergétiques propres la plus importante et la plus fiable. D'où la nécessité d'améliorer la conception et le fonctionnement des équipements de production de cette énergie.

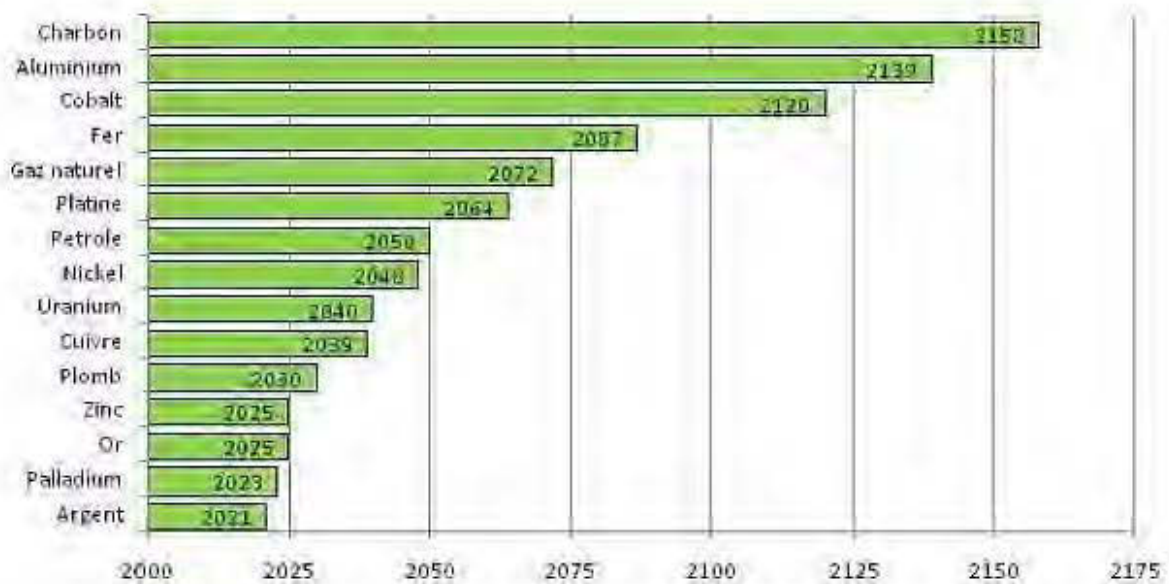


Figure 1-1 Estimation de la pénurie des énergies fossiles [2]



(voir) base sur la capacité de production renouvelable à la fin de 2018

Figure 1-2 Part de l'hydroélectricité dans la production mondiale et des énergies renouvelables [3]

1.1 Problématique

Dans les pays industrialisés et notamment au Canada, beaucoup de sites sont aménagés pour la production d'hydroélectricité depuis bientôt 50 ans. C'est au-delà cette plage que les spécialistes considèrent que l'augmentation des coûts d'exploitation, ainsi que la diminution des performances engendrée par le vieillissement nécessite une réhabilitation. En effet, lors de la conception d'une centrale hydraulique, les différentes composantes de la centrale sont étudiées pour fonctionner conjointement. À l'issue de la réhabilitation d'une centrale, le comportement de la nouvelle turbine avec les anciens équipements déjà existant reste incertain. Dans certains cas, encore non prédictifs, un mauvais agencement du couple roue/aspirateur peut survenir entraînant notamment, une chute soudaine du rendement près du point de fonctionnement nominal de l'installation [4]. La réhabilitation n'est rentable que si elle n'affecte pas les infrastructures de l'aménagement hydraulique (à minima les pièces scellées dans le béton telle que la bêche spirale et l'aspirateur) et qu'un maximum d'éléments existants puissent être conservés. En général, l'ancienne turbine ainsi que les directrices et les avant-directrices sont remplacées par de nouvelles ayant un rendement plus élevé.

Lorsque les exploitants de complexes hydroélectriques désirent ériger ou réhabiliter une centrale, les fabricants de turbines hydrauliques font appel, entre autres, à la Mécanique des Fluides Numérique (MFN) pour estimer les pertes d'énergie dans les diverses composantes de l'installation. Grâce à l'amélioration des outils de calcul (ordinateurs de plus en plus puissants, nouvelles méthodes numériques) et à l'évolution des savoirs techniques (meilleure connaissance de l'écoulement des fluides et des phénomènes dynamiques), il est aujourd'hui possible de créer des profils hydrauliques plus performants. On peut désormais améliorer le rendement d'une machine jusqu'à 5% par rapport à la conception initiale [5]. Tous les composants de la machine sont importants dans l'estimation du gain potentiel, d'où le thème de l'étude proposé : « **Modélisation et simulation des écoulements dans les centrales hydroélectrique** ». Plus simplement, l'objectif principal poursuivi par ce travail est l'élaboration d'un modèle de l'écoulement dans le circuit hydraulique (conduits, bêche spirale, distributeurs, turbine, diffuseur) d'une centrale hydroélectrique.

1.2 Objectif général

Jusqu'ici, c'est grâce à l'expérimentation que l'on a pu approfondir et mieux comprendre certains phénomènes physiques régissant le fonctionnement des équipements hydroélectriques, et parfois, la démarche expérimentale reste le seul moyen permettant de les caractériser. Par contre, dans le domaine de la conception, de la maintenance et de l'analyse des performances de ces équipements, et malgré les efforts mobilisés dans ce domaine, l'expérimentation ne représente pas le moyen le plus adéquat [4]. En effet, les coûts associés à la fabrication des maquettes expérimentales et des essais entraînent une augmentation du coût total de réalisation. La simulation numérique des écoulements, en particuliers dans sa nouvelle branche dénommée, 'Computational Fluid Dynamics' (CFC) en français Mécanique des Fluides Numérique, est devenue un outil important pour l'étude des écoulements hydrauliques. Notre travail, consiste essentiellement à apporter une contribution au développement des outils de modélisation et de simulation en vue d'améliorer la conception numérique de maquette du circuit hydraulique (conduits, bêche spirale, distributeurs, turbine, diffuseur) des centrales hydroélectriques.

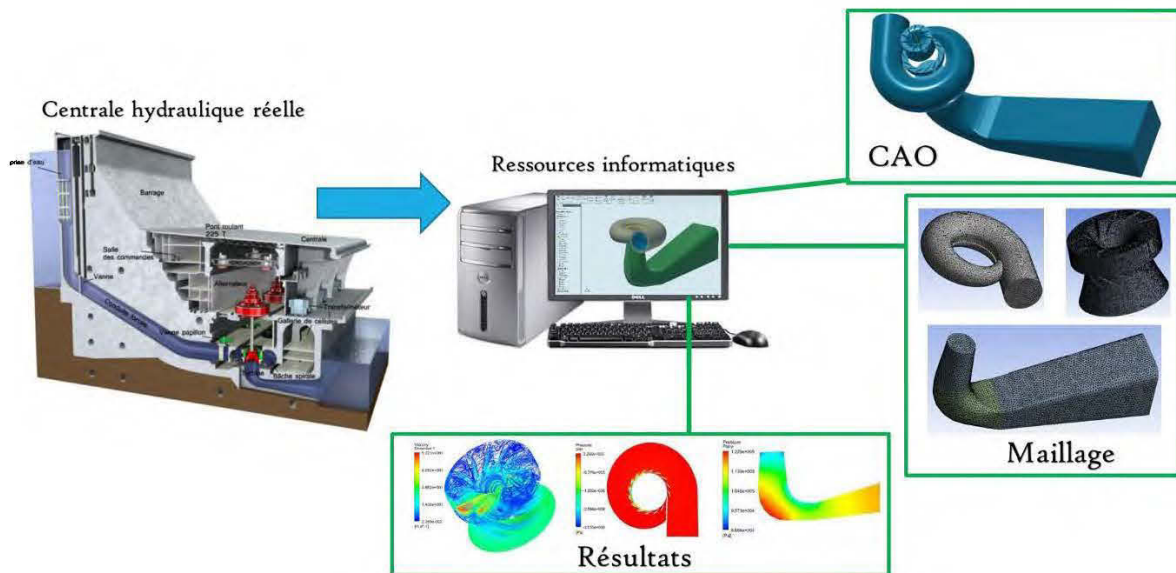


Figure 1-3 Processus général de modélisation de la centrale [6]

1.3 Objectifs spécifiques et organisation du travail

Pour Atteindre cet objectif, nous avons organisé ce document en six (06) chapitres avec organisés comme suit :

1. **Présenter le cadre global, la problématique, les motivations et l'organisation du travail qui nous a été confié** ; cette partie du travail sera effectuée dans le chapitre 1 introductif de l'ouvrage.
2. **Réaliser l'étude d'une centrale hydroélectrique, et présenter l'état de l'art en matière de modélisation des écoulements dans les centrales hydroélectriques** ; Ceci est traité dans le chapitre 2 des généralités et de l'état de l'art.
3. **Présenter la théorie de la modélisation des écoulements dans une centrale hydroélectrique avec un accent sur les écoulements dans les turbomachines** ; cela fera l'objet du chapitre 3
4. **Mettre en œuvre des modèles de simulation pour chaque composante de la centrale** ; Ce sera l'objet du chapitre 4. Ce chapitre contiendra l'essentiel de notre travail.
5. **Présenter, valider et analyser les résultats provenant de la simulation de chaque composante** ; ce sera le contenu du chapitre 5.
6. Le travail se terminera par une **conclusion** qui sera consacré aux remarques, aux observations ainsi qu'aux perspectives liés au sujet adressé.

Notre opérerons de la manière suivante : En se basant sur les données de référence fournies par une documentation provenant de la centrale LA-1, nous dimensionneront et dessineront numériquement les différentes parties du circuit hydraulique de ladite centrale, grâce au logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) AUTODESK INVENTORPRO. V18. Certaines hypothèses portant sur : Les conditions aux frontières, le modèle de turbulence et l'indépendance des maillages, seront pris en compte dans la modélisation et la simulation numérique des différentes parties de la centrale, grâce au logiciel ANSYS-CFX. VR18.1, qui s'appuie sur la méthode des volumes finis. Enfin les résultats obtenus seront comparés à ceux présents dans la littérature de sorte à vérifier les tendances et à servir de validation qualitative de notre modèle.

CHAPITRE 2 GÉNÉRALITÉS ET ÉTAT DE L'ART

2.1 Introduction

D'une manière générale une centrale électrique désigne tout système permettant de transformer une énergie primaire (l'eau, de la vapeur d'eau, du vent) en énergie mécanique, de manière à faire tourner un alternateur, qui à son tour, transforme cette énergie mécanique en énergie électrique. Dans le cas des centrales hydroélectriques, l'eau est l'énergie primaire. Une centrale hydroélectrique comporte de nombreux équipements mais un seul produit de l'électricité et c'est l'alternateur. Pour assurer sa production, l'alternateur doit être mis en rotation par une turbine qui tourne elle-même grâce à la force de l'eau. L'électricité générée par l'alternateur sera élevée à de hautes tensions par un transformateur pour être ensuite envoyée sur les lignes de transport vers les consommateurs d'énergie électrique à des fins de différents usages. Ce chapitre est consacré à la technologie des centrales hydroélectriques, et au fonctionnement des différents éléments les constituant, avec un accent sur la turbine Francis qui est la roue choisie pour notre étude. On passera enfin en revue la littérature en lien avec la modélisation et la simulation des centrales hydroélectriques.

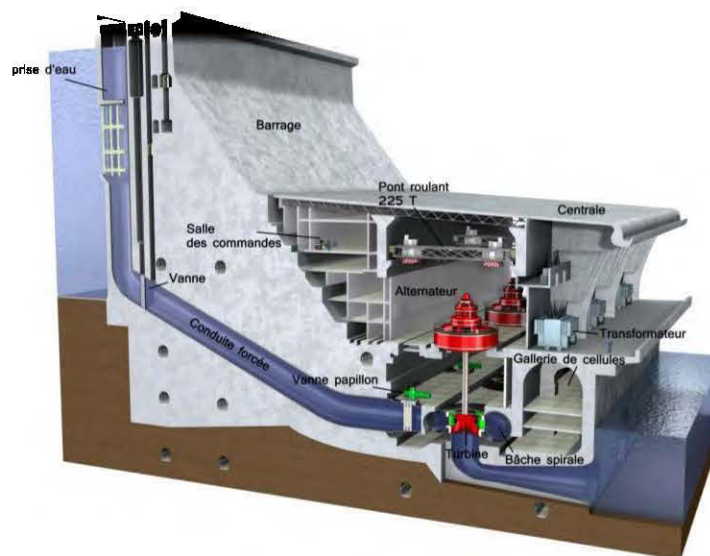


Figure 2-1 schéma de fonctionnement d'une centrale hydroélectrique [6]

2.2 Composition et fonctionnement d'une centrale hydroélectrique

2.2.1 Composition

Le circuit hydraulique d'une centrale de moyenne chute est en général composée :

D'un réservoir d'eau (barrage) : dont le rôle principal est d'assurer la disponibilité de l'énergie primaire (eau) en tout temps tout au long de l'année.

D'une prise d'eau : réalisée dans le cadre d'un barrage d'accumulation. La prise d'eau peu profonde est équipée d'une grille grossière qui empêche les arbres, branches, débris et pierres de pénétrer dans le système de conduit et dans à la turbine. Une porte d'entrée est destinée à couper l'acheminement de l'eau lorsque le système de conduits doit être vidé.

D'une ou plusieurs conduites forcées : servant principalement à orienter l'écoulement de l'eau du réservoir, suivant une dénivellation soit imposée par la géographie du site, soit décidée par des besoins logistiques. Les conduites sont généralement creusées dans le sol, construites comme une goulotte de bois ou de béton, ou encore percées ou dynamités dans la roche avec un tunnelier.

D'une bêche spirale : C'est en fait un réservoir sous pression de l'eau à l'amont du barrage. La distribution de l'eau à chacun des passages se fait par la diminution de la loi de section au fur et à mesure que l'écoulement progresse. Elle se présente en général sous forme de colimaçon, et est faite d'un assemblage de tôles d'acier soudées.

Des directrices : elles ont un rôle de régulation. Ce sont les directrices qui contrôlent le débit de l'eau dans la turbine. L'aube directrice est reliée au mécanisme de vannage qui permet de la faire pivoter dans l'axe de son tourillon en même temps que ses voisines et ainsi de faire varier l'espace entre elles. Ce faisant, l'effet est immédiat sur le débit. Un système de régulation asservit la vitesse de rotation à l'ouverture des directrices. Lorsqu'une demande d'électricité supplémentaire se fait sentir, l'alternateur freine la turbine. Dès qu'une variation de vitesse est détectée, le régulateur de vitesse commande le mécanisme de vannage pour la contrer, la consigne étant de maintenir la vitesse de rotation constante pour produire la fréquence synchrone.

La turbine : C'est l'un des éléments les plus importants d'une centrale. Elle assure la transformation de l'énergie potentielle de l'eau, en énergie mécanique qu'elle fournit à l'alternateur, qui lui converti cette force motrice en énergie électrique. Il est important de noter que les turbines doivent pouvoir fonctionner à des débits variables, en fonction de l'apport d'eau inégal du cours d'eau, ou encore des besoins en énergie du réseau. Ces conditions différentes peuvent entraîner des pertes d'énergies importantes.

2.2.2 Fonctionnement

Lors de la mise en service de la centrale, l'eau retenue par un barrage, ayant emmagasinée de l'énergie potentielle, s'engouffre dans la conduite forcée, qui l'achemine à la bêche spirale (conduit en colimaçon). Elle traverse ensuite une roue de turbine qu'elle fait tourner et se dirige vers son axe pour enfin s'écouler dans l'aspirateur situé en dessous. L'énergie mécanique produite par la puissante pression exercée par l'eau sur la turbine est transmise à l'alternateur qui la transforme en énergie électrique. L'alternateur, relié à la turbine par l'arbre, est formé d'une partie mobile, appelée rotor, et d'une partie fixe appelée stator. La paroi externe du rotor est composée d'électroaimants, tandis que la paroi interne du stator consiste en un enroulement de barres de cuivre. Lorsque le rotor tourne dans le stator, les électrons présents dans les barres de cuivre « vibrent ». Le mouvement des électrons crée un courant électrique, un peu comme dans l'expérience de Faraday, réalisée en 1831 et portant sur l'induction électromagnétique, mais à plus grande échelle.

Il est impératif que tous les groupes turbines-alternateurs d'un réseau soient rigoureusement synchronisés, c'est-à-dire qu'ils maintiennent très exactement leur vitesse de rotation. En effet, Les appareils qui consomment de l'électricité sont conçus en fonction d'un courant alternatif dont la fréquence est précise. Cette fréquence dépend de la vitesse de rotation du groupe, c'est-à-dire du nombre de fois par seconde que les aimants du rotor passent devant les barres de métal conductrices du stator. Cette fréquence s'exprime en cycles par seconde ou en hertz (Hz). En Amérique du Nord, le cycle normalisé du courant alternatif est de 60Hz, tandis qu'en Europe, il est de 50 Hz.

2.3 Classifications des turbines

D'une manière générale, nous pouvons distinguer deux grandes familles de turbines hydrauliques de grande puissance, les turbines à impulsion et celles à réaction.

- **Les turbines à impulsion (ou à action) :** Elles sont généralement utilisées sur des cours d'eau ayant un débit faible, et une hauteur de chute supérieure à 300 m. Elles transforment l'énergie cinétique d'un jet d'eau à très haute vitesse et la transmettent à une turbine. Dans cette famille, nous trouvons entre autres la turbine Pelton. C'est une roue hydraulique qui récupère l'énergie du mouvement de l'eau grâce à des augets en forme de cuillère. (Voir Figure 2-2)
- **Les turbines à réaction :** Ce sont des turbines qui combinent la puissance cinétique de l'écoulement du fluide et l'apport de la pression pour les transformer en énergie mécanique. Elles sont généralement utilisées dans les endroits où le débit est moyen, et une hauteur de chute comprise entre 30 et 300 m. Les turbines faisant partie de cette catégorie sont : La turbine Francis, La turbine Kaplan (Voir Figure 2-2), et la turbine à hélice.



Figure 2-2 Turbines: Pelton (à gauche); Francis (Au milieu); Kaplan (à droite) [7]

Le choix de l'une ou l'autre de ces turbines se fait en fonction de plusieurs paramètres, les principaux étant : le débit, la hauteur de chute, et la vitesse de rotation du groupe turbo-alternateur, tels que présentées par la Figure 2-3.

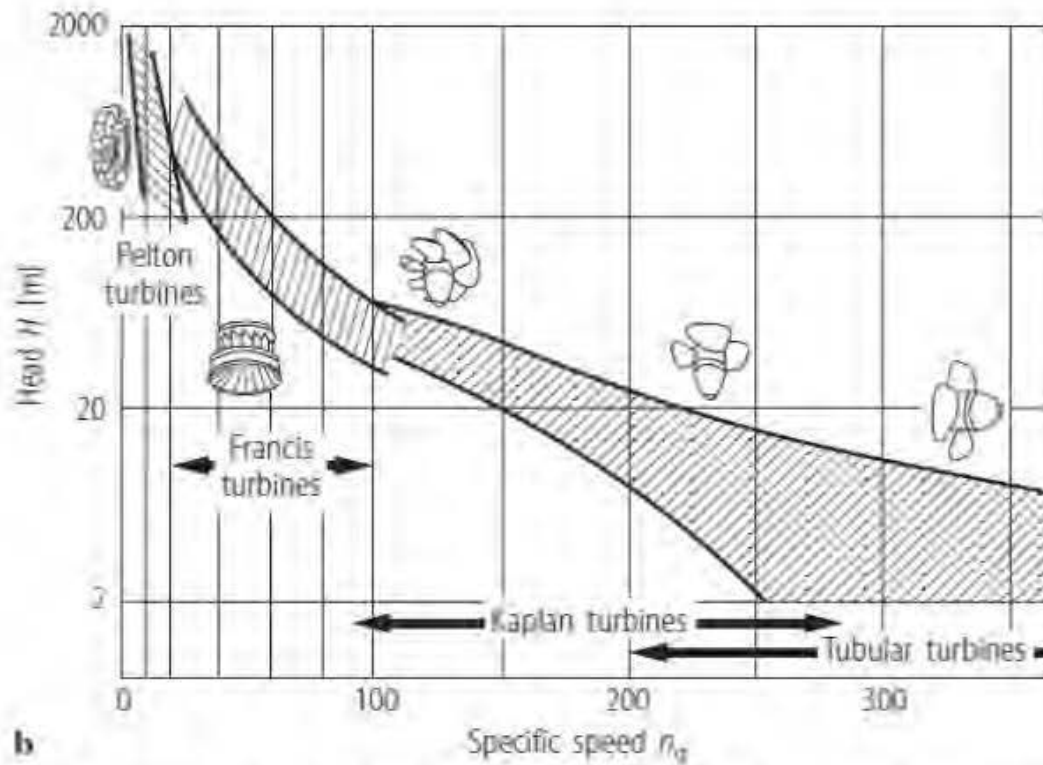


Figure 2-3 Diagramme de sélection du type de turbines en fonction de la vitesse spécifique [8]

Tableau 2-1 Comparaison des caractéristiques principales de turbines usuelles [8]

	Pelton	Francis	Kaplan ou hélice
Vitesse spécifique (rad)	0,07-0,4	0,4-2,2	1,8-4,6
Tête (m)	100-2500	80-500	Jusqu'à 60
Puissance maximale (MW)	35	40	30
Rendement (%)	88	94	94

2.4 La turbine FRANCIS

De toutes les turbines présentées plus haut, La turbine Francis est celle qui équipe les centrales hydro-électriques les plus puissantes au monde [9], c'est à ce titre qu'elle sera celle que nous étudierons tout au long de notre travail. Le principe de fonctionnement d'une turbine Francis est le suivant : l'eau entre en premier dans la volute (aussi appelée bêche spirale). Elle circule dans l'avant-distributeur à aubes fixes puis à travers un cercle de vannage à aubes mobiles où la section de passage peut être variée selon le débit désiré. Le distributeur a donc deux fonctions :

- 1) Donner au filet d'eau une direction convenable à l'entrée de la roue, afin d'éviter les chocs ;
- 2) Régler le débit d'eau admis dans la roue sous une grande pression et transmet son énergie aux pales solidaires du rotor. Une partie de l'énergie est transmise par le fluide sur les pales en raison du changement de pression, tandis que le reste de l'énergie est extraite par la spirale qui entoure la turbine. À la sortie, le fluide a une vitesse faible et peu d'énergie. La forme du tube de sortie est conçue pour décélérer le fluide, et le faire remonter en pression pour l'évacuer axialement dans l'aspirateur dont la fonction est de ramener la pression du fluide à la pression extérieure et de récupérer une grande partie de l'énergie cinétique encore existante à la sortie de la roue.

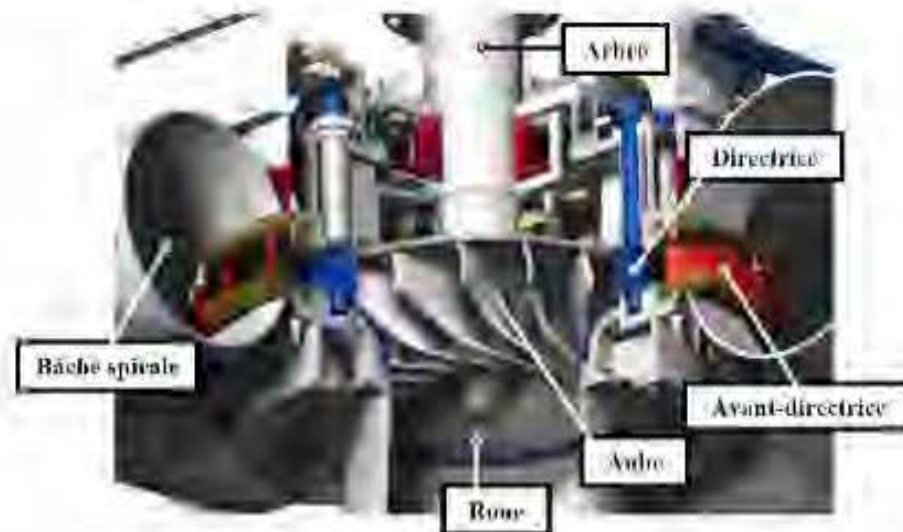


Figure 2-4 Vue en coupe d'une turbine Francis [10]

2.5 Etat de l'art sur la modélisation des centrales hydroélectriques

Jusqu'en 1978, malgré l'existence des méthodes des éléments et différences finis, l'avancée relative dans le domaine de l'informatique, et son influence dans le domaine de l'aérodynamique et des structures mécaniques, le domaine des machines hydrauliques reste encore cantonné dans le développement expérimental. Ce dernier s'appuie sur des bases de données existantes et sur l'expérience des concepteurs de turbomachines [11]. Conséquence des grands progrès dans le développement des outils numériques et des moyens informatiques disponible, La simulation numérique des écoulements occupe de nos jours une place très importante dans les disciplines de la mécanique des fluides et des turbomachines. C'est le point de départ de la résolution des équations d'Euler et de Navier-Stokes dans les applications de la mécanique des fluides. Les CFD (Computational Fluids Dynamics, Comme nous l'appellerons tout au long du document), est une approche unifiée pour l'analyse des écoulements et la conception des turbines hydrauliques. L'application des méthodes numériques pour l'étude des écoulements dans les turbines hydrauliques peut se décomposer en trois phases majeures :

1. La méthode quasi-tridimensionnelle / Q-3D (1978 - 1987) [12-16]

Elle consiste à décomposer l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels : le plan méridien et le plan aube a aube. Cette décomposition se trouve à l'origine de plusieurs logiciels de calcul. Le schéma d'écoulement a pour hypothèse principale la présence d'un nombre élevée d'aubes entraînant ainsi la considération de l'écoulement comme axisymétrique et stationnaire. Le calcul de l'écoulement méridien permet de déterminer les nappes de courant intérieur de la machine. Durant cette période, seule les simulations de fluide dans les machines à leur point de fonctionnement nominal étaient possibles. Les autres plages de fonctionnement n'étaient pas encore à l'ordre du jour.

2. La méthode EULER-tridimensionnelle (1978 - 1994) [17]

Elle consiste en la résolution des équations d'EULER dans un repère absolu en coordonnées cylindriques, pour un écoulement stationnaire et axisymétrique. Ces équations sont complétées par l'équation de continuité et de conservation de la rothalpie. Cette résolution permet la détermination de l'écoulement méridien. Les conditions aux limites appliquées sont celles de Dirichlet sur la paroi, et celles de Neumann à l'entrée et la sortie du domaine méridien. Grâce à cette méthode il a été possible de démontrer que l'écoulement dans une turbine Francis, suivait une trajectoire axiale symétrique, ce qui n'était encore qu'une intuition avec la méthode précédente. Elle permet également de réaliser des études sur des plages de fonctionnements différents du point de fonctionnement nominal. L'article de Göde et al., publié en 1987 est une référence dans le domaine, reconnu comme étant la première simulation réussie par la méthode Euler-3D.

3. Le banc d'essai virtuel (1990 - à nos jours) [18-27]

Dans les années 90, la méthode des volumes finis, qui utilise les équations de conservations de masse et de quantité de mouvement, est devenue un moyen efficace pour résoudre les équations de Reynolds navires-stokes moyennés (RANS), pour la conception des turbines en général et de la turbines Francis en particulier. La plupart des logiciels commerciaux et des compagnies de fabrication de ces équipements de nos jours, utilisent cette méthode. (ASC, CFX, ANSYS etc...). Elle prend en compte les écoulements turbulents, grâce aux modules K-epsilon et K-oméga, ce qui donne accès à l'analyse des pertes de charges et de l'écoulement

dans les couches limites. Durant cette période, des études plus poussées ont donc été menées sur chaque partie de l'installation hydraulique, (conduite forcée, bêche spirale, roue, diffuseur). Tout ceci a influencé la conception de nouvelles roues Francis, et a créé la possibilité de procéder à la réhabilitation des installations plutôt que la construction de nouvelles. Les recherches sur les différents équipements de la turbine sont en ce moment même le sujet de plusieurs études, notamment par de organismes comme : le ERCOPTAC (European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion), ou encore Institut Fédéral de Technologie de Lausanne, qui a mené le projet FLINT, les travaux spécifiques de l'heure portent sur l'amélioration de la simulation numérique de l'écoulement dans le diffuseur, les interfaces d'écoulement, et les modèles de turbulences.

Lain et al. [28] Montrent l'utilité de la simulation numérique comme outil de conception et d'optimisation des turbines hydrauliques, dans le but de déterminer des courbes de rendement en collines (hill curves), et l'analyse des pertes de charge. Ils utilisent pour cela la méthode des volumes finis. Ils procèdent par un maillage individuel de chaque composante de la turbine. Ce maillage est raffiné localement dans les zones les plus sensibles.

Il s'appuie sur la méthode RANS, $K-\omega$ SST (Shear Stress Transport) pour modéliser la turbulence. Dans le but de valider les simulations numériques des mesures utilisant des capteurs de pression dynamique ont été faite, et elles montrent une bonne concordance avec les résultats des simulations.

Ying et al. [23] traitent de l'écoulement turbulent instationnaire en 3D d'une turbine Francis avec la CFD. Les équations gouvernantes sont discrétisées dans l'espace par la méthode des volumes finies, et dans le temps par la méthode des différences finies. Le modèle est calculé avec le logiciel CFX-TSC flow et le modèle de turbulence utilisé est le RANS $K-\epsilon$. Les champs d'écoulement sont simulés dans la volute, le distributeur, le rotor et le diffuseur, dans les conditions optimales de fonctionnement. Il en résulte la détermination de la vitesse et de la pression en chaque point du champ d'écoulement, et la prédiction des performances. La simulation numérique du champ d'écoulement permet de vérifier que chaque composant de la turbine est bien dimensionné.

Saeed et al. [29] présentent les résultats de la modélisation à grande échelle de l'écoulement de l'eau et de l'analyse des flux induits par les contraintes dans une roue de turbine Francis. La première étape de la modélisation concerne le débit d'eau, afin d'identifier les charges qui agissent sur les aubes de la turbine. L'étape suivante consiste en l'analyse par éléments finis des contraintes appliquées sur la base des distributions de pressions calculées à partir de la modélisation CFD. Les données opérationnelles enregistrées sur l'unité 2 de la centrale Derbentikhan ont été utilisées comme entrées de modélisation. Les résultats des calculs ont révélé que les zones de contraintes élevées sont situées au bord de fuite de la roue, ce qui explique l'observation des fissures dans ces zones.

Huang et al. [30], collaborant avec Swirderski sur un projet d'optimisation et de réhabilitation d'une turbine Francis de la centrale hydroélectrique de Lushui, Utilisent la CFD pour élaborer un modèle numérique incluant l'écoulement interne de la turbine. Le domaine de calcul est composé de plusieurs blocs de grilles créés avec le logiciel CFX et le programme TASCbob, propre à Swirderski Engineering (SE), est utilisé pour affecter l'entrée et les conditions limites de sortie ainsi que pour définir le type d'interface de grilles entre rotatif et non-rotatif des systèmes de coordonnées.

Tridon et al. [4] ont effectué des mesures expérimentales, dans le but de mettre en évidence le phénomène de chute de rendement. Ils établissent une corrélation entre le rapport du rendement adimensionné, sur rendement de meilleur point de fonctionnement (MPF), et le coefficient de débit. La courbe de rendement global de la centrale est représentée en rouge, et celle du coefficient de récupération de l'aspirateur en bleu. Le décrochage observé sur la courbe indique le lieu de dit de l'accident à l'aspirateur.

Ruchi Khare et al. [24] travaillent sur la simulation et l'analyse de l'écoulement turbulent en 3D d'une turbine Francis, à différentes vitesses de rotation. Ils utilisent le logiciel ANSYS CFX. V11 pour la simulation numérique. Les valeurs moyennes des paramètres de l'écoulement tels que les vitesses d'écoulement et les triangles de vitesses à l'entrée, à la sortie de la roue et au niveau du distributeur, sont calculées pour obtenir les caractéristiques de l'écoulement. La géométrie 3D de la turbine et ses composants ont été créées sur ANSYS

Workbench. Le maillage quant à lui, est créé sur ANSYS ICEM CFD. Il utilise des éléments de surface triangulaires 2D et des éléments tétraèdres pour l'écoulement 3D. Le modèle SST est employé pour modéliser la turbulence. Les résultats obtenus ont été validés par des essais expérimentaux.

2.6 Conclusion

Notre contribution sera, en s'appuyant sur les études et résultats les énumérées plus haut de manière non exhaustive, de modéliser le circuit hydraulique de la centrale LA-1 en grandeurs réelles, de sorte à jeter les bases des études éventuelle de ses performances. Pour cela, dans un premier temps, nous développerons différents modèles pour chaque composante de la centrale. Ensuite, nous utiliserons le Logiciel ANSYS- CFX pour la simulation de chacune d'entre elle. Et finalement, après des tests de validation, nous présenterons les résultats provenant de ces différentes simulations, dans la perspective de la modélisation complète d'une centrale hydroélectrique.

CHAPITRE 3 THÉORIE DES ÉCOULEMENTS DANS LES TURBOMACHINES

3.1 Introduction

De façon générale, les différentes étapes d'analyse d'un problème physique s'organisent de la manière suivante : Nous partons d'un problème physique, dont le cadre précis de l'étude est défini par les hypothèses simplificatrices qui permettent ensuite de déterminer le modèle mathématique approprié. La difficulté pour l'ingénieur est de savoir choisir parmi les lois de la physique, celles dont les équations traduiront avec la précision désirée la réalité du problème. La détermination des caractéristiques Dans le cas isotherme, il faut écrire des équations d'équilibre entre les différentes forces agissant sur le fluide. Dans un cas général, les équations utilisées dans les problèmes d'écoulement dans les turbomachines dérivent des équations fondamentales de la mécanique : (équations de continuité, de quantité de mouvement, et d'énergie). Ce chapitre considère d'une manière sommaire, des éléments de la théorie écoulements de fluide, des méthodes de résolution, en mettant une emphase sur les modèles de turbulence, et les écoulements spécifiques aux turbomachines.

3.2 Les équations de conservation

Les équations mathématiques de conservation en mécanique des fluides permettent de reproduire les phénomènes observés dans les turbomachines et les centrales hydroélectriques. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser la modélisation physique avec des hypothèses appropriées pour la résolution de ces équations, qui se présentent sous formes différentielles ou intégrales.

3.2.1 Conservation de la masse (continuité) [31]

Le principe physique stipule que (hormis pour des réactions nucléaires), la masse de matière se conserve. Par conséquent un volume V fixe dans l'espace peut accumuler de la matière ou en échanger avec l'extérieur mais pas en créer ni en détruire. L'équation de bilan de masse d'un fluide ne comporte ni terme source, ni terme puit. La masse d'un volume de fluide contenue dans le volume V s'écrit :

$$m = \iiint_V \rho(M, t) dV \quad (3.1)$$

En effectuant le bilan de masses à travers une surface S limitant le volume V :

$$dm = - \left(\iint_S \rho \vec{U} \cdot \vec{n} ds \right) dt \quad (3.2)$$

La conservation de la masse dit : la variation de masse du volume par unité de temps est égale aux masses entrantes dans V (à travers S) par la même unité de temps.

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dV \right) = - \iint_S \rho \vec{U} \cdot \vec{n} ds \quad (3.3)$$

Le théorème de Green-Ostrogradski [31] permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dV \right) = - \iiint_V \text{div}(\rho \vec{U}) dV \quad (3.4)$$

Le volume de contrôle V étant fixe on peut écrire :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) \right) dV = 0 \quad (3.5)$$

Cette relation étant valable quel que soit V , on en déduit l'équation de continuité, qui est une équation locale valable en tout point du fluide.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (3.6)$$

On peut retrouver des expressions de cette équation dans des cas particuliers d'écoulement :

- Écoulement permanent : pas de variation explicite avec le temps, $\partial / \partial t = 0$:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (3.7)$$

- Écoulement incompressible : le volume de chaque particule du fluide reste constant au cours de son mouvement.

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (3.8)$$

3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement [31]

La conservation de la quantité de mouvement stipule que toute force subie par le fluide correspond à un accroissement de sa quantité de mouvement. Et toute force subie par ce fluide correspond à une diminution de celle-ci. Au cours du mouvement, ce domaine va changer de position, de forme, de dimension, mais restera constitué des mêmes particules fluides (il n'échange pas de masse avec le reste du fluide).

L'équation de conservation de la quantité de mouvement traduit l'équilibre entre la somme des forces extérieures qui exercent une influence sur le fluide et le taux de variation de la quantité de mouvement du fluide de masse m . (principe fondamentale de la dynamique).

$$\frac{d}{dt}(m \vec{U}) = \sum \vec{F}_{ext} \quad (3.9)$$

La résultante des quantités de mouvement par unité de volume ρU est :

$$\iiint_V \rho \vec{U} dV \quad (3.10)$$

Où \vec{U} est la vitesse d'un point matériel (particule fluide) par rapport au référentiel fixe. Mon démontre facilement que la variation dans le temps de la résultante des quantités de mouvement ρU par unité de volume est égale à la résultante des quantités de accélération $d(\rho \vec{U})/dt$ par unité de volume :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho U dV \right) = \iiint_V \frac{d(\rho U)}{dt} dV \quad (3.11)$$

D'autre part le recensement des forces exercées sur V , nous permet de distinguer :

- Les forces de volume s'exerçant à distance en tout point M du volume : la densité des forces par unité de volume exercées par le champ de gravité est ; \vec{g} et dont la résultante (le poids) sur V , vaut :

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV \quad (3.12)$$

- Les forces de surface qui sont transmises par le fluide extérieur au domaine en tout point P de la surface de contact S limitant ce domaine, on en distingue deux :
 - la densité des forces par unité de surface est $-P\vec{n}$; dont la résultante (la force de pression).
 - Les forces de frottement de viscosité due au fait que les particules du fluide sont en mouvement relatif, ce qui génère des forces de frottement.

Ces forces se retrouvent exprimées dans le tenseur de contraintes $\bar{\bar{T}} \cdot \vec{n}$ dont la résultante est :

$$\iint_S \bar{\bar{T}} \cdot \vec{n} dS \quad (3.13)$$

Le tenseur de contraintes se compose du tenseur le forces normales (pression) et du tenseur de forces tangentielles (viscosité).

$$\bar{\bar{T}} = -P\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}}' = -P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

On peut donc réécrire (3.9):

$$\frac{d}{dt}(m\bar{U}) = \sum \bar{F}_{ext} \Leftrightarrow \iiint_{U(t)} \frac{d(\rho\bar{U})}{dt} dV = \iiint_V \rho\bar{g} dV + \iint_S \bar{\bar{T}} \cdot \bar{n} dS \quad (3.15)$$

Le théorème de Green-Ostrogradski [31] permet également d'écrire :

$$\iiint_{U(t)} \frac{d(\rho\bar{U})}{dt} dV = \iiint_V \rho\bar{g} dV + \iiint_V \overline{\text{div}}(\bar{\bar{T}}) dV \quad (3.16)$$

On en déduit l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d(\rho\bar{U})}{dt} = \rho\bar{g} + \overline{\text{div}}(\bar{\bar{T}}) \quad (3.17)$$

Or

$$\overline{\text{div}}(\bar{\bar{T}}) = -\overline{\text{div}}(P\bar{\bar{I}}) + \overline{\text{div}}(\bar{\bar{T}}') = -\overline{\text{grad}}(P) + \overline{\text{div}}(2\mu\bar{\bar{D}}) \quad (3.18)$$

On démontre facilement que pour un fluide newtonien, les composantes du tenseur des contraintes de viscosité $\bar{\bar{T}}'$ dépendent linéairement des composantes du tenseur des taux de déformation pure $\bar{\bar{D}}$.

$$\bar{\bar{T}}' = 2\mu\bar{\bar{D}} \quad (3.19)$$

Avec

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}}(\bar{U}) + \overline{\text{grad}}^T(\bar{U}) \right) \quad (3.20)$$

Or

$$\overline{\text{div}}(\overline{\overline{D}}) = \frac{1}{2} \overline{\text{div}}(\overline{\text{grad}}(\overline{U}) + \overline{\text{grad}}^T(\overline{U})) = \frac{1}{2} [\nabla^2 U + \overline{\text{grad}}(\text{div}(U))] \quad (3.21)$$

On sait par ailleurs que l'expression générale de la dérivation particulaire de $U(u, v, w, t)$:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot (\nabla U) \quad (3.22)$$

En combinant (3.17) et (3.22) on obtient l'équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien. En considérant que la viscosité de dilatation est nulle (c'est-à-dire $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ d'après l'hypothèse de Stokes) :

$$\frac{\partial(\rho \overline{U})}{\partial t} + (\overline{\nabla} \rho \overline{U}) \cdot \overline{U} = -\overline{\nabla} P + \rho \overline{f} + \mu [\overline{\nabla}^2 U + \overline{\nabla}(\text{div}(\overline{U}))] \quad (3.23)$$

Pour un écoulement incompressible $\rho = \text{Cte} \Leftrightarrow \text{div}(\overline{U}) = 0$ On obtient l'équation dite de Navier-stokes.

$$\rho(\overline{\nabla} \overline{U}) \cdot \overline{U} = -\overline{\nabla} P + \rho \overline{g} + \mu \overline{\nabla}^2 U \quad (3.24)$$

On peut aussi simplifier cette équation dans le cas où on néglige les forces de frottements on parle alors de l'équation d'Euler (équation de fluide parfait) :

$$\rho(\overline{\nabla} \overline{U}) \cdot \overline{U} = -\overline{\nabla} P + \rho \overline{g} \quad (3.25)$$

3.2.3 Conservation de la quantité d'énergie [31]

La quantité intensive est ici l'énergie totale spécifique $\rho(e+U^2/2)$ où e est l'énergie interne massique et $U^2/2$ est l'énergie cinétique par unité de masse ; la quantité extensive est alors l'énergie totale du système. Seuls les échanges d'énergie d'origines mécaniques et calorifiques sont pris en compte. La mécanique des fluides est étroitement associée à la thermique, puisque les frottements visqueux engendrent des variations de l'énergie interne et conduisent à une variation locale de la température du fluide donc modifient son mouvement. Le premier principe de la thermodynamique montre que la dérivée temporelle dE/dt de l'énergie totale est égale à la somme de la puissance des forces extérieures et de la puissance calorifique reçue (par la surface S ou produite par unité de temps et de volume), soit :

$$\frac{dE}{dt} = P_{fext} + P_{cal} \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(e + \frac{\bar{U}^2}{2} \right) dV = \iiint_V f \bar{U} dV + \iint_S (\bar{\bar{T}} \cdot \bar{n}) \bar{U} ds + \iiint_V q dV + \iint_S \varphi \bar{n} ds \quad (3.27)$$

Où $q(x,t)$ est un terme source d'énergie calorifique due par exemple au rayonnement absorbe à l'intérieur de V , φ est la densité de flux de chaleur reçue à travers S par convection, par conduction ou rayonnement; f est une force volumique.

En utilisant l'expression intégrale de l'équation de continuité et le théorème de la divergence [31], il vient :

$$\iiint_V \left[\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{\bar{U}^2}{2} \right) - f \bar{U} - \nabla \cdot (\bar{\bar{T}} \bar{U}) - q + \nabla \cdot \varphi \right] dV = 0 \quad (3.28)$$

En supposant la continuité de la fonction sous le signe somme, la relation est valable quel que soit le domaine V considère. L'expression locale est ainsi :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{\bar{U}^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \varphi + f \bar{U} + \nabla \cdot (\bar{\bar{T}} \bar{U}) + q = 0 \quad (3.29)$$

Il en découle après plusieurs développements et considération la forme générale de l'équation de conservation d'énergie.

$$\underbrace{\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{\bar{U}^2}{2} \right)}_{\text{Variation d'énergie}} = \underbrace{-\bar{\nabla} \cdot \varphi}_{\text{Flux de chaleur}} + \underbrace{p(\bar{\nabla} \cdot \bar{U})}_{\text{Effet de compressibilité}} + \underbrace{q}_{\text{Source}} + \underbrace{\Phi}_{\text{Dissipation}} \quad (3.30)$$

La fonction Φ , regroupant les termes contenant la viscosité est la fonction de dissipation. Elle est reliée à la dégradation de l'énergie cinétique en chaleur, du fait des frottements visqueux au sein du fluide.

En introduisant l'enthalpie par unité de masse de fluide $h = e + p/\rho$:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \varphi + \beta T \frac{dp}{dt} + q + \Phi \quad (3.31)$$

En mécanique des fluides, ces équations peuvent s'exprimer sous plusieurs formes différentes : locale conservative (dérivée en temps normale), locale non conservative (la dérivée en temps suit la particule dans son mouvement), ou intégrale. Suivant les problèmes posés, c'est l'une ou l'autre de ces équations qui pourra être retenue, toutes étant équivalentes.

3.3 Forme conservative des équations de mouvements [32]

Généralement, dans le cadre de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, elles doivent être exprimées en termes de variables "conservatives". Ces variables telles que : $\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho h_o, \rho e$, incluant la masse volumique, s'appellent variables conservatives. Quand des variables "conservatives" sont utilisées dans un schéma de différences finies, les équations discrétisées conservent d'une façon plus précise la masse, la quantité de mouvement et l'énergie [31]. Ceci peut être un avantage dans des écoulements hypersoniques, parce que les équations sous forme conservative satisfont les relations de Rankine-Hugoniot et produiront les conditions correctes de saut à travers les chocs. Un autre avantage est que la forme de différences finies de ces équations peut être interprétée en tant que lois intégrales sur le volume de contrôle

des mailles de calcul. Les équations de quantité de mouvement sous forme conservative peuvent être dérivées pour donner, par exemple, l'équation de quantité de mouvement suivant l'abscisse x (supposant l'hypothèse de Stokes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) = \rho g_z + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} U \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'équation de l'énergie peut également être exprimée en termes d'enthalpie totale et de variables conservatives. Une telle forme est extrêmement utile dans la dynamique des fluides et les turbomachines dans les situations où les changements d'enthalpie totale sont faibles. L'équation de quantité de mouvement peut être transformée en :

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \cdot \vec{U} = -\vec{\nabla} p \cdot \vec{U} + \rho g \vec{U} + (\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij}) \vec{U} \quad (3.33)$$

L'équation d'énergie devient alors :

$$\rho \frac{D(H)}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho g \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\tau_{ij} \cdot \vec{U}) \quad (3.34)$$

Avec $H = h + u_i u_i / 2 = h + (u^2 + v^2 + w^2) / 2$. Cette équation peut être combinée avec l'équation de continuité ce qui nous donne :

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) \cdot H = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho g \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\tau_{ij} \cdot \vec{U}) \quad (3.35)$$

Ainsi, les équations conservatives peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{R_s} \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right] + S \quad (3.36)$$

Où $q, E, F, G, T, P, Q,$ et S sont données par :

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_o \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Hv \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho Hw \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -Q_z + \Phi_1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -Q_y + \Phi_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ 2\mu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ -Q_z + \Phi_3 \end{bmatrix}$$

$$S = [0, \rho g_x, \rho g_y, \rho g_z, \rho g_x u, \rho g_y u, \rho g_z w]^T$$

où $Q_x, Q_y,$ et $Q_z,$ sont des taux de transfert de chaleur et $\Phi_1, \Phi_2,$ et Φ_3 sont les termes de dissipation visqueuse et s'expriment comme suit:

$$\Phi_1 = 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu w \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\Phi_2 = 2\mu v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu w \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\Phi_3 = 2\mu w \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu u \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mu v \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\text{Et, } \rho e_o = \rho H - p = \rho h + \rho \frac{V^2}{2} - p.$$

3.3.1 Equations de Navier-Stokes (continuité et équation dynamique) [32]

Comme nous l'avons vu plus haut, les formes différentielles de l'équation de continuité et l'équation de conservation des quantités de mouvement peuvent être obtenues à partir des relations intégrales sur un volume de contrôle et par l'application du théorème de la divergence. Si le fluide considéré est newtonien. Avec considération de la pesanteur, les équations régissant l'écoulement peuvent être exprimées ainsi :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (3.37)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{U}) \cdot \vec{U} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho g + \mu \nabla^2 \vec{U} \quad (3.38)$$

Le terme à gauche de l'égalité représente l'accélération totale, composée de la somme de l'accélération convective, et de l'accélération locale. Les termes au gauche de l'égalité sont les forces (surfiques et volumiques) appliquées sur l'élément de volume ; il s'agit respectivement de la force de pression, la force de la pesanteur, les forces visqueuses, où normalement la viscosité de dilatation est considérée comme nulle. Une discussion détaillée des termes visqueux peut être trouvée en annexe du document. Pour les écoulements laminaires incompressibles, la densité et la viscosité sont supposées constantes dans les équations. Ces équations représentent un ensemble complet de quatre équations pour quatre inconnues, à savoir, la pression (P) et les trois composantes (u, v, w) de la vitesse (U).

Dans la plupart des écoulements internes, le terme de ρg , est #####négligé. Ceci est dû au fait que, les forces rotation qui s'appliquent au fluide dans la roue sont largement supérieures à celle exercée par la pesanteur. L'équation d'énergie est également négligée[31].

Dans ce travail, nous considèrerons donc Les hypothèses suivantes pour l'écoulement dans les turbomachines qui permettent de résoudre des cas particuliers :

- **Le fluide est incompressible** : la masse volumique ρ est supposée constante au cours du temps et dans tout l'espace.
- **L'écoulement est permanent** : donc indépendant du temps.

- **L'écoulement est isotherme** : donc pas d'échange de chaleur

Le système résultant fournis six (04) équations pour l'écoulement tridimensionnel avec pour inconnus \vec{U} et p plus connus sous le nom d'équations de Navier-Stokes en régime permanent, exprimé par le système suivant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \\ \rho \vec{\nabla}(\vec{U}) \cdot \vec{U} = -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{U} + \rho \vec{g} \end{cases} \quad (3.39)$$

Ou plus explicitement :

- En coordonnées cartésiennes avec $\vec{U} = (u, v, w)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{cases} \quad (3.40)$$

- En coordonnées sphérique avec $\vec{U} = (u_r, u_\theta, u_z)$

$$u_r = \sqrt{u^2 + w^2}, \quad u_\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v}{w} \right), \quad u_z = w :$$

$$\begin{cases}
\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial w} = 0 \\
\rho \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial w} + \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial w^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right] \\
\rho \left[u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial w} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial w^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\
\rho \left[u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial w} \right] = -\frac{\partial p}{\partial w} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial w^2} \right] + \rho g
\end{cases} \quad (3.41)$$

Les solutions des équations ci-dessus, peuvent être analytiques (situations très spécifiques : écoulement de couette, écoulement de poiseuille, équation de Bernoulli), ou numériques dans un contexte plus large. Pour ce dernier cas, la solution numérique nécessite des algorithmes de résolution performants, et des ressources informatiques aussi bien matérielles que logiciels.

3.3.2 Equations d'Euler [32]

Comme nous l'avons présenté plus haut, dans le cadre des écoulements non visqueux $\mu=0$ on obtient l'équation connue sous le nom d'équation d'Euler. Elle est utilisable pour l'étude des écoulements éloignés des zones de parois où les effets visqueux sont négligeables.

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{U}) \cdot \vec{U} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f} \quad (3.42)$$

Son autre forme est :

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{U^2}{2} \right) - \vec{U} \wedge (\text{rot} \vec{U}) \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f} \quad (3.43)$$

- En coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Où \vec{f} représente les forces externes de volume, comme par exemple l'accélération de la pesanteur ou les forces d'aubages dans l'hypothèse de symétrie axiale dans les turbomachines. Cette hypothèse est pleinement justifiée dans beaucoup de cas d'importance par la séparation des écoulements en deux zones : une zone dite visqueuse près des parois où les effets dus aux gradients de vitesses sont importants et une zone dite saine dont les effets visqueux sont négligeables. Dans la zone visqueuse, ce sont les équations Navier-Stokes qui régissent l'écoulement, souvent sous une forme simplifiée adaptée au rapport des échelles longitudinales et transversales qui caractérisent les couches limites. Dans la zone saine, on peut utiliser les équations d'Euler avec un important gain en simplicité et temps de calcul.

3.3.2.1 Équations d'Euler et fonction de courant [32]

Un autre niveau d'approximation est constitué par le principe d'irrationalité, $\overline{rot(\vec{U})} = 0$. Pour le vecteur vitesse dont le rotationnel est nul, on démontre que la vitesse dérive d'un potentiel scalaire ϕ : $\vec{U} = \vec{\nabla}\phi$. En substituant cette équation dans l'équation de continuité et en éliminant ρ dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient :

$$dp = -\rho d \left[\frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} \right] \quad (3.45)$$

Qui mène à l'équation suivante dans un système cartésien :

$$(1-M_x^2)\phi_{xx} + (1-M_y^2)\phi_{yy} + (1-M_z^2)\phi_{zz} - 2M_xM_y\phi_{xy} - 2M_xM_z\phi_{xz} - 2M_yM_z\phi_{yz} = 0 \quad (3.46)$$

$$\text{Où } M_x = \frac{u}{a}, \quad M_y = \frac{v}{a}, \quad M_z = \frac{w}{a} \quad \phi_x = u, \quad \phi_y = v, \quad \phi_z = w$$

a est la vitesse du son dans le milieu.

Dans l'écoulement potentiel stationnaire et bidimensionnel, l'équation d'Euler peut être simplifiée en définissant une nouvelle fonction en liaison avec le champ de vitesses. La fonction de courant ψ pour l'écoulement stationnaire et bidimensionnel peut être définie par :

$$\begin{cases} \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho_o}{\rho} \psi_y = u \\ \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\rho_o}{\rho} \psi_x = -v \end{cases} \quad (3.47)$$

En adoptant ces équations, on satisfait automatiquement l'équation de continuité, Si l'écoulement est incompressible, l'équation précédente peut être simplifiée pour donner :

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (3.48)$$

Qui est l'équation de Laplace pouvant être résolue sur un domaine par diverses techniques standard. Dans un écoulement bidimensionnel, il est avantageux de résoudre une équation aux dérivées partielles comme en ψ plutôt que de résoudre deux équations en u et v . Cette approche est donc largement répandue pour les écoulements bidimensionnels. L'approche fonction de courant peut également être utilisée dans l'analyse des écoulements visqueux. Les équations en fonction de courant sont largement répandues dans les domaines suivants :

- Les écoulements non visqueux et incompressibles bidimensionnels.
- Ecoulements compressibles non visqueux et irrotationnels bidimensionnels ($\omega=0$)
- Couches limites bidimensionnelles

3.3.2.2 Équations d'Euler et écoulement à symétrie axiale [32]

D'une manière générale, les écoulements dans les turbomachines sont tridimensionnels, instationnaires, visqueux, turbulents et compressibles. Parmi les approches simplificatrices, on trouve l'hypothèse d'Euler supposant un nombre infini d'aubages [33]. Cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse de symétrie axiale de l'écoulement à condition d'être accompagnée d'un champ de forces d'aubages équivalent. Cette hypothèse consiste à réduire le nombre de variables en coordonnées cylindriques en postulant par exemple qu'aucun paramètre ne varie suivant l'angle θ [33]. ($\partial/\partial\theta=0$). Le système énoncé plus haut se réduit donc à :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial w} = 0 \\ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial w} + \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_r \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial w} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta \\ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial w} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial w} + f_z \end{cases} \quad (3.49)$$

3.3.3 Équations d'Euler dans les turbomachines : le repère relatif [32]

L'écoulement réel dans une turbomachine est tridimensionnel, instationnaire et visqueux. À l'heure actuelle il ne semble pas exister de méthode numérique standard, fiable et rapide, qui résolve les équations de Navier-stokes dans leur ensemble. Ceci nous conduit à introduire des approximations et à négliger certains phénomènes. Les hypothèses les plus courantes sont : l'écoulement se partage en un écoulement principal sans frottements et un écoulement pariétal avec frottements du type couche limite. Le fluide est parfait, incompressible et stationnaire, par rapport à un repère lié aux aubages (écoulement permanent dans le repère relatif). Obtient ainsi une forme de l'équation d'Euler dans le domaine relatif.

$$\bar{\nabla} \left[\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{U^2}{2} - \bar{C} \cdot \bar{U} \right] = \bar{W} \wedge (\text{rot} \bar{U}) + \bar{f} \quad (3.50)$$

En présence d'aubages animés d'un mouvement de rotation, on peut décomposer le champ vectoriel de vitesses à l'intérieur d'une machine tournante de la manière suivante :

$$\vec{U} = \vec{W} + \vec{C} \quad (3.51)$$

Avec : \vec{U} représente La vitesse absolue, est la vitesse d'entraînement et \vec{W} est la vitesse relative.

L'introduction de la vitesse relative permet de ramener l'étude de l'écoulement autour des aubages mobiles à celle de l'écoulement autour des mêmes aubages immobilisés artificiellement. Le repère relatif ou système de coordonnées tournant est le plus indiqué pour l'étude d'une roue mobile Le repère relatif présente les avantages suivant :

- *L'écoulement y est stationnaire dans la plupart des cas.*
- *Les conditions aux limites peuvent être appliquées plus facilement.*
- *Les profils de vitesse ainsi que les couches limites sont semblables à ceux que l'on observait avec un repère fixe.*

En considérant l'écoulement dans l'espace inter-aubages d'une grille d'aubes tridimensionnelle, on peut faire apparaître, dans un repère cylindrique, les composantes des différentes vitesses. \vec{U} , \vec{C} et \vec{W} .

L'équation (3.50) peut alors s'écrire :

$$\vec{W} \cdot \vec{\nabla} E_{rel} = rot \vec{U} (\vec{W} \wedge \vec{W}) \quad (3.52)$$

Avec :

$$E_{rel} = \frac{p}{\rho} + gZ + \frac{U^2}{2} - \vec{C} \cdot \vec{U} = \frac{p}{\rho} + gZ + \frac{(U^2 - W^2)}{2} \quad (3.53)$$

Qui représente l'énergie relative.

Cette équation traduit le fait qu'en l'absence de toute force externe de volume, l'énergie relative se conserve le long de la trajectoire d'une particule fluide. (Equation de Bernoulli). Elle est généralement couplée avec l'équation de continuité et des conditions initiales pour former un système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\tau_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\tau_r u_z)}{\partial w} = 0 \\ \omega_\theta = \frac{1}{W_i} \frac{\partial E_{rel}}{\partial v} + \frac{1}{r} \frac{W_\theta}{W_i} \frac{\partial r U_\theta}{\partial v} + \frac{n_u}{n_\theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r U_0}{\partial u} - \frac{W_0}{W^2} \frac{\partial E_{rel}}{\partial u} \right] \end{cases} \quad (3.54)$$

\mathcal{T} étant le facteur de blocage.

Plusieurs méthodes (principalement numériques) existent permettant de résoudre ce système entre autre nous pouvons citer. Toutefois, les techniques de calcul les plus répandues dans la pratique en matière de turbomachines peuvent être classifiées comme suit :

- Solveurs non visqueux (Euler) pour écoulements bidimensionnels
- Calcul de couches limites y compris les techniques intégrales de quantité de mouvement
- Techniques de Navier-Stokes parabolisées / space marching
- Solutions d'Euler et de Navier-Stokes complètes pour des écoulements compressibles et incompressibles ;
- Techniques quasi-tridimensionnelles.

3.3.4 La méthode unidimensionnelle ou méthode d'Euler [32]

Les méthodes unidimensionnelles travaillent sur une ligne de courant moyenne, sur un tube de courant ou sur un rayon moyen de la machine, ce qui permet de définir un travail représentatif des performances globales. Bien entendu, l'écoulement réel est tridimensionnel et, en fait, extrêmement complexe. Néanmoins, les relations unidimensionnelles parviennent à décrire assez bien l'écoulement interne pour être à l'origine d'une grande partie des méthodes très répandues dans l'industrie. Avec en outre l'avantage non négligeable de sa simplicité intrinsèque. L'une des premières et des plus importantes relations unidimensionnelles qui a été mise en évidence est l'équation d'Euler des turbomachines. Elle se traduit par l'équation suivante applicable sur une ligne de courant (Voir **Figure 3-1**).

$$H_1 - U_1 V_{\theta 1} = H_2 - U_2 V_{\theta 2} \quad (3.55)$$

Où $H = h + \frac{1}{2}V^2$ est l'enthalpie totale.

La rothalpie peut être exprimée sous la forme suivante

$$\Gamma = \frac{P_o}{\rho} - UV_{\theta} = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 - UV_{\theta} \quad (3.56)$$

L'introduction de la vitesse \bar{W} permet aussi d'exprimer la rothalpie en fonction de la vitesse relative :

$$I = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}C^2 \quad (3.57)$$

Ces équations produiront une spécification précise du changement de vitesses tangentielles de $V_{\theta 1}$ à $V_{\theta 2}$ qui est requis pour passer d'une pression totale P_{o1} à P_{o2} . L'équation d'Euler est donc centrale au stade de la conception.

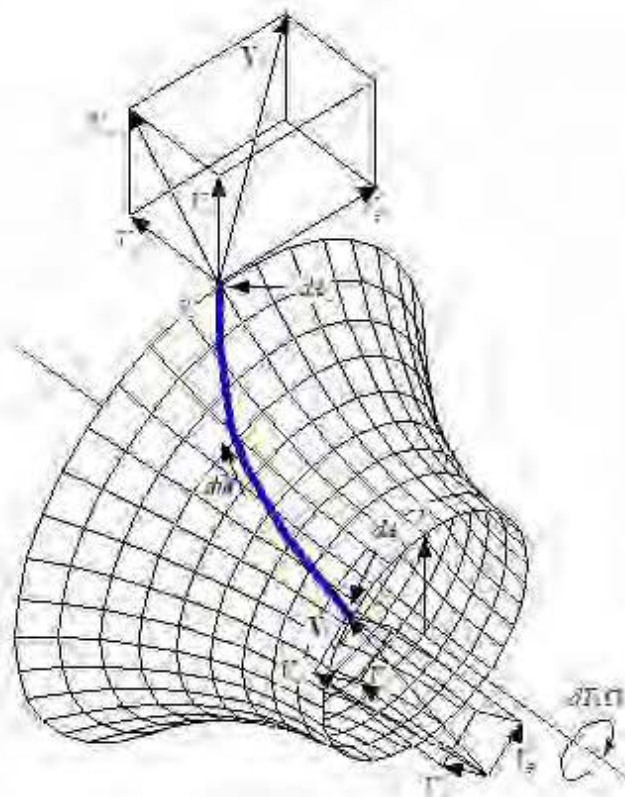


Figure 3-1 Ligne de courant sur une surface axisymétrique [32]

3.3.5 La méthode quasi-tridimensionnelle / Q-3D [32]

Elle consiste à décomposer l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels : le plan méridien S_1 et le plan aube à aube S_2 (Voir **Figure 3-2**). Cette décomposition se trouve à l'origine de plusieurs logiciels de calcul. Le schéma d'écoulement a pour hypothèse principale la présence d'un nombre élevée d'aubes (hypothèse d'Euler) entraînant ainsi la considération de l'écoulement comme axisymétrique et stationnaire. Le calcul de l'écoulement méridien permet de déterminer les nappes de courant intérieur de la machine. On étudie par la suite les divers plans aube à aube résultants. Pour ces deux types de calcul, il existe plusieurs méthodes de modélisation et de résolution.

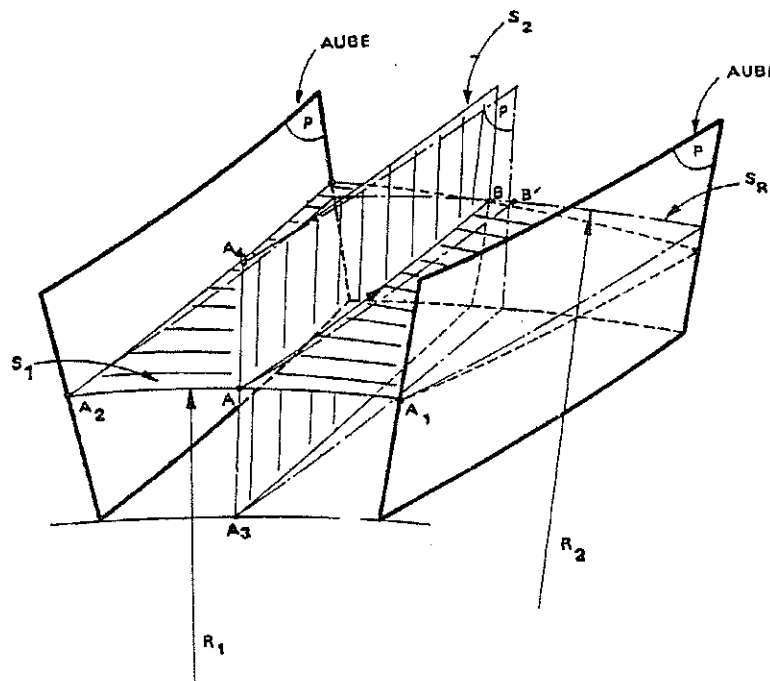


Figure 3-2 Écoulement tridimensionnel dans un canal inter-aube [32]

3.3.5.1 Écoulement méridien : plan (S_1)

L'analyse de l'écoulement méridien peut présenter un champ cinématique extrêmement complexe, même si dans tous les cas l'écoulement est permanent. Partant des équations d'Euler dans un repère absolu en coordonnées cylindriques, pour un écoulement stationnaire ($\partial/\partial t=0$) et axisymétrique ($\partial/\partial\theta=0$), on obtient les Équations régissant l'écoulement méridional :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\tau_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\tau_r u_z)}{\partial w} = 0 \\ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial w} - \frac{u_u}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_r \\ u_r \frac{\partial u_u}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial w} + \frac{u_r u_z}{r} = f_z \\ u_r \frac{\partial u_w}{\partial r} + u_w \frac{\partial u_w}{\partial w} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Où (u_r, u_u, u_z) et sont les composantes de la vitesse absolue et (f_r, f_u, f_z) les composantes des efforts appliqués localement par les pâles. Ce système d'équations est complété par l'expression de la rothalpie suivante :

$$I = h + \left(\frac{W^2}{2} - \frac{C^2}{2} \right) = \int \frac{dp}{\rho} + \left(\frac{W^2}{2} - \frac{C^2}{2} \right) \quad (3.59)$$

Avec h l'enthalpie du fluide.

La résolution du système d'équations, permet la détermination de l'écoulement méridien. En introduisant la définition des lignes de courant à partir des deux composantes de la vitesse (C_r et C_z) et à partir de la vitesse azimutale (C_u), l'équation d'écoulement, sous sa forme contractée, s'écrit comme suit :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi \right) = G(r, z) \quad (3.60)$$

En posant : $C_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $C_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$

Avec $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi \right) = (\rho r)^2 \left[\omega \frac{\partial(ru_u)}{\partial \psi} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial(ru_u)^2}{\partial \psi} \right]$

La fonction $G(r, z)$ est le champ de verticité induit par les aubages qui contient différents termes cinématiques et dynamiques de l'écoulement interne, il sera déterminé par un calcul aube à aube simplifié.

L'équation différentielle obtenue est non linéaire et implicite. Le canal méridien peut être traité en imposant les conditions aux limites suivantes :

- Conditions de Neumann à l'entrée et à la sortie du domaine méridien
- Conditions de Dirichlet sur les parois (plafond et ceinture).

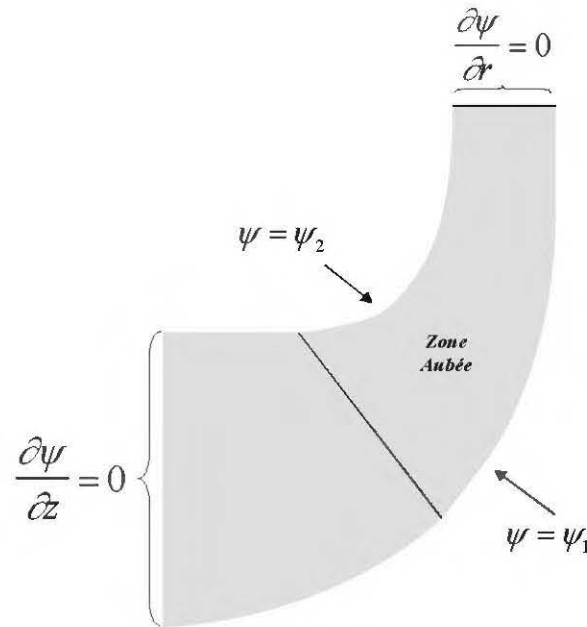


Figure 3-3 Conditions aux limites de Neumann et Dirichlet

3.3.5.2 Écoulement aube à aube : plan (S_2)

L'écoulement aube à aube représente le complément de l'écoulement méridien pour la description quasi-tridimensionnelle de l'écoulement. Il s'agit de l'écoulement dans le repère (u, θ) , que l'on résoudra comme précédemment par une méthode du type fonction de courant. Bien qu'il s'agisse d'une solution proprement bidimensionnelle elle permet d'étudier principalement la forme des aubes et leur influence sur l'écoulement. Les équations utilisées ici sur la surface de révolution proviennent du caractère non rotationnel de l'écoulement, et de l'équation de continuité.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_u}{\partial r} + \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial u} = 0 \\ u_r \frac{\partial(u_r u_u a)}{\partial u} + \frac{1}{r_r} \frac{\partial(r u_\theta a)}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Avec (a) l'épaisseur de la surface d'écoulement.

Les systèmes d'équations (3.60) et (3.61) sont interdépendant car le calcul de l'écoulement méridien nécessite la connaissance de la distribution de $(r u_\theta)$ sur le champ entier à l'intérieur du contour méridien étudié. Cette distribution est donnée par le calcul aube à aube. De même, la cascade de lame nécessite une connaissance de la surface axisymétrique et du paramètre (a) . Ces données sont fournies par le résultat du calcul plan méridien. Le processus itératif est arrêté lorsque deux flux successifs sont estimés suffisamment proches.

3.4 Équations de Navier-Stokes dans le repère relatif [32]

La décomposition de vecteurs de vitesses permet également de réécrire les équations de Navier-stokes dans le repère relatif.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{W}) = 0 \\ \frac{D\bar{W}}{Dt} + 2\bar{\omega} \bar{W} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r} = \frac{-\bar{\nabla} p}{\rho} + \bar{f} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left[\frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right] + \partial_{ij} \lambda \bar{\nabla} \bar{W} \right) \end{cases} \quad (3.62)$$

Le terme $(2\bar{\omega} \bar{W} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r})$ représente la somme des forces de Coriolis et des forces centrifuges qui agissent sur le fluide en plus des forces de surfaces et de volumes.

3.4.1 Turbulence et concept de Reynold [31]

La plupart des écoulements rencontrés dans l'industrie sont dominés par des mouvements chaotiques : c'est la turbulence. Le mouvement turbulent est très complexe et présente la plupart du temps des caractéristiques tridimensionnelles et instables. Les équations de Navier-Stokes gouvernent le mouvement instantané des fluides, qu'ils soient turbulents ou non. Il existe une échelle appelée échelle de Kolmogorov [34] s'interprétant comme étant la plus petite dimension des structures ou tourbillons que l'on peut rencontrer dans un écoulement turbulent. En-dessous de cette échelle, les phénomènes visqueux font leur effet, et l'énergie mécanique est totalement transformée en chaleur. Le modèle RANS expliqué plus haut, bien que satisfaisant, reste incomplet, car nécessitant de prescrire l'échelle de longueur en tout point.

Dans la littérature, il existe différentes approches numériques pour l'étude de la turbulence à l'échelle locale. On peut citer notamment [31]:

- La méthode de simulation directe : DNS (Direct Numerical Simulation) ;
- La méthode de simulation des grandes échelles : LES (Large Eddy Scale) ;
- Les méthodes Statistiques.

La dernière méthode est la plus répandue pour la résolution des équations de Navier-Stokes. C'est une méthode de statistique. Elle considère l'agitation turbulente des molécules de fluide, comme un processus purement stochastique. Toutes les échelles de la turbulence sont modélisées. Les grandeurs instantanées (vitesse, pression, température, etc.) sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante, suivant la décomposition proposée par Reynolds à la fin du XIX^{ème} siècle. L'introduction de cette décomposition et l'application de l'opérateur moyenne statistique aux équations instantanées de Navier-Stokes permettent d'obtenir les équations RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes). C'est un modèle qui s'appuie sur l'hypothèse de Boussinesq à savoir sur la viscosité turbulente est isotopique [35].

La décomposition classique de Reynolds des variables instantanées $p(t, r_i)$ et $u_i(t, r_i)$, en partie moyenne et fluctuante nous donne ;

Pour la vitesse :

$$u_i(t, r_i) = \bar{u}_i(t, r_i) + u'_i(t, r_i) \Leftrightarrow u_i = \bar{u}_i + u' \quad (3.63)$$

Et pour la pression :

$$p(t, r_i) = \bar{p} + p' \quad (3.64)$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho \overline{u'_i u'_i u'_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \overline{p'_i u'_j} \right) \end{cases} \quad (3.65)$$

Où :

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) : \text{est la dissipation visqueuse ;}$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} : \text{est l'énergie cinétique de la turbulence ;}$$

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} : \text{est le tenseur de contraintes et comme tout tenseur il}$$

est symétrique. Le problème de la turbulence consiste à exprimer les 6 quantités indépendantes qu'il contient.

3.4.2 Modélisation de la turbulence [36]

La principale difficulté de la résolution des équations d'écoulement, est liée au caractère turbulent de l'écoulement. Ce problème est difficile à résoudre et à valider, surtout pour des applications aux machines tournantes. La difficulté du problème de la turbulence réside principalement dans le fait qu'il n'y a pas de séparation entre grandes et petites échelles ; on ne peut pas traiter comme en thermodynamique, le comportement à grande échelle sans tenir compte explicitement des mécanismes mis en jeu aux petites échelles, et inversement. Afin de lever ce problème d'empirisme concernant l'échelle de longueur, il est vite apparu naturel de calculer cette échelle en résolvant une équation de transport supplémentaire. C'est là qu'interviennent les modèles de fermeture à deux équations de transport. S'il est très naturel d'introduire l'énergie cinétique turbulente dans la prédiction de la viscosité turbulente. Le choix du second paramètre, à partir duquel une équation de transport sera écrite, est plus délicat. Plusieurs suggestions ont été proposées basées sur les variables : $\varepsilon, k, \bar{\omega}$ et $1/\omega$ [36]

Où ε et ω sont respectivement le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation spécifique.

On a aussi la quantité : $\omega = \frac{\varepsilon}{k}$ Qui représente le taux de dissipation par unité d'énergie cinétique turbulente. Dans tous ces cas, la viscosité turbulente est formulée à partir de l'énergie cinétique turbulente et du second paramètre.

3.4.2.1 Modèle de fermeture ($k - \varepsilon$) [36]

Le modèle de fermeture ($k - \varepsilon$) est l'un des plus utilisés dans le monde industriel. La viscosité turbulente est donnée par l'expression :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.66)$$

Et est donc écrite par combinaison de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation ; ces deux paramètres sont estimés par les équations de transport ci-dessous. C'est un modèle numériquement stable et robuste, il est meilleur pour les écoulements éloignés des parois.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\rho k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \varepsilon) \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Où : σ_k et σ_ε sont appelées nombres de Prandtl ;

P_k caractérise la génération d'énergie cinétique turbulente issue de gradient de vitesse moyenne, et des effets de la pesanteur.

$C_{1\varepsilon}$ et $C_{2\varepsilon}$ sont des constantes.

Les constantes impliquées dans ce modèle, que l'on souhaite les plus universelles possibles :

- $C_\mu = 0,09$: Loi logarithmique en paroi ;
- $C_{1\varepsilon} = 1,44$: déformation ou cisaillement uniforme ;
- $C_{2\varepsilon} = 1,92$: décroissance turbulente isotrope
- $\sigma_k = 1$
- $\sigma_\varepsilon = 1,3$

3.4.2.2 Modèle de fermeture ($k - \omega$) [36]

Ce modèle repose sur l'utilisation d'une échelle caractéristique des gros tourbillons, et sur la même linéarité entre la viscosité turbulente et le cisaillement du champ moyen. La viscosité turbulente est donnée dans ce cas par la relation suivante :

$$\mu_T = \alpha \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.68)$$

Où α est un coefficient permettant de diminuer l'influence de la viscosité turbulente en effectuant une correction "bas-Reynolds". Les équations de transport pour k et ω sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \omega)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega \end{array} \right. \quad (3.69)$$

Dans ces deux équations de transport :

- G représente la génération d'énergie cinétique turbulente ou de la dissipation effective,
- Γ_k et Γ_ω représentent la diffusivité effective de k et ω , respectivement,
- Y_k et Y_ω représentent la dissipation de k et ω par la turbulence.

L'intérêt principal de ce modèle est qu'il est intégrable jusqu'à la paroi.

3.4.2.3 Modèle de fermeture RNG ($k - \varepsilon$) [36]

Il est obtenu à partir de l'équation instantanée de Navier-Stokes en utilisant une technique mathématique appelée "groupe de renormalisation" (RNG : Re-Normalisation Group). Il s'agit donc d'un modèle standard amélioré. Le modèle fait apparaître des constantes différentes de celles du modèle standard $k - \varepsilon$ en occurrence :

- $C_\mu = 0,0845$;
- $\sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0,7179$;
- $C_{1\varepsilon} = 1,42$; $C_{2\varepsilon} = 1,68$.

Ainsi que des termes supplémentaires dans les équations de transport de k et ε . L'élimination de la longueur présente dans ce modèle est effectuée pour décrire le plus fidèlement possible la variation de la viscosité effective en fonction du nombre de Reynolds local. Ceci permet ainsi au modèle une meilleure manipulation des écoulements à faible Reynolds et proches des parois. Le principe de ce modèle est de quantifier les effets des structures turbulentes de petite échelle. Cette approche s'appuie sur l'hypothèse d'universalité des petites échelles, plus connue sous le nom d'hypothèse de Kolmogorov [37]. Le modèle RNG $k - \varepsilon$ introduit deux équations de transport pour k et ε similaires au modèle standard. Ce modèle a pour intérêt majeur d'aboutir sur des résultats plus réalistes dans des régions de fort gradient en ne produisant pas de diffusivité excessive qui fait défaut au modèle $k - \varepsilon$ standard.

3.5 Modélisation de l'écoulement près des surfaces : lois de parois

Les modèles de turbulence basés sur l'hypothèse d'une forte turbulence ne sont pas valables dans la région proche des parois. Il existe alors plusieurs solutions pour tenir compte de la présence des effets visqueux : 1) ne pas résoudre cette région et utiliser à la place une loi de paroi (Voir Figure 3-4), 2) introduire des fonctions d'amortissement forçant le comportement du modèle, appelé dès lors 'modèle bas-Reynolds' (Voir Figure 3-5), ou 3) résoudre des équations différentes pour l'écoulement principal et l'écoulement proche des parois. Les modèles $k-\epsilon$ standard et RNG sont basés sur l'approche (1), le modèle de Spalart et Allmaras [38] sur l'approche (2), et le modèle SST $k-\omega$ sur l'approche (3).



Figure 3-4 approche de lois de paroi

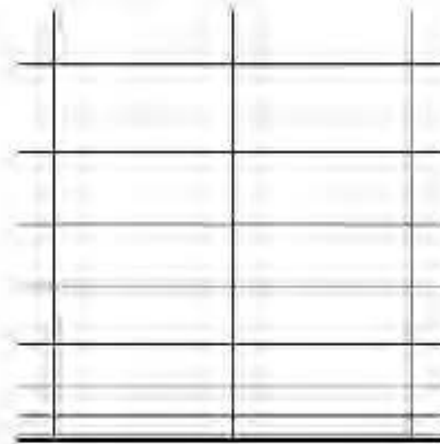


Figure 3-5 approche des modèles bas-Reynolds

La turbulence telle que nous l'avons définie plus haut est limitée à une *turbulence pleinement développée*. Lorsqu'une paroi est proche, les importants gradients modifient fortement cette turbulence. Dans le but de décrire la couche limite, on s'intéresse généralement à l'évolution transversale de la vitesse longitudinale dans la couche limite. On peut baser la réflexion sur une approche globale pour laquelle on cherche à décrire le problème à partir des produits sans dimension. La vitesse locale u dépend des contraintes locales de frottement exercées par la paroi (T_p), des propriétés du fluide (ρ et μ), et de la distance à la paroi (y). Il est

donc possible à partir du théorème de Vashy-Buckingham [39] de construire deux nombres sans dimension que sont :

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_p / \rho}} y^+ \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y \times \sqrt{\tau_p / \rho}}{\nu} \quad (3.70)$$

L'évolution transversale de la vitesse longitudinale dans la région interne de la couche limite témoigne de plusieurs zones composant cette région interne de la couche limite : (1) la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$) dans laquelle le tenseur de Reynolds est négligeable devant les contraintes visqueuses et dans laquelle la vitesse évolue linéairement avec la distance à la paroi : $u^+ = y^+$.

Et la zone (2) logarithmique ($30 < y^+ < 1000$) dominée par les contraintes turbulentes et dans laquelle une évolution logarithmique de la vitesse est observée :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (3.71)$$

κ et B étant des constantes du modèle obtenu expérimentalement sur une plaque plane et lisse.

3.6 Conclusion

L'ensemble des équations présentées tout au long de ce chapitre représente le socle théorique de tous les logiciels commerciaux de calcul des écoulements dans les turbomachines, il est essentiel d'en comprendre la logique de sorte à pouvoir paramétrer de manière efficace le solveur qu'on aura choisi. Celui auquel nous avons eu recours est CFX de ANSYS.v18, dont nous expliciterons l'algorithme de résolution dans le chapitre qui suit.

CHAPITRE 4 MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUES DES ÉCOULEMENTS DANS UNE TURBOMACHINES

4.1 Introduction

Les problèmes rencontrés en mécanique des fluides sont généralement traités du point de vue macroscopique par des équations différentielles, construites selon l'hypothèse des milieux continus. La modélisation analytique de ses équations n'est possible que pour des cas académiques simples. Pour la majorité des problèmes réels, tels que les écoulements dans les turbines, les solutions analytiques sont quasi-impossibles à cause des géométries et des écoulements complexes qui interviennent dans ces milieux fermés. Pour remédier à cette situation, il y a le recours à la modélisation numérique. Effectivement, une fois les équations différentielles sont établies pour un problème d'écoulement donné (modèle mathématique), il est possible de résoudre numériquement l'ensemble des équations qui interviennent dans le modèle mathématique. La modélisation numérique, généralement exprimée sous forme d'un système algébrique, suivie d'une résolution itérative, permet l'accès aux variables physiques du problème à l'étude. Toutefois, l'accès à la formulation algébrique nécessite, d'une part, la discrétisation du système étudié, et, d'autre part, l'utilisation des schémas de discrétisation des variables qui interviennent dans ce modèle mathématique (vitesse, accélération, pression, température, etc.). Autrement dit, la discrétisation des équations aux dérivées partielles, qui régit un problème d'écoulement donné, a pour but de transformer le problème continu en un problème discret. Parmi les méthodes numériques les plus populaires rencontrés en mécanique des fluides on trouve : la méthode de différences finis, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis.

Dans ce chapitre, une description sommaire de la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis sera présentée. Ensuite, une description un peu plus élaborée sur la méthode des volumes finis sera abordée. L'intérêt porté à cette dernière est justifié par son

utilisation dans l'outil CFX de ANSYS, vu que c'est ce dernier qui sera utilisé dans le cadre ce travail pour la modélisation de l'écoulement dans la centrale.

4.2 Modélisation des milieux continus en mécanique des fluides

La Résolution numérique des problèmes de la mécanique des milieux continus nécessite généralement les étapes suivantes :

- Présentation d'un problème physique continu par un modèle mathématique continue (mis en équations)
- Modèle mathématique continu est transformé à un modèle numérique discrétisé, à l'aide d'une méthode numérique (différence finis, éléments finis, volume finis)
- Équations intervenant dans le modèle non continu sont approximées à l'aide des schémas numériques appropriés et d'algorithmes de résolutions
- Algorithme est codé selon un langage approprié en informatique (Fortran, C++, Matlab, etc.)
- Exécution sur un ordinateur
- Obtention de la solution approchée du problème
- Analyse des résultats et post-calcul

4.2.1 Méthodes des différences finis

La méthode des différences finis est considérée comme l'origine des méthodes numérique utilisées pour la résolution des équations différentielles en mécanique des milieux continus. Le principe de base de la méthode consiste à approximer les dérivées, intervenantes dans les équations différentielles régissant le problème à l'étude, à l'aide de développement en série de Taylor. Pour cela, le domaine physique est subdivisé en un ensemble de nœuds et où les variables dépendantes et indépendantes sont définies. À titre d'illustration, la variation selon une variable x d'une fonction F continue, $\partial F / \partial x$, est définie par l'expression suivante :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \quad (4.1)$$

Ensuite, il s'agit de représenter la fonction continue $F(x)$ à l'aide d'une série de Taylor :

$$F(x) = F(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right)_i + \xi(0) \quad (4.2)$$

Où $\xi(0)$ représente les termes d'ordre supérieurs. En remplaçant x par x_{i+1} , x_i et x_{i-1} , nous obtenons respectivement pour (4.2) les expressions suivantes :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6} \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right)_i + \xi(0) \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i = \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6} \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right)_i + \xi(0) \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3}{6(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right)_i + \xi(0) \quad (4.5)$$

Comme approximation de premier ordre, nous pouvons utiliser les formules d'approximation suivantes pour représenter $\partial F / \partial x$, déduites des expressions (4.3)-(4.5):

$$\text{Forward Difference (FD)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i \approx \frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (4.3a)$$

$$\text{Backward Difference (BD)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i \approx \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (4.4a)$$

$$\text{Central Difference (CD)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i \approx \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (4.5a)$$

Les caractéristiques principales de la méthode des différences finies en mécanique des milieux continus sont les suivantes :

- Mise en œuvre simple pour une géométrie simple,
- Mise en œuvre difficile pour une géométrie complexe,
- Pas toujours conservative,
- Généralement pas utilisé dans les codes commerciaux.

4.2.2 Méthodes des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qui permet la résolution d'un grand ensemble de problèmes de la mécanique des milieux continus. Ses débuts datent des années 1941 dans le domaine des poutres et ensuite étendue à plusieurs problèmes de la physique mathématique (Structure/Analyse des contraintes, Écoulement des fluides Transfert de chaleur, Champs Électromagnétique, Mécanique des solides, Acoustique Etc.). Son principe de base est le suivant :

Le milieu physique est subdivisé en un système équivalent de petites régions ou unités (éléments finis). Ces régions sont reliées ensemble par des points communs (nœuds ou points nodaux) et/ou par lignes et/ou par des surfaces de frontière. Ensuite, il s'agit de trouver une solution approchée, du problème donné, par morceaux sur les sous domaines formant l'espace réel. Pour cela, sur chaque sous domaine, les variables physiques recherchées (pression, température, déplacements, etc.) sont définies à l'aide d'une famille arbitraire de fonctions (fonctions d'interpolations) et des nœuds formant l'élément fini. La recherche de la solution consiste à déterminer quel champ local on peut attribuer à chaque élément fini pour que la solution globale obtenue par assemblage de ces champs locaux soit proche de la solution du problème. L'accès aux inconnues nodales est réalisé par la résolution d'un ensemble d'équations algébrique. Pour l'obtention du système algébrique, on effectue un passage des équations aux dérivées partielles, qui caractérisent le problème à l'étude, à une formulation intégrale ; généralement à l'aide de la méthode des résidus pondérés. Ensuite, un post-calcul peut être effectué pour déterminer des quantités secondaires (efforts et contraintes).

Voici les caractéristiques principales de la méthode des éléments finis en mécanique des milieux continus :

- Approche mathématique qui fait intervenir des intégrales ;
- Adaptation à des géométries complexes et aux comportements non linéaires des matériaux ;
- Certaines difficultés pour résoudre les termes non-linéaires apparaissant dans la formulation.

4.2.3 Méthodes des volumes finis

La méthode de volume finis est une conséquence d'application des lois de conservation sur un volume de contrôle. Mathématiquement, il s'agit de considérer une forme intégrale des équations de conservations. Les propriétés sur chaque volume de contrôle sont supposées constantes. L'application de la forme intégrale, comme le cas des éléments finis, donne lieu à un système d'équations algébrique, mettant en relation les valeurs de la variable considérée aux points nodaux (selon des approximations) formant le volume de contrôle.

Voici les caractéristiques principales de la méthode des volumes finis en mécanique des milieux continus :

- Approche physique (bilan des flux) ;
- Formulation conservative;
- S'adapte à des géométries quelconques ;
- Existence de plusieurs schémas pour la résolution des termes non-linéaires
- Utilisée par plusieurs codes commerciaux en mécanique (Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+, Open Foam, etc.)

4.3 Méthodes des volumes finis et application aux écoulements dans les turbines

Nous nous intéresserons à l'application de la méthode des volumes finis à un écoulement de fluide. Pour cela, dans un premier temps, le milieu fluide est subdivisé en éléments de volumes dans lesquels l'équation différentielle d'écoulement est écrite sous une forme conservative. Ensuite, il s'agit de convertir l'équation en un système d'équations algébriques en mettant en relation les valeurs de la variable ϕ aux points nodaux d'un volume de contrôle. Le système algébrique est obtenu par l'intégration de l'équation différentielle de l'écoulement avec l'approximation des différents termes intervenant dans l'équation (convection, diffusion et source).

4.3.1 Principe de la méthode des volumes finis (MVF) et utilisation par CFX

4.3.1.1 Discrétisation du domaine physique

Le domaine fluide occupé par le fluide sera subdivisé en un ensemble fini de volumes de contrôle. La géométrie des volumes de contrôle contenus dans chaque élément de la centrale est tridimensionnelle (3D) mais de formes arbitraires (maillage non structuré). La somme des volumes de contrôles est supposée égale au volume de fluide constituant chaque élément. Le centre de chaque volume de contrôle sera repéré par un vecteur dit *centre de volume de contrôle* et sera noté P . Les nœuds des volumes voisins seront notés suivant leurs positions N , S , W , E , T et B (respectivement : North, South, West, East, Top et Bottom).

4.3.1.2 Formes discrètes des équations fluidiques utilisées par CFX

Le système composé des équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement qui régissent l'écoulement est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \left(\mu_{eff} \left(\frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j)}{\partial x_i} \right) \right) \end{cases} \quad (4.6)$$

Où u_i la composante de la vitesse suivant la direction x_i , ρ est la masse volumique, p est la pression et μ_{eff} est la viscosité effective.

En plus, toute équation régissant l'écoulement interne en turbomachines peut être écrite aussi sous la forme générale suivante (équation de transport de la variable) :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_{eff} \left(\frac{\partial(\phi)}{\partial x_j} \right) \right) + S_\phi \quad (4.7)$$

Où Γ_{eff} représente le coefficient de diffusion, S le terme source et ϕ est la variable qui peut prendre les valeurs suivants : I , u , v , w , k , ε et T .

Le premier terme du membre de gauche de l'équation décrit l'état instationnaire de l'écoulement et le deuxième terme est associé à son caractère convectif. Par contre, le premier et le deuxième terme du membre de droite de l'équation sont associés, respectivement, à la diffusion et à la source.

L'utilisation de la méthode des volumes finis nécessite la transformation des équations différentielles (4.6)-(4.7) sous formes intégrales. Pour cela, dans un premier temps, nous effectuerons une intégration dans le domaine de fluide et, ensuite, nous appliquerons le théorème de la divergence de Gauss qui introduira les conditions sur les surfaces. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho u_j dn_j &= 0 \\
\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV + \int_S \rho u_j u_i dn_j &= - \int_S p dn_j + \int_S \mu_{eff} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dn_j + \int_V S_{u_i} dV \\
\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho u_j \phi_i dn_j &= \int_S \Gamma_{eff} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dn_j + \int_V S_\phi dV
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Pour la transformation des équations intégrales ci-dessus sous forme d'équations algébrique, il est essentiel de représenter, sur chaque volume de contrôle, les variables intervenantes dans ces équations par des approximations polynomiales. En surcroît, il faut aussi introduire la forme discrétisée des opérateurs dérivés par rapport au temps et l'espace. En conséquence, toutes ces manipulations conduiront à l'obtention, sur chaque volume de contrôle, d'une équation discrétisée qui reliera les variables d'un volume de contrôle à ses voisins. L'ensemble de ces équations discrétisées formera finalement un système matriciel.

Ainsi en considérant un schéma avant de premier ordre (voir formule 4.3a) pour la dérivation, en fixant le nombre de points d'intégration utile pour l'approximation des termes intégraux intervenants dans les équations (4.8), et en utilisant l'expression suivante pour le débit massique traversant une surface de volume de contrôle :

$$m_{ip} = (\rho u_i \cdot \Delta n_i)_{ip}^0 \tag{4.9}$$

Nous déduisons les formes discrètes suivantes pour du système (4.8):

$$\begin{aligned}
V \left(\frac{\rho - \rho^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} (\rho u_j \cdot \Delta n_i)_{ip} &= 0 \\
V \left(\frac{\rho u_i - \rho^0 u_i^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} m_{ip}(u_j)_{ip} &= \sum_{ip} p(\Delta n_i)_{ip} + \sum_{ip} \left(\mu_{eff} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta n_i \right)_{ip} + S_{u_i} V \\
V \left(\frac{\rho \phi - \rho^0 \phi^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} m_{ip} \phi_{ip} &= \sum_{ip} \left(\Gamma_{eff} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \Delta n_i \right)_{ip} + S_\phi V
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Où V représente le volume d'intégration de la grandeur ϕ , ip est l'indice du point d'intégration, Δn_j représente la surface d'intégration de la grandeur ϕ et Δt représente le pas de temps.

4.3.1.3 Approximation des fonctions d'interpolations utilisées par CFX

Pour la mise en œuvre informatique de la méthode des volumes finis, on procède généralement en quatre étapes :

- i) Sur chaque volume de contrôle du domaine fluide, caractérisé par un ensemble fini de nœuds, on approxime chaque grandeur physique ϕ (et ses dérivées s'il y a lieu) par une fonction d'interpolation polynomiale utilisant des valeurs de la grandeur physique ϕ sur les nœuds de l'élément ;
- ii) Sur chaque volume de contrôle, on exprime les équations caractérisant l'écoulement fluide en terme des fonctions d'interpolations (et ses dérivées s'il y a lieu) et des valeurs nodales de chaque grandeur physique ϕ . Cela nous mène à une équation (ou système) algébrique élémentaire ;
- iii) On effectue un assemblage, sur l'ensemble des volumes de contrôle, des équations élémentaires. Cela nous conduit à un système algébrique pour lequel on introduit les conditions aux limites ;
- iv) Résolution numérique du système algébrique gouvernant le problème d'écoulement et accès aux valeurs nodales des grandeurs désirées et post-calcul s'il y a lieu.

Toutefois, les évaluations élémentaires des différentes intégrales intervenant dans les équations d'écoulement nécessiteront des calculs numériques. Cela s'effectue sur des points d'intégration par l'entremise des fonctions de forme.

Toute grandeur ϕ , de l'écoulement dans un élément de volume, peut être exprimé à l'aide d'une fonction d'interpolation N (dite *fonction de forme*) intervenant les nœuds de l'élément :

$$\phi = \sum_i N_i \phi_i \quad (4.11)$$

N_i est la fonction d'interpolation pour le nœud i et ϕ_i est la valeur de ϕ au nœud i .

Soulignons que les fonctions N_i sont caractérisées par la propriété suivante :

$$\sum_i N_i = 1 \quad (4.12)$$

À titre d'exemple, considérons un élément triangulaire (2D) (défini par trois nœuds i, j, m) tel que représenté par la figure ci-dessous :

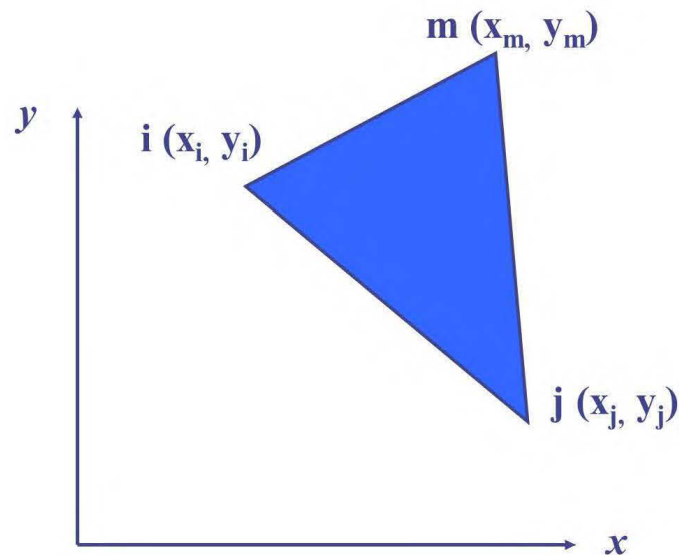


Figure 4-1 Élément triangulaire à trois nœuds i, j et k

Les fonctions d'interpolations possèdent les propriétés suivantes :

$N_i = 1$ at node i	$N_j = 0$ at node i	$N_m = 0$ at node i
$N_i = 0$ at node j	$N_j = 1$ at node j	$N_m = 0$ at node j
$N_i = 0$ at node m	$N_j = 0$ at node m	$N_m = 1$ at node m

Avec $N_i + N_j + N_m = 1$

Qui graphiquement peuvent être illustrées comme suit :

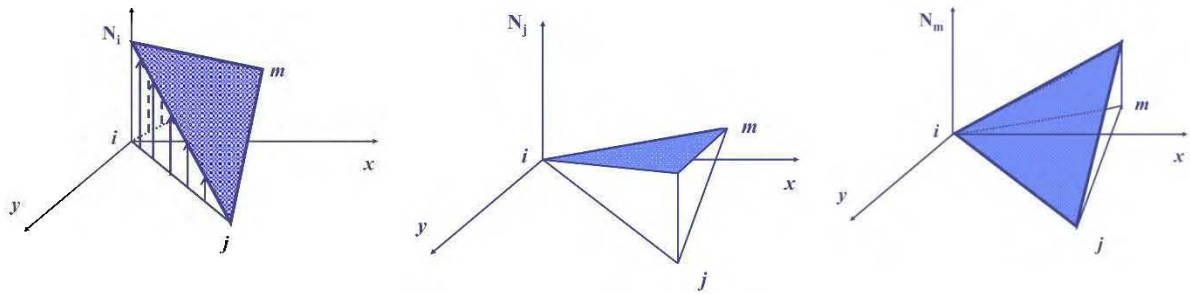


Figure 4-2 Propriétés des fonctions de forme dans le cas d'un triangle linéaire

Dans le cas d'un élément tridimensionnel de forme hexaèdre linéaire à huit nœuds, les fonctions d'interpolations relatives à chacun des nœuds sont données respectivement par les expressions suivantes :

$N_1(s, t, u) = (1-s)(1-t)(1-u)$ $N_2(s, t, u) = s(1-t)(1-u)$ $N_3(s, t, u) = s.t(1-u)$ $N_4(s, t, u) = t(1-s)(1-u)$	$N_5(s, t, u) = u(1-s)(1-t)$ $N_6(s, t, u) = s.u(1-t)$ $N_7(s, t, u) = s.u.t$ $N_8(s, t, u) = t.u(1-s)$	(4.13)
--	---	--------

Les fonctions d'interpolation définies ci-dessus peuvent également être utilisées pour représenter n'importe quel position (x, y, z) à l'intérieur de volume finis :

$$x = \sum_i N_i x_i ; \quad y = \sum_i N_i y_i ; \quad z = \sum_i N_i z_i \quad (4.14)$$

Où (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du nœud i (1-8) de volume fini (hexaèdre). En conséquence, toutes les dérivées dans les directions x, y ou z peuvent être déduite du système (4.10).

Dans le cas d'une transformation isoparmétrique, nous pouvons utiliser les mêmes fonctions de formes pour la géométrie et pour toute grandeur fluïdique. Dans ce cas, pour les expressions des dérivées selon une direction donnée et en un point d'intégration ig d'une grandeur principale ϕ nous pouvons écrire :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{ig} = \sum_n \left. \frac{\partial N_n}{\partial x} \right|_{ig} \phi_n; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{ig} = \sum_n \left. \frac{\partial N_n}{\partial y} \right|_{ig} \phi_n; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{ig} = \sum_n \left. \frac{\partial N_n}{\partial z} \right|_{ig} \phi_n \quad (4.15)$$

Généralement, les fonctions d'interpolations sont décrites dans un repère locale tel que (s, t, u) [voir formules (4.13)]. Dans ce cas, l'accès aux dérivées des fonctions de formes N_i dans le repère global s'effectue à l'aide de la transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\langle \frac{\partial N_n}{\partial s} \quad \frac{\partial N_n}{\partial t} \quad \frac{\partial N_n}{\partial u} \right\rangle \quad (4.16)$$

La matrice inverse intervenant dans l'expression ci-dessus est appelé matrice jacobéenne.

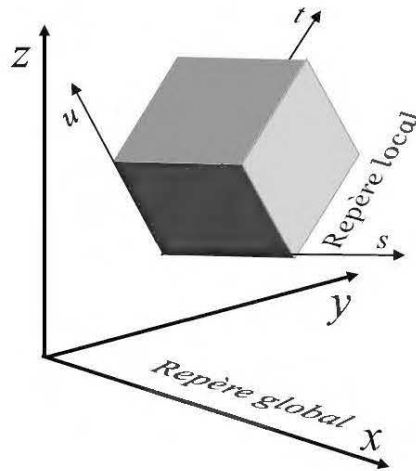


Figure 4-3 Représentation des repères : local et global

4.3.1.4 Expression du gradient de la pression utilisée dans CFX

L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour chaque volume de contrôle, [Voir système (4.10)] fait intervenir le gradient de la pression, sous la forme discrète $\sum_{ip} p(\Delta n_i)_{ip}$, nous pouvons utiliser l'approximation suivante pour calculer le champ de pression en chaque point d'intégration numérique :

$$p_{ig} = \sum_n N_n(s_{ig}, t_{ig}, u_{ig}) p_n \quad (4.17)$$

4.3.1.5 Solution des équations avec le module de CFX

Dans ce travail nous considérons le module CFX pour l'analyse de l'écoulement dans la centrale hydroélectrique. Dans ce module, la résolution des équations de mouvements, qui sont gouvernées par quatre variable (u , v , w et p), est effectuée par une approche implicite en considérant les dites variables simultanément. Le système à résoudre, vis-à-vis une grandeur principale ϕ , est de la forme discrète suivante sur l'ensemble des volumes de contrôles i :

$$\sum_i a_i^{nb} \phi_i = b_i \quad (4.18)$$

nb représente les nœuds voisins au volume de contrôle. Les formes matricielles des a_i , ϕ_i et b_i sont données par :

$$a_i^{nb} = \begin{bmatrix} a_{uu} & a_{uv} & a_{uw} & a_{up} \\ a_{vu} & a_{vv} & a_{vw} & a_{vp} \\ a_{wu} & a_{wv} & a_{ww} & a_{wp} \\ a_{pu} & a_{pv} & a_{pw} & a_{pp} \end{bmatrix}_i \quad \phi_i = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix} \quad b_i = \begin{bmatrix} b_u \\ b_v \\ b_w \\ b_p \end{bmatrix}$$

Sur la figure ci-dessous nous avons présentée l'organigramme général utilisé par CFX pour la résolution de problème interne d'écoulement dans une turbomachine. Avant la résolution numérique du système (18), CFX utilise un algorithme de linéarisations des équations. Ensuite, la résolution des équations linéaires est effectuée par une procédure itérative.

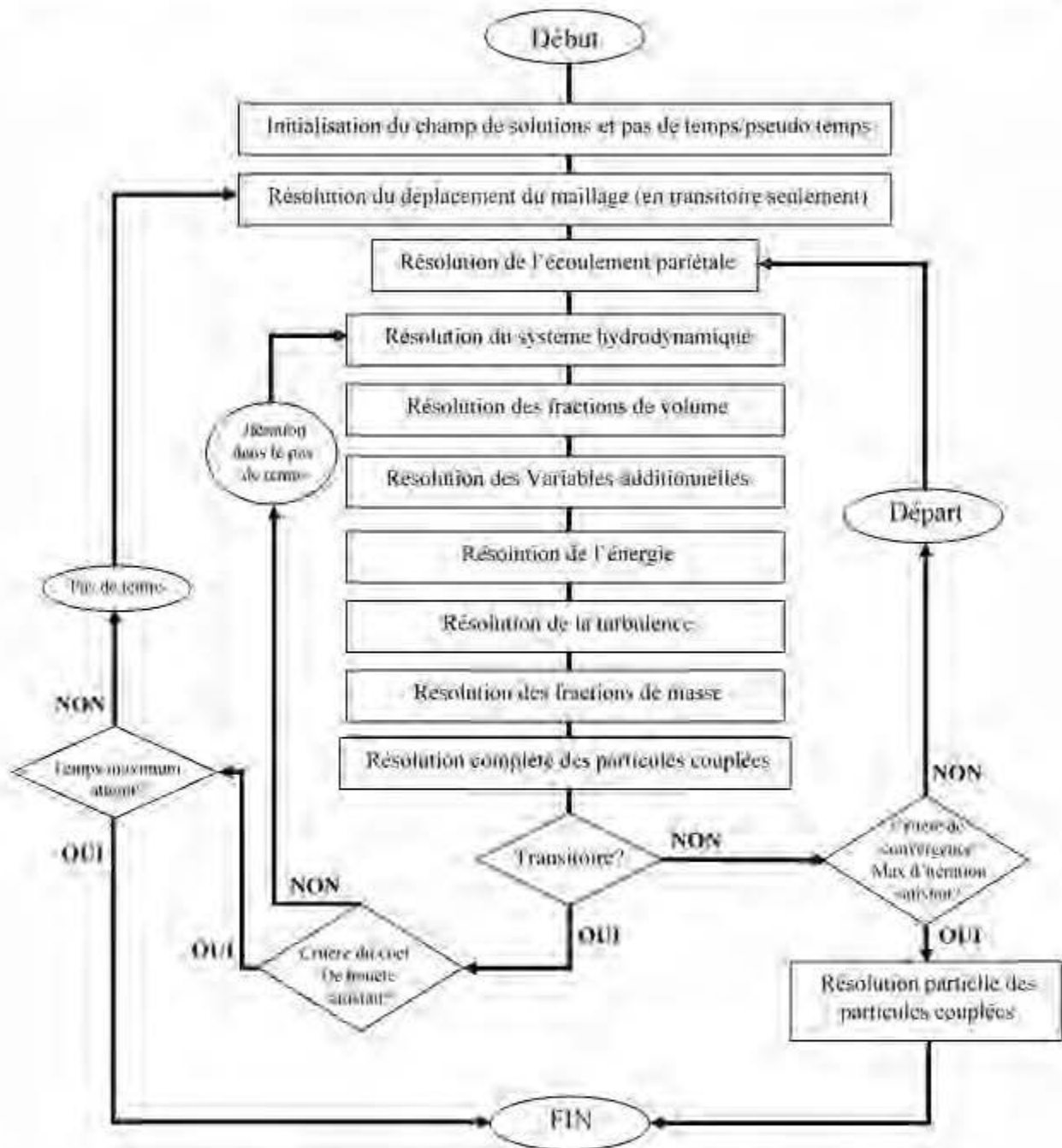


Figure 4-4 Organigramme de calcul(CFX) [40]

4.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté d'une manière sommaire les différentes méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de comportement d'un système physique ; notamment les méthodes des différences finies. La méthode des volumes finis quant à elle est présentée plus en profondeur puisque c'est la plus adaptée à l'analyse des écoulements de fluides, elle est également la méthode la plus utilisée dans les logiciels commerciaux comme c'est le cas pour le module CFX-ANSYS sur lequel on s'est appuyé pour réaliser la simulation de notre centrale. Cette approche utilise un algorithme qui couple la pression (p) avec le champ des vitesses (u, v, w).

CHAPITRE 5 MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE : MÉTHODOLOGIE

5.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la résolution des équations de Navier-stokes représente le principal problème des écoulements de fluide. Avec l'arrivée des méthodes numériques et le développement de l'outil informatique la solution de ce problème a subi un grand bouleversement, en effet grâce à la puissance de calcul de l'ordinateur la résolution des équations différentielles par la méthode des volumes finis sont devenues beaucoup plus aisées. À cela s'ajoute le développement d'autres techniques numériques telles que : les Conceptions et Dessins Assistés par Ordinateurs (C/DAO), la génération de maillage, la modélisation de turbulences, et des conditions aux limites, ainsi que les techniques de présentation ou le post-traitement des résultats de calcul. Toutes ces méthodes théorisent que tout phénomène physique peut être numériquement représenté et évalué en respectant les étapes suivantes :

- 1) *La représentation géométrique virtuelle de l'objet étudié (CAO) ;*
- 2) *Le maillage de ladite géométrie ;*
- 3) *La résolution des équations de comportement de la particule élémentaire ;*
- 4) *L'assemblage des solutions de ces différents calculs ;*
- 5) *La présentation des résultats.*

Ce chapitre contient l'essentiel de notre travail, puisqu'ici nous mettrons en évidence les données utilisées pour le dimensionnement des différents organes de la centrale, puis leur représentation respective grâce notamment au logiciel de CAO AUTODESK INVENTOR Pro.v18, nous présenterons également les paramètres de modélisation et de simulation dans le logiciel commercial ANSYS-CFX v18, pour chaque élément et notamment ceux de maillage. La méthodologie utilisée pour atteindre nos objectifs y est également précisée.

5.2 Représentation géométrique virtuelle de l'objet étudié

Nous avons utilisé les ressources informatiques disponibles pour réaliser la modélisation et la simulation d'une centrale hydroélectrique dont nous disposons de certaines informations de base, ces dernières nous ont permis de dimensionner et de dessiner numériquement les différents éléments qui constituent la centrale. Les données pour ce travail proviennent majoritairement de la centrale LAFORGE 1 (LA-1), située dans la Bais-James au nord de la province du Québec au Canada ; les informations de base sont récapitulées dans le Tableau 5-1:

Tableau 5-1 Données de base de la centrale LA-1 [9, 41]

MECANIQUE		
Type de turbine	Francis	
Puissance nominale par groupe (P)	139.65 MW	
Nombre de groupe	6	
Hauteur de chute (H)	57.3 m	
Débit moyen turbinable	893 m ³ /s	
Débit moyen par groupe	148.84 m ³ /s	
Débit maximal (Q_{max})	1663 m ³ /s	
Diamètre de la turbine (D_{st})	5.6 m	
Hauteur d'entrée de la turbine (B)	1.2 m	
Bâche spirale	Entrée	6.28 m
	Sortie	2.08 m
ELECTRIQUE		
Vitesse de rotation (N)	112.5 tr/mn	
Puissance	147/164 MVA	
Fréquence	60 Hz	
Excitatrice	235/240 V	
Température de fonctionnement critique	105 °C	

Les grandeurs fondamentales dans le dimensionnement de la centrale sont : le débit maximal (Q_{max}), la hauteur de chute (H), et la vitesse de rotation (N) et la puissance du groupe (P).

Notre travail de modélisation commence par le calcul de la vitesse spécifique de l'installation, cette dernière viendra compléter la liste des paramètres de base de dimensionnement des différents équipements constituant la centrale. La méthodologie globale employée dans le cadre de ce travail est résumée dans le schéma suivant :

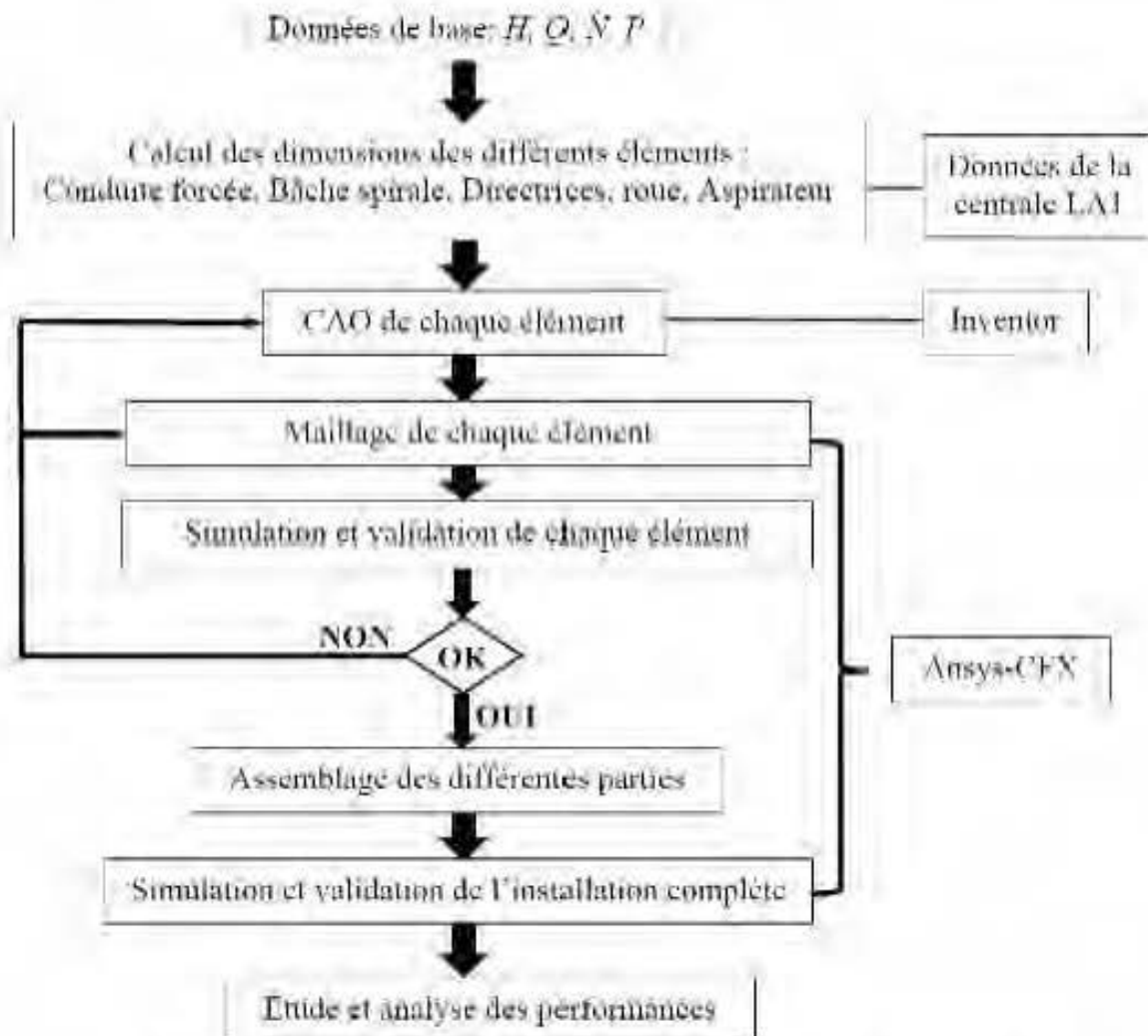


Figure 5-1 Algorithme de modélisation et de simulation de la centrale

5.2.1 Calcul des dimensions et DAO des différents éléments

Le manque d'informations sur les dimensions relatives de la centrale LA-1, et qui sont cruciales pour la modélisation, nous a contraints à utiliser la variable vitesse spécifique. Cette dernière nous permet de valider le choix du type de turbine proposé (turbine Francis) et entre dans le calcul de toutes les dimensions de la roue, des avants-directrices et des directrices.

Les calculs effectués pour le dimensionnement sont présentés pour chaque élément du circuit hydraulique. Les programmes élaborés pour effectués les calculs de dimensionnement grâce notamment au logiciel MATLAB v18, sont fournis en annexe, et les résultats issus de ces calculs nous ont permis de représenter virtuellement les différents éléments de la centrale, grâce à l'environnement graphique AUTODESK INVENTOR Pro.V18.

5.2.1.1 La conduite forcée

Les dimensions calculées et les données disponibles pour la conduite forcée sont récapitulés dans le ; les dessins résultant sont représentés par la Figure 5-2.

Tableau 5-2 Dimensions de la conduite forcée [42].

	Données disponibles LA-1	Valeurs calculées ou hypothèses
Diamètre de la conduite D_e	Diamètre entrée bêche spirale $D_{eb} = 6.28$ m	Hypothèses : $h_f = 4\%$ de H ; $D_e = D_{eb} = 6.28$ m
Coefficient de Manning n	n/a	0.014 (ciment amianté)
Longueur de la conduite	n/a	$L = 10.3 \frac{h_f D^{5.333}}{n^2 Q^2}$
Épaisseur minimum de la conduite	n/a	$e_{min} = (2.5 \times D) + 1.2$ mm (ASME)



Figure 5-2 CAO de la conduite forcée : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide

5.2.1.2 La bêche spirale

L'essentiel des données utilisées pour le dessin de la bêche spirale proviennent des données de la centrale. Les valeurs des diamètres intermédiaires, des distances entre le centre la bêche et le centre de chaque diamètre ainsi que les angles séparant ces diamètres sont contenus dans un document de travail fournis par Hydro-Québec relativement à un modèle réduit de la centrale [41], [43].

Tableau 5-3 Dimensions de la bêche spirale [43]

Données réelles de LA1							
Partie	R	De	B	D	D/De	alpha	Alpha cumul
S0	3211	6422	6890	6422	1,000	0	0
S1	3177	6422	6966	6354	0,989	8	8
S2	3143	6422	7020	6286	0,979	14	22
S3	3106	6422	6971	6212	0,967	17	39
S4	3079	6422	6947	6158	0,959	17	56
S5	3052	6422	6912	6104	0,950	17	73
S6	3017	6422	6877	6034	0,940	17	90
S7	2969	6422	6820	5938	0,925	17	107
S8	2904	6422	6763	5808	0,904	17	124
S9	2820	6422	6673	5640	0,878	17	141
S10	2713	6422	6568	5426	0,845	18	159
S11	2586	6422	6429	5172	0,805	18	177
S12	2444	6422	6280	4888	0,761	18	195
S13	2271	6422	6105	4542	0,707	20	215
S14	2091	6422	5913	4182	0,651	20	235
S15	1905	6422	5691	3810	0,593	20	255
S16	1716	6422	5505	3432	0,534	20	275
S17	1542	6422	5293	3084	0,480	20	295
S18	1420	6422	5050	2840	0,442	20	315
S19	1400	6422	4978	2800	0,436	18	333
S20	1400	6422	5333	2800	0,436	12,67	345,67

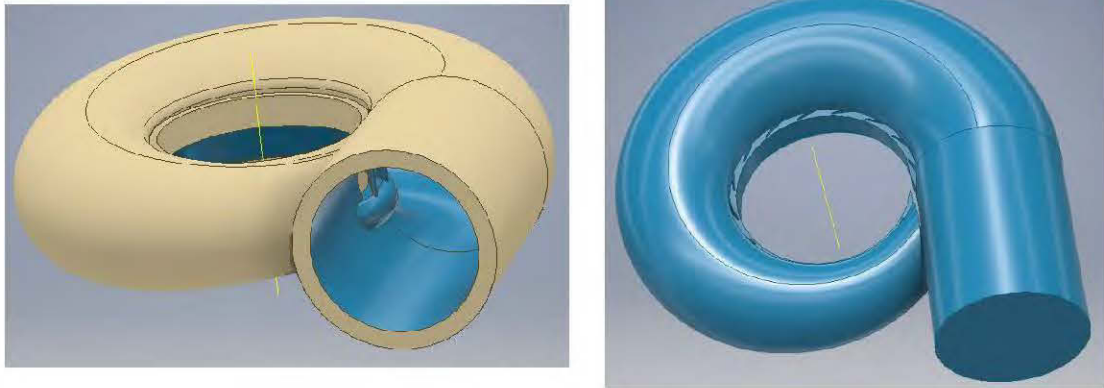


Figure 5-3 CAO de la bêche spirale : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide

5.2.1.3 Le distributeur

Les dimensions calculées et les données disponibles pour le distributeur sont récapitulées dans le Tableau 5-4 : Dimensions du distributeur, et les dessins en résultant sont représentés par la Figure 5-4.

Tableau 5-4 : Dimensions du distributeur [9]

	Données disponibles LA-1	Valeurs calculées ou hypothèses
Débit de rendement optimal	n/a	$Q_{op} = 0.87 \times Q_{max} \text{ m}^3/\text{s}$
Débit maximal turbinable	1663 m^3/s	À diviser par 6 pour avoir celui d'une seule turbine
Nombre de pales Z_d	n/a	14
Demi-pas angulaire entre les pales δ	n/a	$\delta = \frac{180}{Z_d}$ en degré
Demi-longueur des pales L	n/a	$L = \frac{R_{1+} \times \sin(\delta)}{\cos(+\alpha_1)}$ en m
Centre de rotation des pales R_0	n/a	$R_0 = \frac{R_{1+} \times \cos(\alpha_1)}{\cos(\delta + \alpha_1)}$ en m
Rayon extérieur de la pale R_a	n/a	$R_a = \sqrt{(R_{1+})^2 + 4L^2 + [(4.L.R_{1+})\cos(\alpha_1)]}$

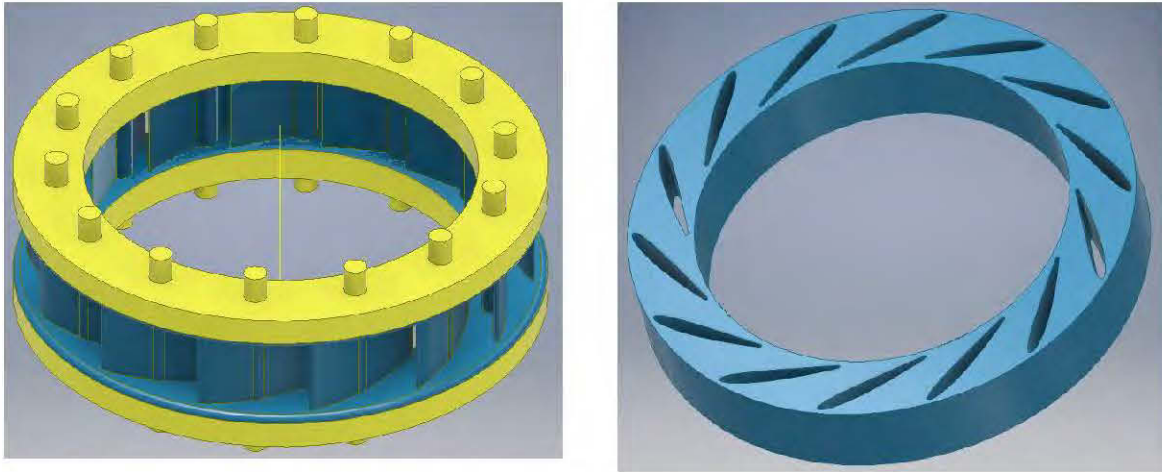


Figure 5-4 CAO du distributeur : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide

5.2.1.4 La roue

La roue est l'élément central de notre étude en conception, puisque son dimensionnement est étroitement lié aux dimensions du distributeur et de l'aspirateur, les angles calculés sont donc valables pour le dimensionnement des deux équipements. Dans la pratique le dimensionnement de ces deux équipements commence par le calcul de la roue (triangles de vitesses ; angles). Les dimensions calculées et les données disponibles pour la roue sont récapitulées dans le Tableau 5-5, et les dessins en résultant sont représentés par la Figure 5-5. Le programme MATLAB ayant permis ces calculs se trouve en annexe (Voir annexe).

Tableau 5-5 : Dimensions de la roue [9]

	Données disponibles LA-1	Valeurs calculées ou hypothèses
Débit de rendement optimal	n/a	$Q_{op} = 0.87 \times Q_{max} \text{ m}^3/\text{s}$
Nombre de pales Z_d	n/a	11
Angle d'attaque	n/a	$\beta_1 = \arctan\left(\frac{C_{m1}}{U_1 - C_1}\right)$ en degré
Angle de fuite	n/a	$\beta_2 = \arctan\left(\frac{C_2}{U_2}\right)$ en degré
Diamètre d'entrée	n/a	$D_{et} = 64.4 \frac{\sqrt{H_n}}{N}$ en m
Diamètre de sortie	5.6 m	n/a

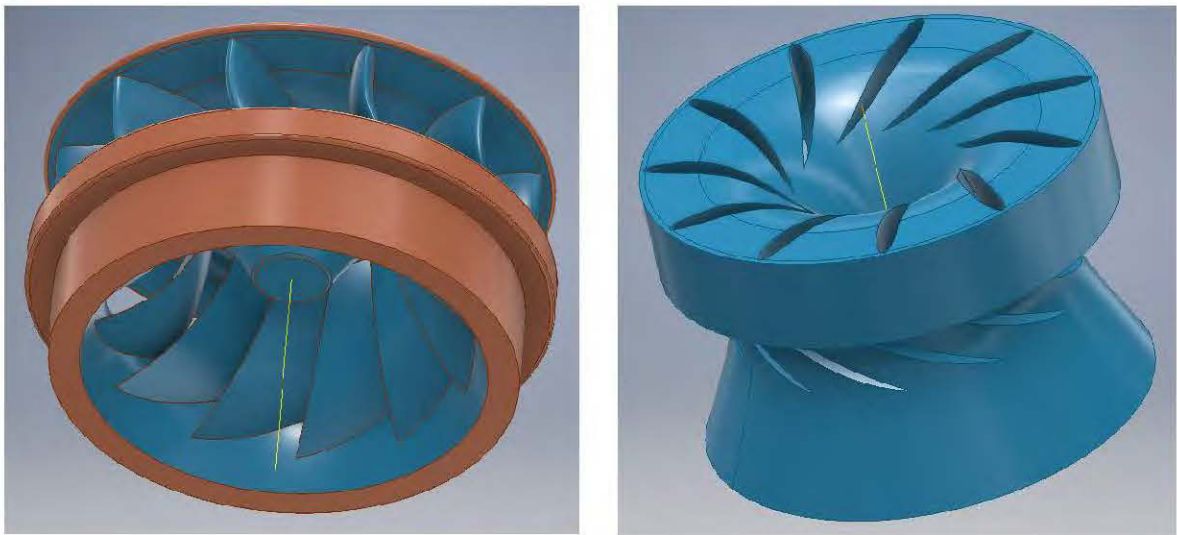


Figure 5-5 CAO de la bache spirale : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide

5.2.1.5 L'aspirateur

Comme pour la bêche spirale l'essentiel des données utilisées pour le dessin de l'aspirateur proviennent des données de la centrale LA-1 (Voir Annexe), Notamment de du Tableau 5-6, et les représentations numériques sont montrées par la Figure 5-6

Tableau 5-6 : Dimensions du distributeur [43]

Données réelles de LA1																			
Partie	D	D/2	L	L/2	Rs	Elévation	Rl	center											
A	6984	3492	8984	3492	0	pr a la base	0	7453,36											
B	7056	3528	7056	3528	0		0	7453,36											
1	7110	3555	7300	3650	0		0	7404,00											
2	6979	3489,5	8081	4041	0		0	7338,50											
3	6672	3336	9536	4768	0		0	7185,00											
4	6260	3130	11301	5651	0		0	6979,00											
5	5818	2909	12839	6420	0		0	6758,00											
6	5366	2683	14051	7026	0		0	6532,00											
7	4878	2439	15029	7515	0		0	6389,00											
8	4429	2214,5	15734	7867	0		0	6164,50											
9	4094	2047	16239	8120	0		0	5997,00											
10	3980	1990	16584	8292	0		0	5940,00											
11	3980	1990	16584	8292	0		0	5940,00											
12	4058	2029	16693	8347	1760	184,449	1545	2213,45											
13	4513	2256,5	16916	8458	575	594,480	575	2850,98											
14	5925	2962,5	17700	8850	575	1863,817	575	4826,32											
dist_AB	497	dist_B1	608,18	centre_coude	9380	haut_coude	5320	bas_coude1	9930	bas_coude2	10300	dessous_coude	1870	bout_coude	7795	centre_fin_coude	1974	long_aspirateur	22430
REF	8194,82									R1				3849					
plan 12	10876									R2				5950					
plan 13	13697																		
plan 14	22430		Facteur de conversion pour la maquette										18	22.564					

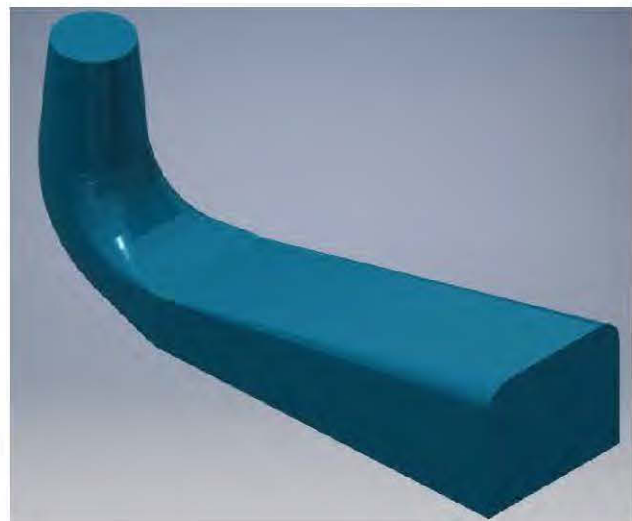


Figure 5-6 CAO de l'aspirateur : (À gauche) Modèle solide ; (À droite) Modèle liquide

5.3 Maillage des différents éléments

A cette étape, l'usage du logiciel de simulations ANSYS CFX V18.1 est considéré. La première étape consiste au transfert de chacune des différentes géométries des éléments sus énumérés ; s'ensuit une configuration des paramètres de maillages, on débute avec un maillage par grossier, puis en fonction des résultats obtenues par la simulation on réajuste les paramètres de maillage. Il va de soi que tous les éléments n'ont pas les mêmes configurations géométriques en maillage, et des réajustements sont effectués en termes de zone d'accentuation et de la modification de la taille de maillage.

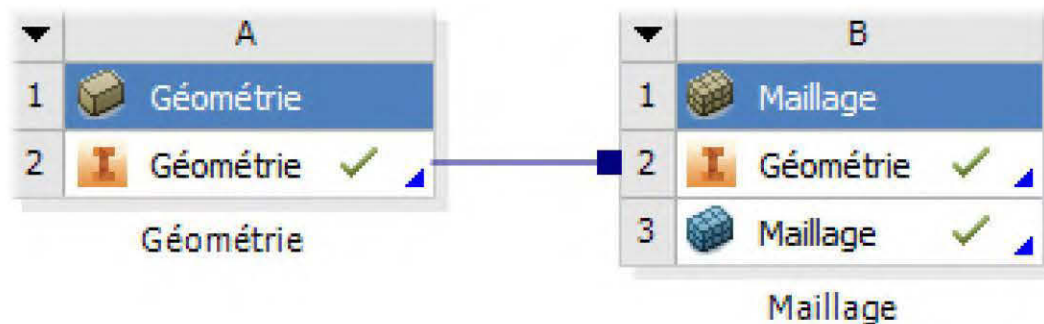


Figure 5-7 Modules Workbench de géométrie et de maillage

Le maillage considéré ne concerne que les domaines fluides de chaque élément (vu que le but de l'étude est l'écoulement du fluide et non son interaction avec les parois). La grande majorité des maillages de notre étude sont dits 'non structurés' : composés d'éléments de maillage tétraèdres et hexaèdres, l'ordre de raffinement de certaines zones de simulations est conditionné par le critère de convergence choisie et la pertinence des résultats. Les éléments du maillage de la pièce à étudier doivent respecter certains critères pour rendre la convergence des calculs la plus rapide possible et pour que des erreurs numériques ne puissent pas influencer la cohérence des résultats [44]:

Les différents paramètres que nous avons modifiés sont récapitulés dans le Tableau 5-7, il s'agit notamment de la taille maximale et minimale de l'élément, du type et du rapport de transition, de l'option d'inflation etc....

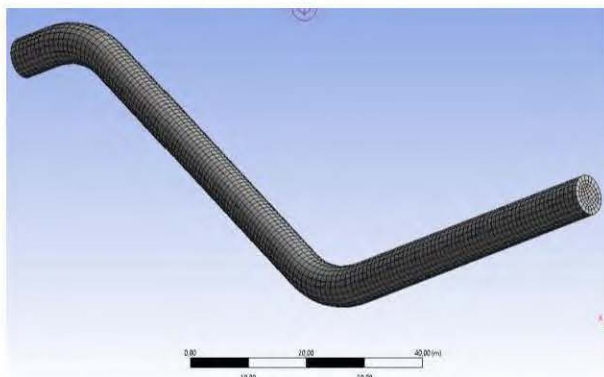
Tableau 5-7 : Quelques paramètres de Maillage

Dimensionnement	
Fonction de taille	Courbure
Centre de pertinence	Grossier
Transition	Lente
Taille min	0,80 m
Taille de face max	1,0 m
Simplification du maillage de base automatique	Activé
Longueur d'arête minimale	21,2730 m
Qualité	
Vérifier la qualité du maillage	Oui, Erreurs
Lissage	Moyen
Paramètres de maillage	Qualité de l'élément
Min	0,37068
Max	0,97652
Inflation	
Inflation tét. automatique	Aucun
Option Inflation	Transition progressive
Rapport de transition	0,77

Réglages par défaut	
Physique de préférence	CFD
Préférence de solveur	CFX
Pertinence	0
Ordre des éléments	Linéaire

Statistiques	
Nœuds	39794
Éléments	35763
Param. de maillage	Qualité de l'élément
Min	0,3706
Max	0,9765

Les résultats des différents maillages utilisés pour la simulation sont récapitulés ci-dessous :



Statistiques	
Nœuds	39794
Éléments	35763
Paramètres de maillage	Qualité de l'élément
Min	0,3706
Max	0,9765

Figure 5-8 Maillage de la conduite forcée

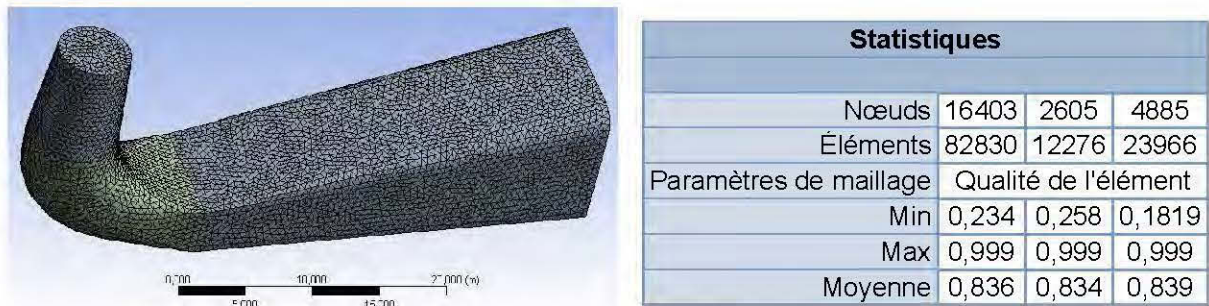


Figure 5-9 Maillage de l'aspirateur



Figure 5-10 Maillage de : la bêche spirale (À gauche), les directrices (Au centre), la roue (à droite)

5.4 Simulations

5.4.1 Conditions aux frontières

L'hypothèse principale considérée dans cette étude est que l'écoulement est uniforme, stationnaire, incompressible et circonférentielle dans la roue. La condition de non glissement (no slip Wall) est appliquée pour tous les éléments fluidiques vis-à-vis de la paroi. Le Tableau 5-8 résume les paramètres globaux de simulation. Cependant pour chaque élément de la centrale, des conditions d'entrée et de sortie sont différentes, et découlent des paramètres de l'élément précédent. Le Tableau 5-9 récapitule les paramètres aux frontières de chaque élément.

Tableau 5-8 Paramètres généraux de simulations

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B650
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Non Buoyant
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	0.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.0000e+01 [C]
Turbulence Model	k epsilon
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tableau 5-9 Paramètres d'entrée et de sortie de chaque éléments

Points	Formules		résultats	
	Pressions	Vitesses	Pressions (bars)	Vitesses (m/s)
1	$P_1 = P_{atm}$	$V_1 = 0 \text{ m/s}$	$P_1 = 1$	$V_1 = 0$
2	$P_2 = \frac{\rho V_m^2}{2} + \rho g H_f + P_{atm}$	$V_2 = V_m = \frac{4 Q_{cp}}{\pi D_m^2}$	$P_2 = 2.7$	$V_2 = 7.6$
3	$P_3 = P_2 - \frac{\rho h_f}{\rho g}$ où $h_f = H_s - H_n$	$V_3 = V_2$	$P_3 = 2.5$	$V_3 = 7.6$
4	$P_4 > P_{red_20°C}$	$V_4 = V_3 - 2 \left(\frac{P_4 - P_3}{\rho} \right)$	$P_4 = 0.3$	$V_4 = 25.4$
5	$P_5 = P_4 + \rho g h_{5-6}$	$V_5 = \sqrt{2 g h_{5-6} - \left(\frac{P_5}{\rho} + J_{ob} \right)}$	$P_5 = 1.8$	$V_5 = 10$
6	$P_6 = P_{atm}$	$V_6 = V_1$	$P_6 = 1$	$V_6 = 0$

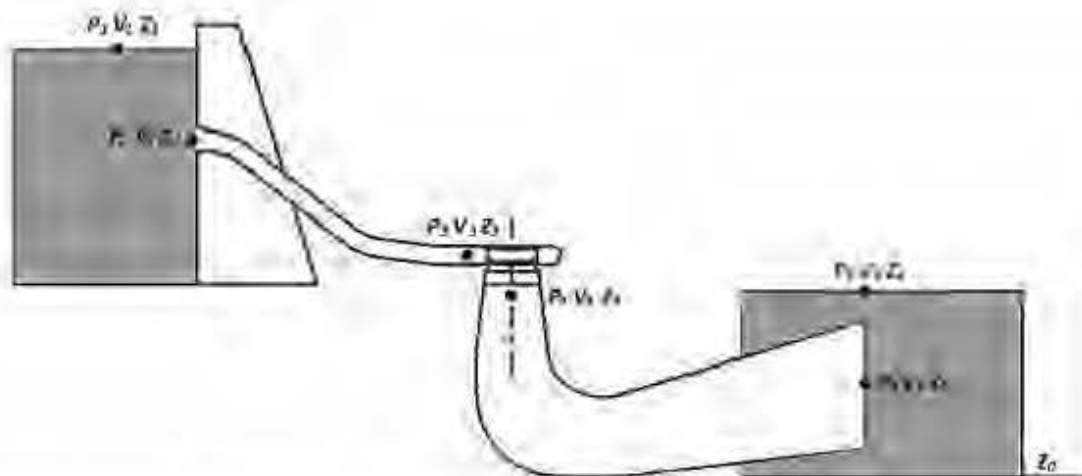


Figure 5-11 Identification des points d'entrée et de sortie de chaque élément de la centrale

5.4.2 Critères de convergence

En ingénierie le critère de convergence admis pour une solution acceptable est basé sur la valeur du résidu, qui se situe généralement entre 10^{-4} et 10^{-6} [44]. La méthode itérative est utilisée pour résoudre le système d'équations algébrique, et dans ce travail, nous avons choisi la borne inférieure avec la méthode RMS et un maximum de 10 000 itérations. Les simulations les plus longues ont durées 2h sur un ordinateur dont les caractéristiques fonctionnelles sont : 8 Go RAM, 3.40 GHz Core i7-2600 CPU, OS 64Bits.

5.5 Conclusion

La mise en œuvre numérique de la modélisation et la simulation de la centrale, qui est la principale articulation de ce travail, faisait l'objet de ce chapitre. On y a décrit très clairement les différentes étapes qui nous ont permis de mener à bien notre étude. Il s'agissait dans un premier temps, de dimensionner et calculer chaque élément de la centrale, (par l'entremise du programme MATLAB). Ces dimensions nous ont ensuite permis de réaliser la représentation numérique de chaque élément grâce au logiciel de CAO/DAO AUTODESK INVENTOR Pro v18. Les modèles ont enfin été transférés dans le solveur ANSYS-CFX v 18, pour les simulations dont les paramètres ont été définis pour l'opérateur. Les résultats qui en découlent sont présentés dans le chapitre qui suit.

CHAPITRE 6 RÉSULTATS ET ANALYSES

6.1 Introduction

Ce chapitre résume les résultats les plus pertinents obtenus lors de nos différentes simulations. En effet plus d'une centaine de simulations ont été effectuées, que ce soit à l'étape du maillage qu'à celle de la résolution des différents modèles. Le point le plus important ici est que faute de ne pas avoir accès à certaines grandeurs de fonctionnement de la centrale, il n'a pas été possible de faire une évaluation quantitative des résultats des simulations, notre validation s'est donc axée sur une *évaluation qualitative*; de ce fait les simulations des différents éléments de la centrale ce sont fait à la fois grâce aux connaissances dans le domaine de la mécanique des écoulements, mais aussi grâce à certains résultats obtenus dans la littérature. Notre contribution étant de travailler avec les grandeurs réelles de la centrale et non avec un modèle réduit, ce qui offre l'avantage de passer la case de mise à l'échelle par les lois de similitudes, et de ce fait, réduire les risques d'erreurs.

La Figure 6-1 illustre l'approche utilisée pour générer des solutions sur ANSYS-CFX. Cette approche est basée sur l'utilisation des modules associés aux géométries de maillage. La plus grande difficulté du module de résolution CFX réside dans la configuration des paramètres tels que : les conditions aux frontières, le critère de convergence, le type de modèle de turbulence, le solveur ...etc.



Figure 6-1: Modules Workbench h complet de simulation pour chaque élément

6.2 La conduite forcée

La Figure 6-2 nous montre les résultats obtenus lors de la simulation de la conduite forcée.

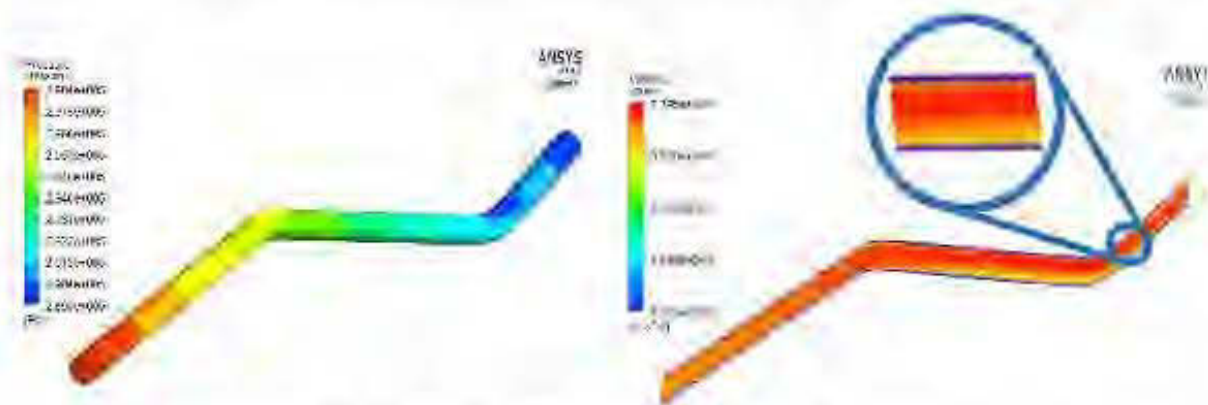


Figure 6-2 (À gauche) profil de pression ; (À droite) Coupe du profil de vitesse

Nous pouvons constater que le profil de pression (à gauche) présente bel et bien une chute de pression de l'ordre de 4%, ce qui correspond aux standard en la matière qui fixe une marge supérieure de pertes admissibles dans la conduite forcée de 10% [42]. Par ailleurs le profil de vitesse (à gauche) montre une vitesse maximale au centre de la conduite, ce qui correspond aux observations pour un écoulement tubulaire à vitesse constante [31], de même qu'une vitesse nulle au niveau de parois (condition de non glissement).

6.3 La bêche spirale

Les Figure 6-3 et Figure 6-4 nous montrent les résultats obtenus lors de la simulation, ainsi qu'une ainsi que ceux contenus dans la littérature. On remarque que les échelles de pression ne sont pas les mêmes, cela est due simplement au fait de la différence des dimensions des deux éléments simulés, ce qui nous intéresse, ici c'est la tendance de l'harmonisation de la pression tout autour de la bêche spirale.

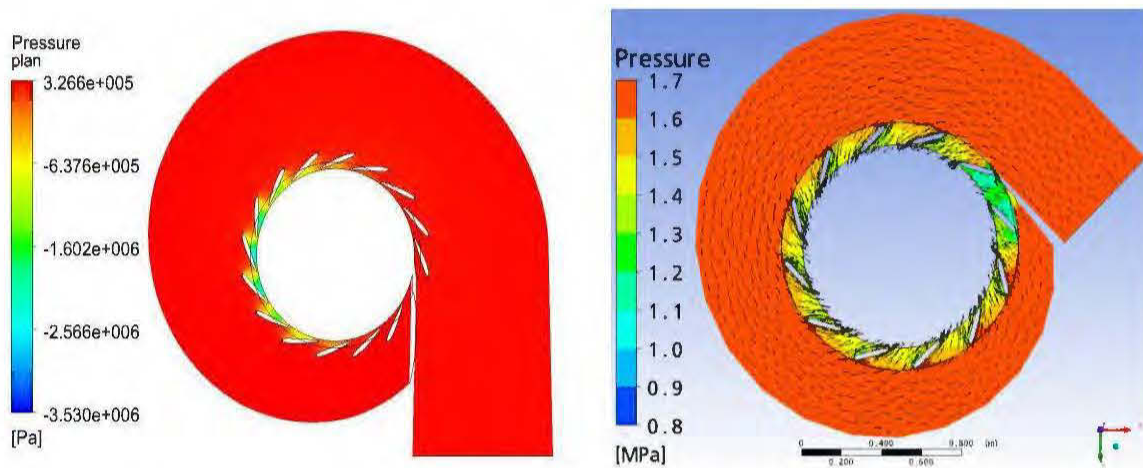


Figure 6-3 (À gauche) profil de pression simulé; (À droite) profil de pression issu de la littérature [19]

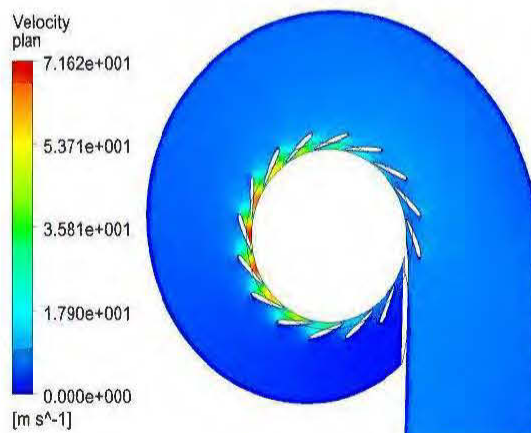


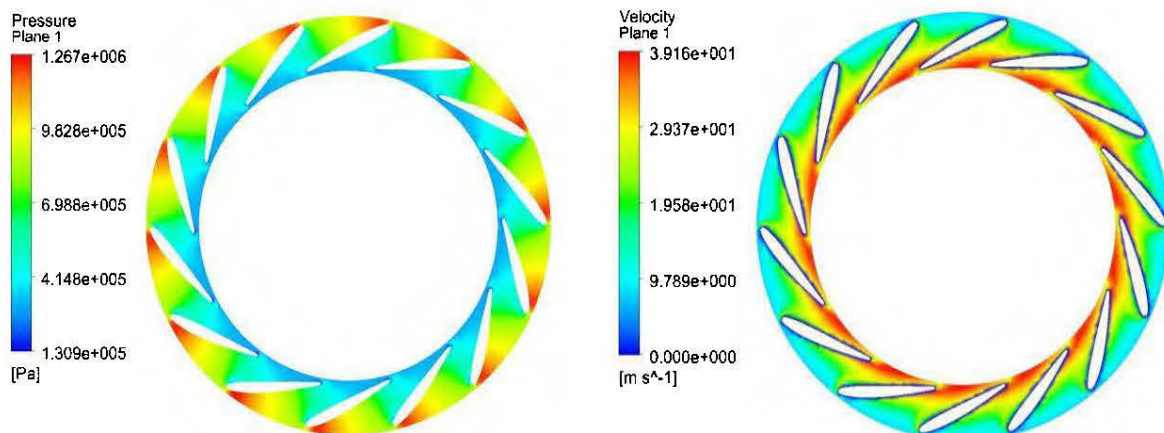
Figure 6-4 Profil de vitesse

La Figure 6-4 montre la distribution de vitesse instantanée de la section médiane de la bêche spirale dans la direction du flux principal. Le profil plat uniforme à l'entrée est transformé

progressivement en un vortex. La Figure 6-3 quant à elle nous montre les profils isobars uniformément distribués autour de la bêche spirale ; on remarque par ailleurs que la pression diminue rapidement quand on se rapproche du rayon intérieur, près du distributeur. Au niveau de la section médiane la bêche spirale, le flux est la plupart du temps tangentielle cela s'observe aussi bien pour notre simulation que dans la littérature. Ceux-ci montrent que la conception de la bêche spirale est raisonnable.

6.4 Le distributeur

Les résultats obtenus pour la simulation du distributeur sont présentés à la Figure 6-5. Il s'agit respectivement des profils de pression et de vitesse.



Dans la Figure 6-5, les simulations du champ d'écoulement dans le distributeur pour la condition de charge optimale sont représentés ($\alpha_{op} = 16.17^\circ$). On peut observer à partir du profil de vitesse (à droite) qu'il n'y a pas de recirculation du flux. De même le profil de pression (à gauche) montre qu'aucune oscillation de pression n'est présente et que les lignes de courant sont réparties uniformément. On peut aussi noter qu'il n'y a pas de collisions à l'entrée et pas de séparation d'écoulement à la sortie. Les profils des lames sont raisonnablement conçus pour être placés sur la meilleure position de fonctionnement optimal. On observe donc une augmentation de la vitesse entre l'entrée et la sortie du distributeur, ce qui est attendu car il faut produire le

maximum d'énergie cinétique pour faire tourner la roue, il en résulte par ailleurs une perte relative de pression.

6.5 La roue

C'est incontestablement l'élément le plus difficile à simuler due à sa géométrie et des phénomènes qui s'y déroulent, les Figure 6-6 et Figure 6-7 nous présentent les résultats de simulations.

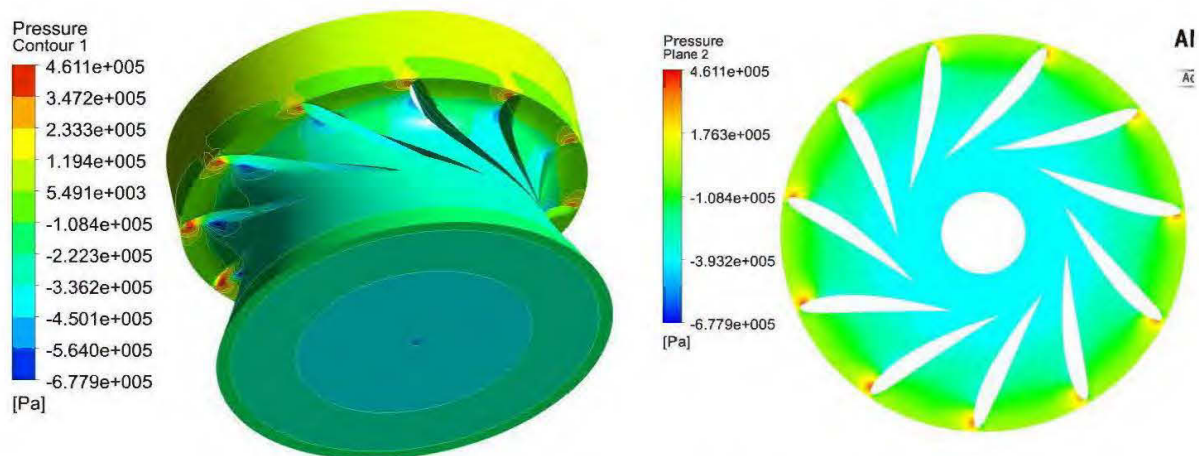


Figure 6-6 (À gauche) profil de pression ; (À droite) Coupe du profil de pression

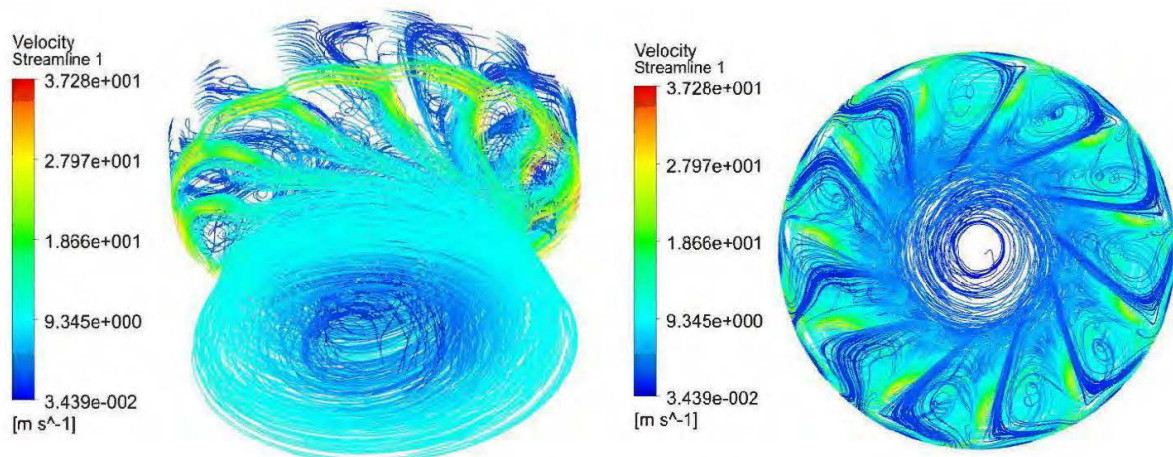


Figure 6-7 (À gauche) profil de vitesse ; (À droite) Coupe du profil de vitesse

La Figure 6-6 représente le profil et la coupe de pression de la roue, les résultats présentés illustrent les distributions plus ou moins harmonieuses à l'entrée de la roue. Il est à noter que dans les conditions d'exploitation, la pression diminue d'entrée en sortie. On note aussi un gradient de pression entre les deux côtés de la pale. C'est en effet ce gradient qui produit la force pour générer le couple nécessaire pour faire tourner la roue.

Les pressions de toutes les régions sur l'intrados sont positives, alors qu'une partie seulement de celles de l'intrados sont négatives. La pression près de la sortie est la plus basse, ce qui peut favoriser le phénomène de cavitation.

La Figure 6-7 nous montre que la distribution de la vitesse autour des pales est uniforme, même si on observe quelques zones de turbulences ; on note aussi que la vitesse augmente progressivement de l'entrée à la sortie de la roue, Cela signifie que le l'écoulement est lisse. Il n'y a pas de collision à la tête des pales puisque les angles d'écoulement relatifs du distributeur sont en correspondance avec les angles des pales. On note enfin que l'écoulement dans la roue est radiale à l'entrée et axiale à la sortie ce qui correspond parfaitement au comportement observée dans la littérature [29].

6.6 L'aspirateur

Les Figure 6-8 et Figure 6-9 présentent les résultats de simulations obtenus ainsi que ceux provenant de la littérature.

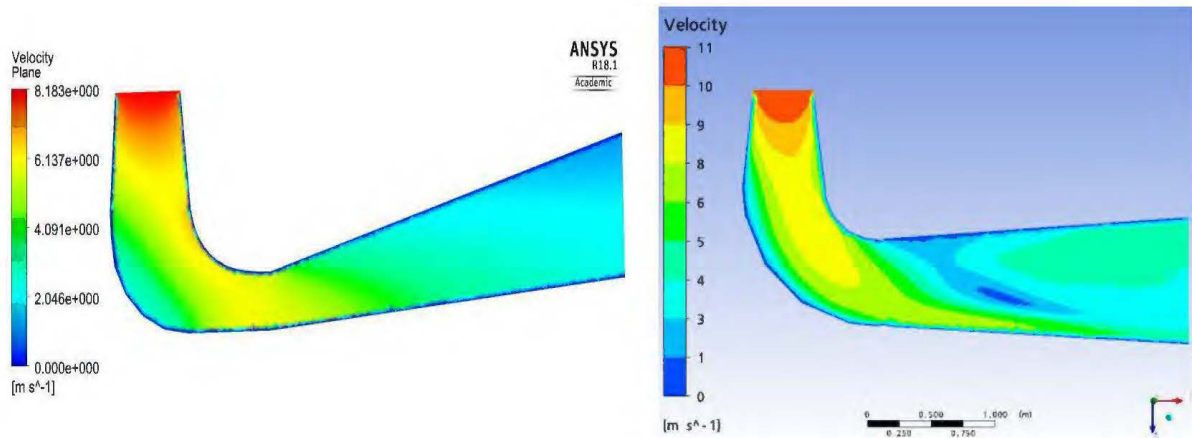


Figure 6-8 (À gauche) profil de vitesse simulé; (À droite) profil de vitesse issu de la littérature [19]

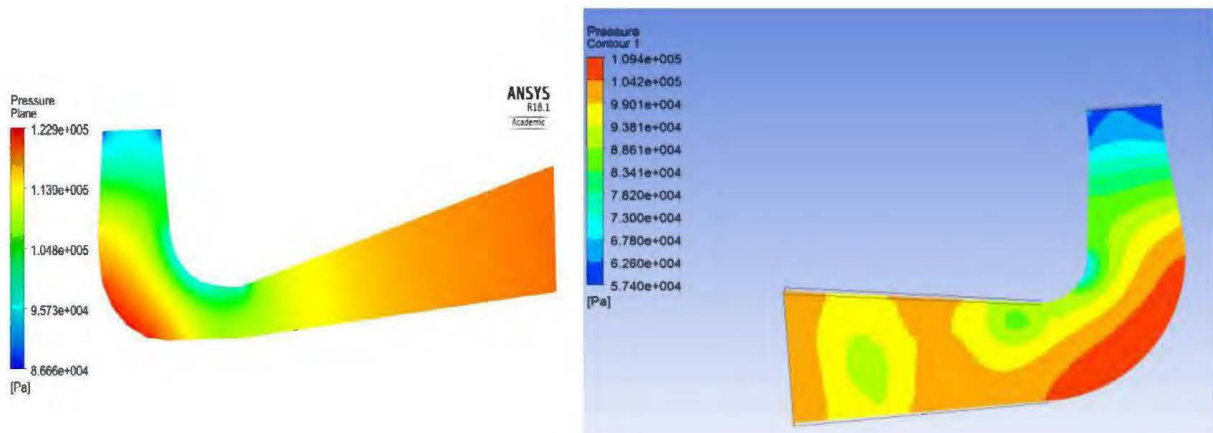


Figure 6-9 (À gauche) profil de pression simulé; (À droite) profil de pression issu de la littérature [20]

L'aspirateur est l'un des principaux composants de la turbine hydraulique ; son rôle est de ralentir la vitesse de l'eau quittant la roue de la turbine et convertir l'excès d'énergie cinétique en sortie de roue en une augmentation de la pression statique. On peut observer ce phénomène dans la Figure 6-9, aussi bien pour nos résultats que ceux de la littérature.

On note également une différence de pression près de la paroi interne et externe du coude : La pression près du mur extérieur est plus élevée que près du mur intérieur. À mesure que l'écoulement progresse dans le conduit, et en conséquence des forces d'inertie, la vitesse réduit jusqu'en sortie. Ce comportement est en accord avec les résultats d'Agouzoul et al [45].

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Notre travail dont le thème s'intitule : '*modélisation et simulation des écoulements dans les centrales hydroélectriques*', trouve sa justification dans la problématique conjointe de l'équilibre à trouver entre la demande sans cesse croissante en énergie électrique, la fin annoncée de la disponibilité des énergies primaires fossiles, et la protection de l'environnement. La réponse qu'apporte notre travail à cette problématique est l'étude d'une source d'énergie renouvelable comme exigence de protection de l'environnement et de production d'énergie électrique ; mais aussi une exigence économique, puisque l'étude est exclusivement numérique, et donc réduit le coût global de production.

Basé sur les équations de Navier-Stokes, les écoulements turbulents instationnaires dans une centrale sont calculés en utilisant le progiciel ANSYS-CFX v18.1. Les champs d'écoulement ont été simulés dans chaque composant de la turbine hydraulique. Les résultats ont été comparés à ceux de la littérature et présentent des concordances quantitatives satisfaisantes. Notre principale contribution à l'analyse de l'écoulement est la mise en œuvre numérique d'une centrale hydraulique prédisant les caractéristiques importantes de l'écoulement, comme les profils de vitesse et les distributions de pression, à la place des tests complexes et difficiles pour les écoulements dans une turbine, ce qui offre un puissant outil analytique de conception et de réhabilitation des centrales hydroélectriques. Il permet à un concepteur d'évaluer les performances, les conceptions alternatives avant de continuer avec des tests en laboratoire ou pour élaborer des études paramétriques pour optimiser la conception hydraulique. Par conséquent, non seulement le nombre de tests d'un modèle est réduit, mais aussi le temps nécessaire pour un nouveau produit est raccourci considérablement. Ainsi, le coût de conception est réduit. Avec l'aide de calculs effectués sur la centrale, l'ensemble des champs d'écoulement peut être visualisée de façon dynamique, Cela fournit une base de travail intéressante pour prédire les caractéristiques, et la recherche de stabilité d'une centrale hydroélectrique.

L'objectif futur de ce travail est (à moyen et à long terme) de mettre en commun les différents résultats obtenus lors de cette étude sur chaque élément, de sorte à obtenir le comportement de toute la centrale. La première étape serait de créer un modèle liquide de la centrale complète Figure 6-10. En ce qui concerne notre étude, la pièce est composée de 24 045 881 éléments, pour 44 083 207 nœuds au total. Il faudra par conséquent disposer des ressources informatiques suffisantes pour réaliser sa simulation. Les résultats obtenus pourraient servir de base pour caractériser le comportement de la centrale sous différentes conditions. On disposerait ainsi d'une maquette virtuelle, permettant de réaliser des économies considérables lors de la mise en œuvre des projets de conception et de réhabilitation des centrales hydroélectriques.

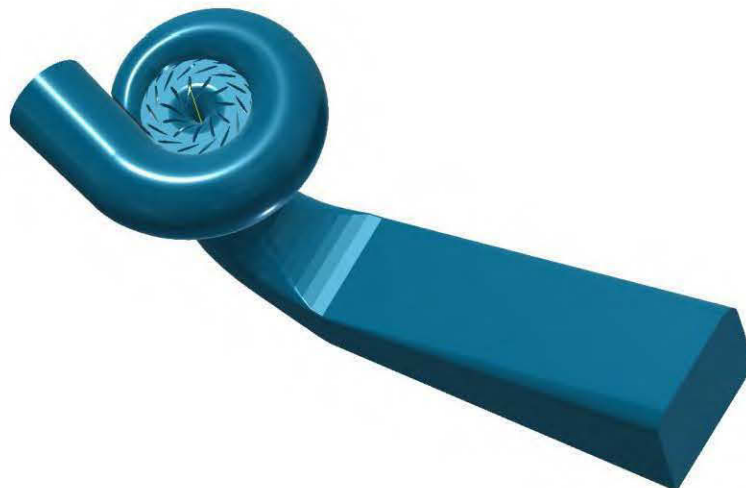


Figure 6-10 Modèle fluide de l'ensemble de la centrale

REFERENCES

1. Kristin Seyboth, F.S., *rapport sur le statut mondial des énergies renouvelables 2016*. 2016: Secrétariat de REN21, Paris (France).
2. Overblog. *URE TFE : Chapitre 5 : Le développement durable (ou soutenable)*. 2010 22 mai 2018 Available from: <http://benoit-bernard-bom.over-blog.com/article-ure-tfe-chapitre-5-le-developpement-durable-ou-soutenable-49817194.html>.
3. Huart, M. <<*Bilan mondial des énergies renouvelables*>>. 2018-06-18; Available from:<http://www.renouvelle.be/fr/statistiques/bilan-mondial-des-energies-renouvelables>.
4. Tridon, S., et al., *Experimental analysis of the swirling flow in a Francis turbine draft tube: Focus on radial velocity component determination*. European Journal of Mechanics-B/Fluids, 2010. **29**(4): p. 321-335.
5. Derakhshan, S. and A. Mostafavi, *Optimization of GAMM Francis turbine runner*. World Acad. Sci. Eng. Technol, 2011. **59**: p. 717-723.
6. Seignol, V.M. *Les barrages et les centrales hydrauliques en schemas*. 2018-06-18; Available from: <https://www.intellego.fr/soutien-scolaire--/aide-scolaire-svt/les-barrages-et-les-centrales-hydrauliques-en-schemas/54167>.
7. Université Laval, F.d.s.e.d.g. *Laboratoire de Machines Hydrauliques*. 2018-06-19; Available from: <https://lamh.gmc.ulaval.ca/turbines-en-bref/turbine-francis/>.
8. Manno, M., *hydraulic turbines and hydrelectric power plants*, D.o.I. Engineering, Editor. 2013, Universita di Roma (Tor Vergata): italia.
9. Chapallaz, J.m., *Petites centrales hydrauliques pompe fonctionnant en turbine avec réglage du débit (pat-francis)*. 2007, Département fédéral de l'environnement, de l'énergie et de la communication DETEC Suisse.
10. Mishra, P. *Francis Turbine Working Principle, Main Parts, Diagram and Application*. January 23, 2018; Available from: <http://www.mechanicalbooster.com/2018/01/francis-turbine.html>.
11. Keck, H. and M. Sick, *Thirty years of numerical flow simulation in hydraulic turbomachines*. Acta mechanica, 2008. **201**(1-4): p. 211-229.
12. Höller, H. and H. Keck. *The complete finite element flow computation in a bulb turbine from inlet trash rack to runner outlet*. in *IAHR Symposium Tokyo*. 1980.

13. Keck, H., *Finite Element Analysis of Flows in Hydraulic Turbomachinery*. Escher Wyss News, 1980. **1**(2).
14. Keck, H. and W. Haas. *Vorticity and blade circulation modelling in the calculation of quasi-three-dimensional cascade flows with finite elements*. in *International Conference on Finite Elements in Flow Problems, 3 rd, Banff, Alberta, Canada*. 1981.
15. Sallaberger, M.J. *Quasi-three-dimensional and three-dimensional Flow Calculation in a Francis Turbine*. in *ASME 1996 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*. 1996. American Society of Mechanical Engineers.
16. Eremeef, L. and R. Philibert, *Modélisation quasi-tridimensionnelle des écoulements dans les turbomachines hydrauliques*. *La Houille Blanche*, 1982(7-8): p. 543-552.
17. Göde, E. and I. Rhyning, *3-D computation of the flow in a Francis runner*. *Sulzer Technical Review*, 1987. **4**: p. 87.
18. Bornard, L., et al. *Turbine hydraulic assessment and optimization in rehabilitation projects*. in *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2014. IOP Publishing.
19. Celebioglu, K., G. Okyay, and M. Yildiz. *Design of a Francis Turbine for a Small Hydro Power Project in Turkey*. in *ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*. 2010. American Society of Mechanical Engineers.
20. Chakrabarty, S., B.K. Sarkar, and S. Maity. *CFD Analysis of The Hydraulic Turbine Draft Tube to Improve System Efficiency*. in *MATEC Web of Conferences*. 2016. EDP Sciences.
21. Flores, E., et al. *Design of large Francis turbine using optimal methods*. in *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2012. IOP Publishing.
22. Gjørseter, K., *Hydraulic design of Francis turbine exposed to sediment erosion*. 2011, Institutt for energi-og prosesssteknikk.
23. Hu, Y., et al., *Numerical simulation of unsteady turbulent flow through a Francis turbine*. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2011. **16**(2): p. 179-184.
24. Khare, R., V. Prasad, and S. Kumar, *CFD approach for flow characteristics of hydraulic francis turbine*. *International Journal of Engineering Science and Technology*, 2010. **2**(8): p. 3824-3831.
25. Qian, Z.-d., J.-d. Yang, and W.-x. Huai, *Numerical simulation and analysis of pressure pulsation in Francis hydraulic turbine with air admission*. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 2007. **19**(4): p. 467-472.

26. Risberg, S., M. Jonassen, and R. Jonassen, *Design of Francis turbine runners based on a surrogate model approach*. The Int. J. Hydropower Dams, 2008. **15**(5): p. 11.
27. Swiderski, J.A., *Design optimisation of replacement Francis runner—CFD application in an optimization algorithm*.
28. Laín, S., et al., *CFD Numerical simulations of Francis turbines*. Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia, 2010(51): p. 24-33.
29. Saeed, R., A. Galybin, and V. Popov, *Modelling of flow-induced stresses in a Francis turbine runner*. Advances in Engineering Software, 2010. **41**(12): p. 1245-1255.
30. J. Huang, J.S., J.Ji, T. Tung, M. Riler, *Francis Turbine Upgrade for the Lushui Generating Station by Using Computational Fluid Dynamics - A Case Study* M.o.W.r. Natural resources Canada, Editor. 2006, Graet Wall World Renewable Energy Forum (GWREF): Beijing.
31. Louisnard, O., *Cours de mécanique des fluides*. Creative Commons, San Francisco, CA, USA, 2012. **3**: p. 1.1.
32. Anonyme. *Équations en termes de fonction de courant - Chapitre I modélisation des écoulements internes en turbomachines...* 2018-06-20; Available from: <http://m.20-bal.com/law/11502/index.html?>
33. Krishna, H.R., *Hydraulic design of hydraulic machinery*. 1997: Gower Technical.
34. Kolmoqorov, A., *Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers*. CR A d. Sci. UUSR 30,301, 1941. **305**.
35. Schmitt, F.G., *About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity*. Comptes Rendus Mécanique, 2007. **335**(9-10): p. 617-627.
36. Marchesse, Y., *Mécanique des fluides, Modélisation de la turbulence - Application à la CFD*. 2010, Lyon France.
37. Cherifi, H. *Evaluation de tests d'hypothèse*. in *11^o Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 1987*. 1987. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images.
38. Spalart, P. and S. Allmaras. *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. in *30th aerospace sciences meeting and exhibit*. 1992.
39. Debongnie, J.-F., *Sur le théorème de Vaschy-Buckingham*. 2016, ULg/LMF.
40. Ansys, C., *Release 11.0: Ansys CFX-Solver Theory Guide*. ANSYS. 2006, Inc.

41. Roxane Corbeil, D.L., *Simulateur Laforge 1, Équipe 1: Groupe turbine alternateur*. 2003, UQAT. p. P.9.
42. Penche, C., *Layman's guidebook on how to develop a small hydro site*. 1998: DG XVII, European Commission.
43. Patrick Vallières, M.T., *Simulateur LaForge 1, Groupe Turbine Alternateur II*. 2003, UQAT. p. P. 34, P.39.
44. Roache, P.J., *Verification and validation in computational science and engineering*. Vol. 895. 1998: Hermosa Albuquerque, NM.
45. Agouzoul, M., M. Reggio, and R. Camarero, *Calculation of turbulent flows in a hydraulic turbine draft tube*. *Journal of Fluids Engineering*, 1990. **112**(3): p. 257-263.

ANNEXES

Annexe 1 : Calculs du distributeur et de la roue

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% maitrise ZANGA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               calculs préliminaires
%
% Paramètres d'entrée:
%   g: Accélération gravitationnelle [m/s^2]
%   oméga: Vitesse angulaire de l'arbre [rad/sec]
%   n: vitesse de rotation [tr/mn]
%   Q: Débit de l'eau [m^3/s]
%   H: Hauteur de chute [m]
%
% Paramètres de sortie:
%   Vitesses spécifiques de la roue
%   vitesses et angles d'entrée et de sortie de la roue
%   dimensions du distributeur
%   longueur de la conduite forcée
%
% Écrit par:   ZANGA joseph Maurency
% Créé le:    21/09/17.... 10:06
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Données %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;
clc;
Hb = 57.3;    % Hauteur brute en m ;
Hn = Hb*0.96 % Hauteur nette en m; hypothèse: pertes de 4% dans la conduite
Q = 235.6;   % Débit au rendement maximum en m^3/s... 85% de Qmax = 1663/6
n = 112.5;   % vitesse de rotation en tr/mn;
P = 139.65;  % Puissance nominale par groupe en MW;

n2 = n/60    % vitesse de rotation en tr/s;
Omg = (n*pi)/30 % vitesse de rotation en rad/s;
Dst = 5.6    % Diamètre entrée de la turbine en m
Det = 64.4*(sqrt(Hn)/n) % Diamètre entrée de la turbine en m.. pour
1.65<phi<1.8;livre hydro bleu
% Dst = 4.44*((Q/n)^0.33) % Diamètre sortie de la turbine
en m 0.26<psi<0.28 ;
Dtm = Dst+0.005 % Diamètre de la turbine majoré en mètres;
Rtm = Dtm/2;    % rayon de la turbine majoré en mètres;
B = 1.2;        % hauteur d'entrée d'aube en m;
Dcf = 6.28;     % Diamètre de la conduite forcée en m;

Rt = 0.94;      % rendement de la turbine hypothese:94%;
Rv = 0.97;     % rendement volumétrique hypothese:97%;
Rm = 0.96;     % rendement mécanique hypothese:96%;
Re = Rt/0.96;  % rendement énergétique hypothese:96%/Rt;
Rg = Rm*Rv*Re % rendement globale du groupe;

```

```

Rho = 1000;      % masse volumique en kg/m^3;
g = 9.81;       % accélération de la pesanteur en m/s^2;
Ph = Q*Rho*g*Hn % puissance hydraulique à disposition de la turbine en W
Nq = (n*(sqrt(Q))/(Hb)^0.75) % vitesse spécifique en
tr/m*((m3/s)^0.5)/m^0.75;
Ns = 3*Nq
v = (Omg*(sqrt(Q/pi))/(2*g*Hb)^0.75) % vitesse spécifique adimensionnelle;
vp = (Omg*(sqrt(Q))/(g*Hb)^0.75)
Zd = 14;        % nombre d'aubes du distributeur;

```

******* Calcul des paramètres de sortie de la roue *******

```

% hypothèse de fonctionnement nominale;
Cus = 0;        % Composante tangentielle de la vitesse absolue en m/s
Alphas = 90;   % angle de fuite  $We^{Ue}$  en degré ;

% vitesses
Us = Omg*(Dst/2) % vitesse périphérique ou d'entraînement en m/s;
Cs = (4*Q)/(pi*Dst^2) % vitesse absolue en m/s;
Ws = sqrt(Us^2 + Cs^2) % vitesse relative en m/s

% angles
Betas = atan (Cs/Us); % angle de fuite en rad/s
Betasdeg = Betas*57.2958 % Beta en degré;

```

******* Calcul des paramètres d'entrée de la roue *******

% vitesses

```

Ue = Omg*(Det/2) % vitesse périphérique ou d'entraînement en
m/s;
Cue = (g*Hn*0.96)/Ue % Composante tangentielle de la vitesse
absolue en m/s; pour Cus = 0 écoulement radial en sortie, et rendement de
96% de la turbine

Cme = Q/(pi*Det*B) % Composante méridionale de la vitesse absolue
en m/s;
Ce = sqrt(Cme^2 + Cue^2) % vitesse absolue en m/s
We = sqrt(Cme^2+(Ue-Cue)^2) % vitesse relative en m/s

```

% angles

```

Alphae = atan (Cme/Cue); % Angle entre  $Ce^{Ue}$  en rad;
Alphaedeg = Alphae*57.2958 % Alpha en degré;

Betae = atan (Cme/(Ue-Cue)); % angle d'attaque  $We^{Ue}$  en rad;
Betaedeg = Betae*57.2958 % Beta en degré;

```

******* Calcul des dimensions des directrices *******

```

Cmemax = 1.2*Cme % Cme maximal en m/s;
Cuemax = Ue - (Cmemax/tan(Betae)) % cue maximal en m/s;
alphaemax = atan(Cmemax/Cuemax); % alphae max en m/s;
alphaemaxdeg = alphaemax*57.2958 % alphae max en degré;

Sigma = pi/Zd; % pas angulaires entres les directrices en
rad;
Sigmadeg = Sigma*57.2958 % pas angulaires entres les directrices en
degré;
angl = Sigma + alphaemax;
angldeg = angl*57.2958;

l = Rtm*(sin(Sigma)/cos(angl)) % demi longueur d'aube de distributeur
en m;
L = 2*l % demi longueur d'aube de distributeur
en m;
Ro = Rtm*(cos(alphaemax)/cos(angl))% rayon du centre de rotation des pales
en m;
Ra2 = (Rtm^2)+((2*l)^2)+((4*l*Rtm)*sin(alphaemax)) % Rayon extérieur des
pales en position ouverte en m;
Ra = sqrt(Ra2)

```

% calcul de la longueur de la conduite forcée

```

Vm = (4*Q)/(pi*Dcf^2) % vitesse moyenne dans la conduite forcée en m/s
nu = 9e-7 % viscosité cinématique en m^2/s...pour eau a 25 deg
mu = 9e-4 % viscosité dynamique en kg/m^2/s
lambda = 0.0125 % coef de perte de charge lu sur le diagramme de Moody
Re = (Vm*Dcf)/nu % nombre de Reynold
Lcf = (0.04*Hb*Dcf*2*g)/(lambda*Vm^2)

```

% puissance mécanique

```

Pht = Q*Rho*g*Hb
Rtur = 0.94;
Pm = Rtur*Pht
To = Pm/Omg

```

Annexes 2 : Calculs des paramètres de simulations (pressions/vitesses)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% calcul Pressions/vitesses %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Hypothèses:
% Diamètre de la conduite forcée = diamètre de l'entrée de la bêche spirale
% Débit moyen = 893/6
% Hauteur minable de recouvrement ht = 50 m
% v1 = 0 m/s à la surface de bassin de retenu
% p1 = 10^5 pression atmosphérique en pa
% Hn = 94%Hb on admet des pertes de charge de 6% dans la conduite forcée
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc;
clear all;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Données %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

D = 6.28;      % diamètre de la conduite en m
g = 9.81;     % Accélération de la pesanteur en m/s2
rho = 1000;   % masse volumique de l'eau en kg/m3
Hb = 57.8;    % Hauteur brute en m
Dst = 5.6;    % Diamètre e sortie de la turbine en m
Qm = 0.85*(1663/6); % débit dans la conduite en m3/s

% calcul de la vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite

Hn = 0.96*Hb      % chute nette en m
Vm = (4*Qm)/(pi*D^2)% vitesse moyenne dans la conduite forcée en m/s
V2 = Vm

% hauteurs de recouvrement

Hr1 = D*(1+(2.3*(Vm/sqrt(g*D)))) % en m
Hr2 = 4.4*((Vm*(D^0.5))^0.54) % en m
Hr3 = 1.474*(Vm^0.48*D^0.76) % en m

% Calcul de la pression à l'entrée de la conduite forcée

P2 = ((-rho*Vm^2)/2)+(rho*g*Hr1)+10^5 % en Pa

% Calcul des la pression a l'entrée de bêche spirale

P3 = P2-((Hb-Hn)*rho*g) % en Pa

```


% paramètres à l'entrée de la turbine

```
C4 = sqrt(Cme^2 + Cue^2) % vitesse absolue à l'entrée de la turbine  
P4 = P3 % hypothèse: pertes de charge négligeables dans la bache spirale
```

% paramètres à la sortie de la turbine

```
% C5 = (4*Q)/(pi*Dst^2) % vitesse absolue à la sortie de la turbine  
P5 % hypothèse: Pression supérieure à la pression saturante de l'eau à  
20 degré Celsius
```