

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

ÉCOLE DE GÉNIE

**OPTIMISATION DE CHAUFFAGE INFRAROUGE D'UNE STRUCTURE  
THERMOPLASTIQUE COURBÉE À L'AIDE DU RECUIT SIMULÉ**

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR

BIOUD AMIR

Septembre 2020



# BIBLIOTHÈQUE

CÉGEP DE L'ABITIBI-TÉMISCAMINGUE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

## Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans [Depositum](#), site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous. L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

## Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) obtained the permission of the author to use a copy of this document for nonprofit purposes in order to put it in the open archives [Depositum](#), which is free and accessible to all. The author retains ownership of the copyright on this document. Neither the whole document, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

## *REMERCIEMENTS*

Je tiens à exprimer mes sentiments de gratitude à mon directeur de recherche, le professeur Fouad Erchiqui de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, de m'avoir accordé sa confiance tout au long de ce projet, pour la qualité de son encadrement et ses conseils avisés, sa disponibilité et sa sympathie.

Je remercie vivement mon codirecteur de recherche Fouad Slaoui Hasnaoui, pour son aide précieuse, ses conseils et sa disponibilité.

Mes remerciements vont à tous mes amis pour tous les bons moments passés ensemble et qui par leur bonne humeur et leur soutien ont contribué à la réalisation de ce projet. Finalement, je dédie ce modeste travail à ma famille pour leur amour, leur soutien tout au long de ces années. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements.

## TABLE DES MATIÈRES

<i>Résumé</i> .....	XI
<i>Abstract</i> .....	XII
Liste des symboles.....	XIII
<b>CHAPITRE 1</b> .....	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b> .....	<b>1</b>
1.1 Originalité .....	3
1.2 Objectifs de l'étude.....	3
1.3 Méthodologie .....	4
1.4 Contenu du mémoire .....	4
<b>CHAPITRE 2</b> .....	<b>6</b>
<b>ÉTAT DE L'ART</b> .....	<b>6</b>
2.1 Matériaux utilisés en thermoformage.....	6
2.2 Mise en forme par thermoformage.....	7
2.2.1 Étape de chauffage.....	7
2.2.2 Étape de formage .....	8
2.2.3 Étape de refroidissement.....	9
2.3 Modélisation de l'étape de chauffage infrarouge en thermoformage .....	9
2.3.1 Équation d'énergie .....	10
2.3.2 Expression du flux thermique intercepté par le matériau .....	10
2.4 Facteur de forme .....	10
2.4.1 Méthode d'aire d'intégration [6].....	11
2.4.2 Méthode d'intégration de surface [6] .....	12

2.4.3 Méthode de contour [6].....	13
2.4.4 Méthode semi-analytique [9].....	14
2.4.5 Méthode de Monte-Carlo [10].....	15
2.5 Optimisation en thermoformage.....	16
<b>CHAPITRE 3 .....</b>	<b>18</b>
<b>MODÉLISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE INFRAROUGE EN THERMOFORMAGE .....</b>	<b>18</b>
3.1 Équation de conservation d'énergie.....	18
3.2 Calcul du flux intercepté par une structure donnée .....	19
3.2.1 Discrétisation spatiale .....	21
3.2.2 Discrétisation temporelle .....	22
3.3 Validation : Matériau opaque et semi transparent.....	24
3.3.1 Milieu semi-transparent : .....	24
3.3.2 Milieu opaque.....	26
3.4 Calcul du facteur de forme : Méthode de Monte-Carlo.....	28
3.5 Validation .....	29
<b>NOTIONS D'OPTIMISATION COMBINATOIRE.....</b>	<b>35</b>
4.1 Méthodes heuristiques et métaheuristiques.....	36
4.2 Recuit simulé.....	38
<b>CHAPITRE 5 .....</b>	<b>46</b>
<b>OPTIMISATION MÉTAHEURISTIQUE : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS.....</b>	<b>46</b>
5.1 Validation : Cas d'une structure thermoplastique plane.....	46
5.1.1 Validation sans optimisation: Cas d'une structure thermoplastique plane .....	46

5.1.2 Validation avec optimisation: Cas d'une structure thermoplastique plane .....	53
<i>5.2 Application : cas d'une structure thermoplastique courbée .....</i>	<i>63</i>
5.2.1 Application : cas d'une structure thermoplastique courbée sans optimisation....	64
5.2.2 Application : cas d'une structure thermoplastique courbée avec optimisation ...	66
<b>CHAPITRE 6 .....</b>	<b>71</b>
<b>CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS.....</b>	<b>71</b>
6.1 Conclusion.....	71
6.2 Recommandations.....	71
<b>Références.....</b>	<b>73</b>
<b>Annexe A : Résolution de l'équation de chaleur 1D (semi-transparent)</b> Erreur ! Signet non défini.	
<b>Annexe B : Résolution de l'équation de chaleur 1D (opaque) .....</b>	<b>82</b>
<b>Annexe C : Discrétisation spatiale.....</b>	<b>88</b>

## Liste des figures

<b>FIGURE 2.1 : RÉPARTITION DE LA TEMPÉRATURE DANS UNE FEUILLE</b>	
THERMOPLASTIQUE [2] .....	8
<b>FIGURE 2.2 : THERMOFORMAGE À L' AIDE DE DEUX MOULES [30] .....</b>	<b>9</b>
<b>FIGURE 2.3 : THERMOFORMAGE SOUS PRESSION [30].....</b>	<b>9</b>
<b>FIGURE 2.4 : ÉCHANGE RADIATIF ENTRE SURFACES ÉLÉMENTAIRES [8] .....</b>	<b>11</b>
<b>FIGURE 2.5 : GÉOMÉTRIE DE LA MÉTHODE D' AIR D' INTÉGRATION .....</b>	<b>12</b>
<b>FIGURE 3. 1 : UNE ENCEINTE FORMER DE TROIS SURFACES GRISES [8] .....</b>	<b>19</b>
<b>FIGURE 3. 2 : RAYONNEMENT SUR UNE SURFACE GRISE .....</b>	<b>19</b>
<b>FIGURE 3. 3 : VALIDATION DE L' ÉQUATION DE CONSERVATION D' ÉNERGIE D' UN</b>	
MILIEU SEMI-TRANSPARENT .....	26
<b>FIGURE 3. 4 : VALIDATION DE L' ÉQUATION DE CONSERVATION D' ÉNERGIE D' UN MILIEU</b>	
OPAQUE.....	28
<b>FIGURE 3. 5 : FACTEUR DE FORME POUR DEUX RECTANGLES PARALLÈLES ALIGNÉS [1]</b>	
.....	<b>ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.</b>
<b>FIGURE 3. 6 : DEUX RECTANGLES PERPENDICULAIRES .....</b>	<b>33</b>
<b>FIGURE 4. 1 : DISPOSITION DES ÉLÉMENTS DU FOUR [3] .....</b>	<b>42</b>
<b>FIGURE 5. 1 FLUX INTERCEPTER PAR LA FEUILLE THERMOPLASTIQUE CAS 1 [14].....</b>	<b>48</b>
<b>FIGURE 5. 2 : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE SANS OPTIMISATION CAS 1 [14]....</b>	<b>48</b>
<b>FIGURE 5. 3 : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE SANS OPTIMISATION CAS 2 [14] ....</b>	<b>48</b>
<b>FIGURE 5. 4 : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE SANS OPTIMISATION CAS 1 [14] ....</b>	<b>48</b>
<b>FIGURE 5. 5 : CAS 1 SANS OPTIMISATION DU FLUX .....</b>	<b>50</b>
<b>FIGURE 5. 6 : CAS 1 CONDUCTION SANS OPTIMISATION .....</b>	<b>51</b>
<b>FIGURE 5. 7 : CAS 2 SANS OPTIMISATION DU FLUX .....</b>	<b>52</b>
<b>FIGURE 5. 8 : CAS 2 CONDUCTION SANS OPTIMISATION .....</b>	<b>52</b>
<b>FIGURE 5. 9 FLUX INTERCEPTER PAR LA FEUILLE THERMOPLASTIQUE CAS 1 AVEC</b>	
OPTIMISATION [14] .....	53

<b>FIGURE 5. 10</b> FLUX INTERCEPTER PAR LA FEUILLE THERMOPLASTIQUE CAS 2 AVEC OPTIMISATION [14] .....	53
<b>FIGURE 5. 11</b> DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE AVEC OPTIMISATION CAS 1 [14] ....	54
<b>FIGURE 5. 12</b> DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE AVEC OPTIMISATION CAS 2 [14] ....	54
<b>FIGURE 5. 13</b> : CAS 1 AVEC OPTIMISATION DU FLUX.....	58
<b>FIGURE 5. 14</b> : CAS 1 CONDUCTION AVEC OPTIMISATION .....	58
<b>FIGURE 5. 15</b> : CAS 2 OPTIMISATIONS DU FLUX .....	59
<b>FIGURE 5. 16</b> : CAS 2 CONDUCTIONS AVEC OPTIMISATION.....	59
<b>FIGURE 5. 17</b> : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE CAS 1 DANS LA DIRECTION 1 [14]	61
<b>FIGURE 5. 18</b> : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE CAS 1 DANS LA DIRECTION DE L'ÉPAISSEUR .....	61
<b>FIGURE 5. 19</b> : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE CAS 2 DANS LA DIRECTION DE L'ÉPAISSEUR [14].....	62
<b>FIGURE 5. 20</b> : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE CAS 2 DANS LA DIRECTION 1 .....	62
<b>FIGURE 5. 21</b> : STRUCTURE COURBÉE SANS OPTIMISATION DU FLUX .....	65
<b>FIGURE 5. 22</b> : CONDUCTION SANS OPTIMISATION (STRUCTURE COURBÉE).....	66
<b>FIGURE 5. 23</b> : FLUX AVEC OPTIMISATION (STRUCTURE COURBÉE).....	68
<b>FIGURE 5. 24</b> : CONDUCTION AVEC OPTIMISATION (STRUCTURE COURBÉE) .....	69
<b>FIGURE 5. 25</b> : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE DANS LA DIRECTION 1 .....	69
<b>FIGURE 5. 26</b> : DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE DANS LA DIRECTION DE L'ÉPAISSEUR .....	70

## Liste des tableaux

<b>TABLEAU 2.1</b> : PLAGE DE TEMPÉRATURE DE THERMOFORMAGE .....	7
<b>TABLEAU 3.1</b> : PROPRIÉTÉS THERMO-PHYSIQUES DU PET [3] .....	25
<b>TABLEAU 3.2</b> PROPRIÉTÉS THERMO-PHYSIQUES DE ABS [3] .....	27
<b>TABLEAU 3.3</b> : FACTEUR DE FORME : DEUX RECTANGLES PARALLÈLES ALIGNÉS AVEC Z = 1 .....	31
<b>TABLEAU 3.4</b> : FACTEUR DE FORME : DEUX RECTANGLES PARALLÈLES ALIGNÉS AVEC Z = 0.5 .....	32
<b>TABLEAU 3.5</b> : FACTEUR DE FORME : DEUX RECTANGLES PARALLÈLES ALIGNÉS AVEC Z = 0.1 .....	32
<b>TABLEAU 3.6</b> : FACTEUR DE FORME : DEUX RECTANGLES PERPENDICULAIRES.....	34
<b>TABLEAU 5.1</b> : <i>PARAMÈTRE ET CONFIGURATION DU FOUR [14]</i> .....	46
<b>TABLEAU 5.2</b> : DISTRIBUTION ARBITRAIRE DES TEMPÉRATURES DU FOUR : CAS 1 [14] .....	47
<b>TABLEAU 5.3</b> : DISTRIBUTION ARBITRAIRE DES TEMPÉRATURES DU FOUR : CAS 2 [14] .....	47
<b>TABLEAU 5.4</b> CAS 1 FLUX INTERCEPTÉ SANS OPTIMISATION .....	49
<b>TABLEAU 5.5</b> CAS 2 FLUX INTERCEPTÉ SANS OPTIMISATION .....	49
<b>TABLEAU 5.9</b> : TEMPÉRATURE OPTIMISÉE CAS 1 (MATLAB).....	55
<b>TABLEAU 5.12</b> : TEMPÉRATURE DES PLAQUES DU FOUR .....	64
<b>TABLEAU 5.13</b> FLUX INTERCEPTÉ PAR LA STRUCTURE COURBÉE SANS OPTIMISATION	64
<b>TABLEAU 5.15</b> FLUX INTERCEPTÉ PAR LA STRUCTURE COURBÉE AVEC OPTIMISATION	67



## *Résumé*

En thermoformage, la mise en température des structures thermoplastiques minces jusqu'à l'état souhaité s'effectue, généralement, dans un four infrarouge. Dans ce procédé, la répartition de la température lors de l'étape de chauffage infrarouge de la structure, soumise à l'effet de gravité, a une grande influence sur la qualité de l'objet moulé. C'est dans ce cadre que le projet s'inscrit avec objectif d'optimiser (améliorer) la répartition de flux d'énergie intercepté par une structure courbée. Pour le calcul du flux intercepté, la méthode de Monte-Carlo, avec l'hypothèse de la transparence du milieu séparant les zones radiantes et la structure, est utilisée. Pour le volet d'optimisation, afin de réduire l'écart entre les flux d'énergie reçue par les différentes zones de la structure courbée, nous avons considéré une approche méta-heuristique basée sur l'algorithme de recuit simulé. Le calcul du champ de température induit dans la structure courbée, par les sources radiantes, est réalisé à l'aide de la méthode des éléments finis avec l'hypothèse d'opacité de la structure.

**Mots clés :** métaheuristique, Monte-Carlo, optimisation, chauffage infrarouge, thermoformage, recuit simulé

### *Abstract*

In thermoforming, thin thermoplastic structures are usually heated to the desired state in an infrared oven. In this process, the temperature distribution during the infrared heating step of the structure, which is subject to the effect of gravity, has a great influence on the quality of the molded object. It is within this framework that the project aims to optimize (improve) the distribution of energy flows intercepted by a curved structure. For the calculation of the intercepted flux, the Monte-Carlo method, with the hypothesis of the transparency of the medium separating the radiant zones and the structure, is used. For the optimization component, in order to reduce the gap between the energy flows received by the different zones of the curved structure, we considered a meta-heuristic approach based on the simulated annealing algorithm. The calculation of the temperature field induced in the curved structure by the radiant sources is performed using the finite element method with the assumption of the opacity of the structure.

**Key words:** Metaheuristics, Monte Carlo, optimization, Infrared heating, thermoforming, Simulated Annealing

## Liste des symboles

Symbole	Grandeur	Unité
$A$	Coefficient d'absorption	$m^{-1}$
$A_s$	Surface émettrice	$m^2$
$A_r$	Surface du récepteur	$m^2$
$C$	Chaleur spécifique	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
$d$	Distance entre émetteur et récepteur	m
$E_p$	Épaisseur du matériau	m
$F_{ij}$	Facteur de forme de la surface i à la surface j	
$F_{sr}$	Facteur de forme de la source au récepteur	
$h$	Coefficient de convection	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
$I(s, \Omega)$	Intensité radiative directionnelle de direction de propagation $\Omega$ à la position s	$W \cdot m^{-2} sr^{-1}$
$I_b$	Fonction de Planck (intensité du corps noir)	$W m^{-2} sr^{-1}$
$k$	Conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$q_x, q_y, q_z$	Densités de flux de conduction instantanés	$W \cdot m^{-2}$
$q_r$	Flux radiatif	$W \cdot m^{-2}$
$S_r$	Expression du terme source radiatif	$W \cdot m^{-3}$
$T$	Température	K
$t$	Temps	s
$T_s$	Température de l'émetteur	K
$T_\infty$	Température du milieu ambiant	K
$X, Y, Z$	Coordonnées cartésiennes	

## Symboles grecs

Symbole	Grandeur	Unité
$\alpha$	Diffusivité thermique	$m^2s^{-1}$
$\beta$	Coefficient d'extinction	
$\varepsilon_s$	Émissivité moyenne de la source	
$\Phi(r^i, r^j)$	Fonction de phase de dispersion	$sr^{-1}$
$d$	Distance entre émetteur et récepteur	m
$E_p$	Épaisseur du matériau	m
$F_{ij}$	Facteur de forme de la surface i à la surface j	
$F_{s-r}$	Facteur de forme de la source au récepteur	
$\rho$	Masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$
$\sigma$	Constante de Stéphan-Boltzmann	$W \cdot m^{-2}K^{-4}$

## Abréviation

Symbole	Identifiant
1D	Une dimension
3D	Trois dimensions
ECE	Équation de conservation de l'énergie
ETR	Équation de transfert radiatif
IR	Infrarouge
MEF	Méthode des éléments finis
PET	Polyéthylène téréphtalate

# *CHAPITRE 1*

## *INTRODUCTION GÉNÉRALE*

Les procédés de mise en forme des pièces thermoplastiques sont nombreux et très complexes. La température est un facteur important en thermoformage, car il s'agit d'atteindre un ramollissement optimal sans dégrader les propriétés du matériau, et ce, de la façon la plus homogène possible. La première étape du procédé de thermoformage consiste à chauffer par rayonnement infrarouge, une feuille polymérique, qui est caractérisée par la transformation de l'état vitreux de la feuille à un état caoutchouteux [1]. La température à laquelle cette transition se produit est appelée température de transition vitreuse 'T<sub>g</sub>' et l'intervalle de température pour lequel la préforme est suffisamment molle pour être thermoformée s'appelle 'fenêtre de thermoformage' [1]. En conséquence, si la borne supérieure de cet intervalle est dépassée, la feuille risque de couler sous l'effet des forces de gravité. Dans le cas contraire, le matériau conserve une rigidité et sa mise en forme devient difficile. Ceci provient majoritairement de l'étape de chauffage, la qualité du produit moulé dépend largement de la répartition de la température dans la feuille thermoplastique. En effet, pour une température constante des émetteurs, la répartition de la température au sein de la feuille thermoplastique n'est pas uniforme. Cela aura une conséquence sur les déformations induites dans le produit final, donc sur la qualité. Un contrôle sur l'étape de chauffage s'impose et permettra d'uniformiser le flux intercepté par les différentes zones de la structure courbée. Le recours à des essais expérimentaux est dispendieux et induit beaucoup de pertes. Dans ces conditions, la modélisation et l'optimisation s'avèrent nécessaires.

L'étape de chauffage en thermoformage, par la simulation de la distribution de la température à travers l'épaisseur de la pièce nécessite une modélisation robuste des équations d'énergie et de quantité de mouvement pour tenir compte de l'impact de la gravité sur la structure. La répartition finale de la température dépend des propriétés locales de la

feuille (thermo-physique et thermo-mécanique), de la gravité, de la durée de la phase de chauffage. Cependant, un contrôle de la température peut améliorer la qualité du produit, c'est dans ce contexte que le projet s'inscrit et il concerne l'optimisation de l'étape de chauffage d'une structure courbée sous l'effet de la gravité. Concernant l'optimisation, il existe de nombreuses méthodes, algorithmes génétiques ainsi que des approches hybrides ont fait l'objet d'étude par F.Erchiq et al [2], le choix de l'algorithme du recuit simulé pour l'optimisation est fondé sur les travaux de la thèse de K.Bachir [3], ou l'efficacité et la robustesse de cette méthode a été mise en avant.

La méthodologie suivie consiste en premier, à quantifier l'énergie interceptée par la structure thermoplastique, pour cela, le calcul du facteur de forme est un élément clé pour définir l'énergie interceptée par les zones radiantes sur la structure, supposée opaque, ce dernier est estimé par la méthode de Monte-Carlo avec comme hypothèse que le milieu séparant la structure et le four est transparent. Afin de valider les résultats obtenus par la méthode de Monte-Carlo, deux cas de figure sont présentés :

1<sup>er</sup> cas : Deux rectangles parallèles.

2<sup>ème</sup> cas : Deux rectangles perpendiculaires.

Les résultats obtenus pour les deux cas de figures sont comparés avec la méthode analytique à des fins de validation.

La deuxième partie concerne l'optimisation, l'algorithme choisie pour réduire l'écart entre les flux d'énergie reçue par les différentes zones d'une structure courbée est le recuit simulé.

Une validation est présentée pour le calcul du flux ainsi que la distribution de la température à travers l'épaisseur dans le cas d'une plaque thermoplastique, les résultats sont confrontés à ceux présentés dans l'article F.Erchiq [4] publié en 2018. Dans la troisième partie, le calcul du flux intercepté est effectué pour la structure courbée, puis ce dernier est optimisé grâce au code développé sur l'environnement Matlab. En dernier, le champ de température induit dans la structure est déterminé par la méthode des éléments finis 1D.

Le thermoformage a de nombreuses applications dans des domaines très variés, nous le retrouvons un peu partout, le secteur d'application et le type de pièce sont donc très variables, on va citer plusieurs exemples, on commence par l'industrie de transport avec les carénages, capotages, intérieurs de portes, pare-chocs, tableaux de bord, capots de valise, vitres... Dans l'aéronautique avec les capots de protection, carters... dans le domaine médical, on retrouve le procédé dans le conditionnement de produits pharmaceutiques. Dans le cosmétique que ce soit dans les présentoirs ou les emballages. Nous pouvons aussi le retrouver dans le mobilier de maison avec les plateaux-repas, sièges, fauteuils. Le champ d'application s'élargit de plus en plus avec le faible coût de la fabrication qui un critère très important pour l'industrie, d'où l'intérêt d'optimiser ce processus.

### **1.1 Originalité**

L'optimisation de l'étape de chauffage par infrarouge pour une structure courbée soumise à la gravité n'a pas été abordée dans la littérature. En effet, l'étape de chauffage a une incidence directe sur la qualité du produit thermoformé. En conséquence, l'optimisation de cette étape, permet le contrôle de l'uniformité de la distribution de la chaleur interceptée par la structure en imposant les meilleures températures d'affectation aux zones radiantes. C'est dans ce cadre que le projet s'inscrit et il concerne l'utilisation d'une métaheuristique pour l'optimisation de l'étape de chauffage infrarouge en thermoformage d'une structure courbée.

### **1.2 Objectifs de l'étude**

Dans cette étude on se propose d'optimiser la répartition de la chaleur reçue par une structure courbée en polymère soumise à la gravité dans un procédé de thermoformage, avec un algorithme métaheuristique. Par la suite, nous allons coupler l'algorithme d'optimisation avec l'équation de chaleur pour prédire l'évolution de la température à travers l'épaisseur de chaque zone de la structure.

### **1.3 Méthodologie**

Dans ce projet, la méthodologie suivie consiste à mettre dans un premier temps, les bases théoriques avec une formulation robuste des équations essentielles dans la résolution du problème de transfert de chaleur par rayonnement, ceci à travers la recherche bibliographique.

Dans cette partie, le calcul du facteur de forme avec la méthode de Monte Carlo s'avère nécessaire pour quantifier l'énergie intercepter par la structure thermoplastique.

En deuxième lieu, l'application pour deux matériaux, opaque et semi-transparent permet de faire une validation entre la résolution analytique du problème en comparaison avec la solution numérique (élément finis 1D).

La troisième partie concerne la validation du programme, en reprenons les paramètres et la structure (plaque thermoplastique) dans l'article de F.Erchiqi [].

La quatrième partie est l'application sur une structure courbée afin de déterminer l'emplacement et la température idéal des émetteurs infrarouges en utilisant l'optimisation méta-heuristique (Recuit simulé).

En derniers, la synthèse des résultats obtenus permet de tirer les conclusions de l'étude et de mettre l'accent sur les améliorations à apporter à l'outil qui est développé.

### **1.4 Contenu du mémoire**

Ce mémoire est structuré suivant six chapitres.

Le premier chapitre permet de faire une introduction générale, en définissant l'originalité et les objectifs de l'étude, ainsi que la méthodologie poursuivie pour mener à bien ce projet.

Le deuxième chapitre est consacré à la recherche bibliographique. Il est réparti en cinq sections. La première est sur les principaux matériaux utilisés en thermoformage.

La deuxième section est réservée au processus de thermoformage. La troisième est consacrée à la partie modélisation de l'étape de chauffage infrarouge. La quatrième section aborde les différentes méthodes de calcul du facteur de forme. Enfin, la dernière section concerne les précédant travaux sur l'optimisation en thermoformage.

Le troisième chapitre rend compte de la modélisation de l'étape de chauffage infrarouge. Deux validations sont effectuées pour deux cas de figures, matériaux opaques, et semi-transparent. A la suite, le calcul du facteur de forme par la méthode de Monte-Carlo est présenté avec une validation.

Le quatrième chapitre traite des notions d'optimisation combinatoire, plus précisément des définitions concernant les méthodes d'optimisation (heuristique et métaheuristique), ainsi que du recuit simulé qui est l'algorithme choisis pour cette étude.

Le cinquième chapitre présente les résultats de l'étude. Ces derniers sont repartis en deux parties: ceux qui concerne l'optimisation pour une plaque thermoplastique, la seconde est l'application à une structure courbée.

Enfin, le sixième et dernier chapitre regroupe les conclusions et les recommandations des travaux futurs.

# CHAPITRE 2

## ÉTAT DE L'ART

### *2.1 Matériaux utilisés en thermoformage*

On rencontre dans le domaine du thermoformage une grande gamme de matières utilisables pour la réalisation de diverses pièces. On y utilise des matières thermoplastiques qui se déforment au contact de la chaleur. Les polymères les plus utilisés dans le domaine sont les suivants : l'acrylonitrile butadiène styrène (ABS), le polyéthylène (PE), le polystyrène choc (HIPS), le polychlorure de vinyle (PVC), le poly méthacrylate de méthyle (PMMA), le polycarbonate (PC), le polypropylène (PP) et le polystyrène (PS).

Il est aussi courant d'utiliser des associations de plusieurs polymères (ABS-PMMA, PS-PE) dont la plupart sont recyclables. La réutilisation de plastique recyclé est pratique courante et représente un intérêt économique important.

En thermoformage, les fours utilisés pour chauffer le matériau sont généralement constitués de lampes qui émettent une radiation, dépendamment du matériau choisi, l'énergie interceptée par la pièce thermoformée varie, on peut classer ces matériaux en deux familles distinctes, les matériaux opaques et semi-transparents, pour les matériaux opaques, toute l'énergie transmise par la plaque du four est interceptée par la surface du matériau puis celle-ci est transmise par conduction à travers l'épaisseur. Les matériaux thermoplastiques sont désignés comme semi-transparents, dans une bande de longueurs d'onde donnée, lorsqu'ils transmettent partiellement à travers leur épaisseur les radiations reçues en surface. Pour des épaisseurs relativement minces des préformes en PET, par exemple, entre 0.5 mm et 1.5 mm, les spectres de transmissivité de ces polymères représentent 90% à 95% du rayonnement émis par les sources infrarouges [5].

Dépendamment du matériau choisi pour la pièce à thermoformer, il existe des tableaux indiquant les différents paramètres nécessaires pour effectuer le thermoformage, voici dans

le tableau 2.1, un exemple des plages de température pour certains matériaux thermoplastique :

**Tableau 2. 1** : Plage de température de thermoformage

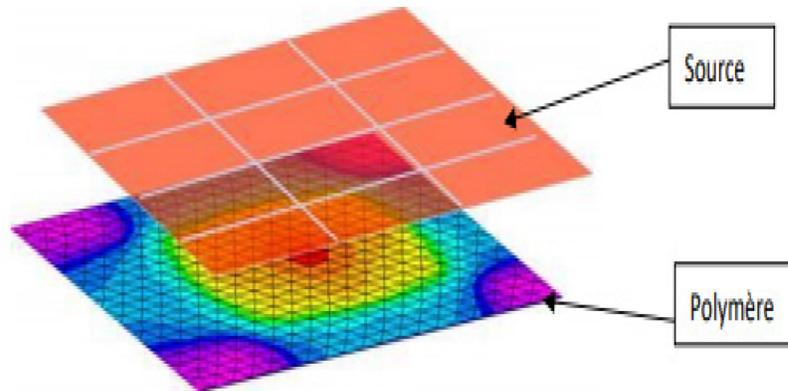
Polymère	Tg (°C)	Tf (°C)	T° moule (°C)	Plage de T° de thermoformage (°C)	Taux de retrait linéaire (%)
ABS	90 - 120	-	80	130 - 180	0,3 - 0,8
PMMA	100	-	90	150 - 190	0,3 - 0,8
PC	150	-	130	170 - 200	0,6 - 0,8
PET	70	255	60	120 - 170	0,2 - 0,4
Pebd	-110	134	70	130 - 185	3,0 - 3,5
PP	5	165	10	150 - 165	1,5 - 2,2
PS	90 - 100	-	80	130 - 185	0,3 - 0,5
PVC rigide	90	-	60	100 - 155	0,4 - 0,5

## 2.2 Mise en forme par thermoformage

Le thermoformage est largement utilisé dans l'industrie du plastique pour une variété d'applications commerciales. Le processus comporte trois étapes [2]:

### 2.2.1 Étape de chauffage

Dans l'étape de chauffage, la feuille de polymère est chauffée dans un four à une température supérieure à la température de transition vitreuse, l'objectif est de ramollir la feuille thermoplastique afin que celle-ci épouse facilement l'empreinte du moule. Toutefois, il est nécessaire de respecter la plage de thermoformage qui dépend du matériau. Dans la phase de chauffage en thermoformage, il existe de nombreux procédés de chauffage, on peut citer : le chauffage par infrarouge [2], les fours à convection ou à gaz [2]. La modélisation de l'étape de chauffage dépend nécessite la connaissance des propriétés optiques et thermo-physique des émetteurs/plastique et du milieu ambiant (température et humidité).



**Figure 2.1 :** Répartition de la température dans une feuille thermoplastique [2]

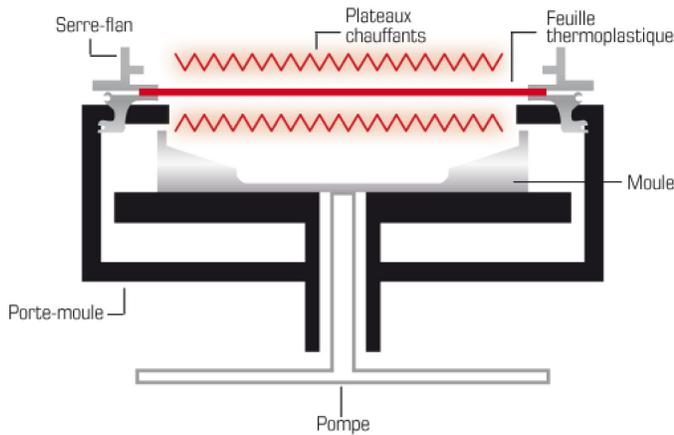
### 2.2.2 *Étape de formage*

Dans l'étape de formage, la feuille chauffée, sous l'action d'une charge mécanique, va épouser le moule. À cet effet, il existe plusieurs techniques de formage qui diffèrent par la méthode utilisée :

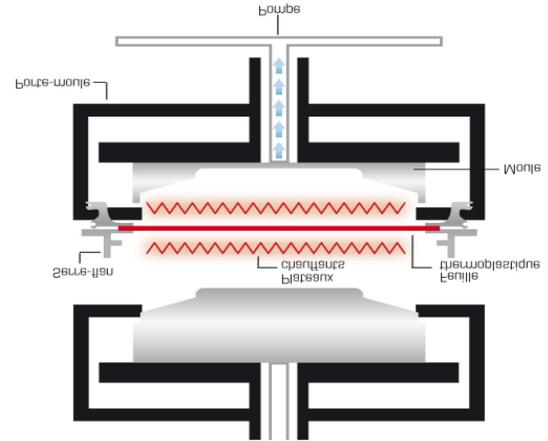
- le formage sous vide : l'air interne est aspiré par les trous d'aération du moule mâle et le prototype de la feuille de plastique ramollissante épouse la surface du moule mâle sous la pression de l'air
- le formage sous pression : une pression mécanique est appliquée à la préforme et, ensuite, celle-ci épouse la surface du moule
- le formage à l'aide de déplacement de deux moules (mâle et femelle) [2] : les bords de la feuille thermoplastique, dans un premier temps sont encastrés sur la moule femelle. Ensuite, on déplace la moule mâle qui exerce un déplacement de la matière plastique jusqu'à la surface interne du moule femelle.

Le formage sous vide est le plus utilisé en thermoformage. Les avantages de ce type de formage sont l'économie de matière, la bonne performance d'étanchéité. En plus, étant donné que le processus de formage sous vide ne touche aucune surface de moule, le brillant de surface des pièces est élevé sans défauts. Toutefois, il convient de noter que la précision

des pièces dépend principalement de la température du moule, de la température du plastique et de la pression de contact effective entre les pièces chaudes et le moule.



**Figure 2.3 :** Thermoformage sous pression [30]



**Figure 2.2 :** Thermoformage à l'aide de deux moules [30]

### 2.2.3 Étape de refroidissement

Le refroidissement constitue l'étape de thermo-réglage en ce qui concerne le thermoformage des polymères amorphes et cristallins (polypropylène, polyéthylène à haute et basse densités, etc.). Le refroidissement des pièces s'effectue par suppression d'apport de chaleur au moule ainsi que par exposition à l'air libre. Il est essentiel de contrôler le taux de retrait de la pièce, notamment en ce qui concerne les matériaux cristallins. Cette étape passe généralement par un réglage de la température du moule. C'est une étape importante afin d'obtenir un produit conforme.

### 2.3 Modélisation de l'étape de chauffage infrarouge en thermoformage

La modélisation de chauffage en thermoformage est basée sur la résolution des équations de la conservation de l'énergie (ECE) et de transfert radiatif (ETR).

Étant donné la minceur de la feuille thermoplastique à thermoformer, la modélisation de l'étape de chauffage se traite le plus souvent à l'aide de la méthode des éléments finis 1D,

ou par la méthode des différences finies 1D [6]. En plus, l'hypothèse des transferts radiatifs internes unidirectionnels, suivant l'épaisseur de chaque région de la membrane thermoplastique, est largement adoptée par les auteurs [6]. À cela s'ajoute l'hypothèse des milieux froids réduits significativement le caractère non linéaire du terme radiatif qui nécessite aussi le calcul du facteur de forme [6].

### 2.3.1 Équation d'énergie

Pour atteindre l'objectif visé, la méthode des éléments finis (MEF) 1D est considérée pour modéliser et analyser l'étape de chauffage transitoire d'une structure courbée soumise à la gravité, car celle-ci s'adapte bien pour le cas d'une plaque mince. Une discrétisation basée sur une formulation intégrale faible de l'équation de conservation de l'énergie avec terme source radiatif est considérée.

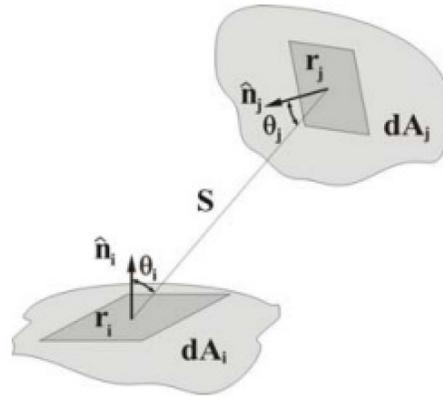
### 2.3.2 Expression du flux thermique intercepté par le matériau

Pour la modélisation du transfert radiatif, il est essentiel de déterminer la proportion du flux radiatif émise par la source radiative et interceptée par le matériau. Ce flux intercepté par le plastique nécessite le calcul du facteur de forme  $F_{ij}$ , Pour cela il existe une panoplie de méthodes qui sont exposées dans la section ci-dessous.

### 2.4 Facteur de forme

Le facteur de forme  $F_{ij}$  est défini comme la fraction de rayonnement sortant de la surface  $i$ , qui est interceptée par la surface  $j$ . L'expression générale qui donne le facteur de forme pour deux surfaces qui ont une radiosité uniforme est donnée par l'équation (2.1) :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_j} \int_{A_i} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi S^2} dA_i dA_j \quad (2.1)$$



**Figure 2.4** : Échange radiatif entre surfaces élémentaires [8]

Où  $\theta_i$ ,  $\theta_j$  sont les angles polaires des surfaces  $i$ ,  $j$  respectivement et  $S$  est la distance entre les surfaces.

Pour les configurations simples, les intégrales peuvent être évaluées analytiquement.

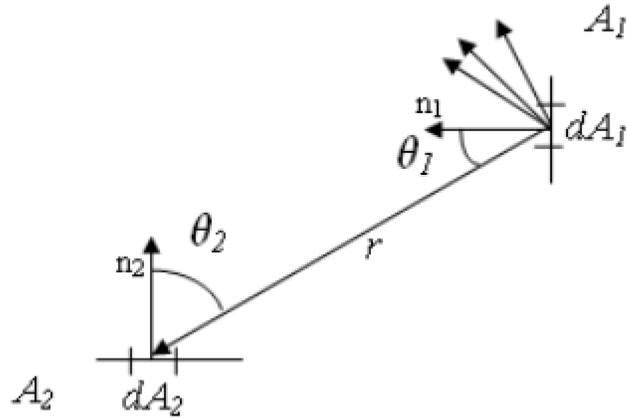
Mais pour des géométries plus complexes, telles que l'affaissement d'une membrane soumise à la gravité, il est nécessaire d'utiliser d'autre technique.

Parmi les méthodes d'approximation numériques pour calculer le facteur de forme, on trouve en général deux types : déterministe et probabiliste [8].

Les sections ci-dessous présentent des descriptions sommaires des principales méthodes rencontrées en thermoformage pour le calcul du facteur de forme.

#### 2.4.1 Méthode d'aire d'intégration [6]

La méthode d'aire-intégration, dite subdivision des surfaces, est une technique qui consiste à remplacer la forme intégrale du facteur de forme définie par l'équation (1.1) par une double sommation sur des opérations vectorielles des cosinus directeurs.



**Figure 2.5 :** Géométrie de la méthode d'air d'intégration

Cette technique engendre la discrétisation des surfaces  $A_i$  et  $A_j$  en petites surfaces élémentaires. Les termes  $\cos\theta_i$  et  $\cos\theta_j$  sont remplacés par leur écriture vectorielle :

$$\cos\theta_i = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_i}{r} \quad (2.2)$$

et

$$\cos\theta_j = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_j}{r} \quad (2.1)$$

Le calcul du facteur de forme se fait sur un ensemble de surfaces élémentaires  $\Delta A_l$  et  $\Delta A_k$ .

La formule numérique associée à l'équation (1.1) est alors :

$$F_{ij} \approx -\frac{1}{A_i \pi} \sum_l \sum_k \frac{(\vec{n}_l \cdot \vec{r})(\vec{n}_j \cdot \vec{r})}{(\vec{r} \cdot \vec{r})^2} \Delta A_l \Delta A_k \quad (2.2)$$

La convergence de la méthode dépend du raffinement du maillage, mais au prix d'un temps de calcul qui peut devenir assez élevé.

#### 2.4.2 Méthode d'intégration de surface [6]

Cette méthode est basée sur l'utilisation de la quadrature de Gauss et la méthode des éléments finis.

Une discrétisation est réalisée sur les deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$ , respectivement, en  $N$  et  $M$  surfaces élémentaires. Pour chaque couple de surfaces élémentaires  $A_{ik}$  et  $A_{jl}$ , respectivement, des surfaces  $A_i$  et  $A_j$ , un facteur de forme  $F_{ikjl}$  est calculé. Ensuite, une sommation de ces termes est réalisée pour déduire le facteur de forme total entre les deux surfaces mères. Cette méthode a démontré son efficacité pour des géométries complexes. Le facteur de forme entre les surfaces  $A_i$  et  $A_j$  est alors donné par l'expression suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N A_{ik} F_{ikjl} \quad (2.3)$$

Le calcul des facteurs de formes élémentaires est réalisé à l'aide de la quadrature de Gauss. Les surfaces réelles ( $A_{ik}$ ,  $A_{jl}$ ) d'un repère de référence sont exprimées à l'aide des déterminants de la matrice Jacobienne. Ensuite, l'intégration du facteur de forme est transformée en une double sommation à l'aide de la quadrature de Gauss sur les 49 éléments de référence. Pour chaque couple de surface de références et un ensemble  $n_g$  de points et poids de Gauss, l'évaluation du facteur de forme est effectuée à l'aide de la formule suivante :

$$F_{ikjl} \approx \frac{1}{2\pi A_{ik}} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} w_i \cdot w_j f(\xi_i, \eta_j) \times \det(J(\xi_i)) \det(J(\eta_j)) \quad (2.4)$$

Où  $\xi_i$ ,  $\eta_j$  et  $w_i$ ,  $w_j$  représentent, respectivement, les points et les poids d'intégration de Gauss, et le terme  $f(\xi_i, \eta_j)$  désigne la fonction à intégrer. L'exactitude de la quadrature de Gauss dépend fortement du nombre de points de Gauss. Pour l'intégration exacte d'un polynôme de degré  $m$ , le choix du nombre de points de Gauss  $n_g$  est tel que :

$$2m-1 \leq n_g \leq m^2.$$

#### 2.4.3 Méthode de contour [6]

La double intégrale de l'équation du facteur de forme, de l'équation (2.1), est transformée en une intégrale à l'aide du théorème de Stokes. La formule du facteur de forme entre les contours des deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  s'écrit

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} \ln r d\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \quad (2.5)$$

Où  $r$  représente la distance entre les vecteurs position  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ . Pour un point quelconque  $a$  du contour  $\partial A_i$  de la surface  $A_i$  et un point quelconque  $b$  du contour  $\partial A_j$  de la surface  $A_j$ , la distance  $r$  est donnée par :

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.6)$$

Pour évaluer l'intégrale de contour, plusieurs méthodes d'intégration numériques ont été adaptées, entre autres, la méthode de Gauss, Simpson et trapèze. La quadrature de Gauss est la plus répandue pour transformer cette intégrale du fait qu'elle conduit à des résultats précis dans un laps de temps très court. En effet, des études ont montré que pour des plaques parallèles centrées, la méthode de contour converge beaucoup plus rapidement que la méthode de l'intégrale de surface. L'expression de l'équation (2.7) s'écrit :

$$F_{ij} \approx \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (a_{x1,i} \cdot a_{x2,j} + a_{y1,i} \cdot a_{y2,j} \cdot a_{z1,i} \cdot a_{z2,j}) \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q (W^k W^l \ln(d(\xi_k, \eta_l))) \quad (2.7)$$

Où  $a_{1,i}$  et  $a_{2,j}$  représente les transformations spatiales des coordonnées des points de contour des surfaces  $A_i$  et  $A_j$  vers les coordonnées locales à l'aide de la méthode de Gauss [6].

Les nombres  $p$  et  $q$  représentent, respectivement, les points de Gauss fixés pour chaque surface.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés principalement à la méthode de Monte-Carlo, mais nous avons détaillé : la méthode d'aire d'intégration, d'intégration de surface et la méthode de contour.

#### 2.4.4 Méthode semi-analytique [9]

Dans le cas de deux surfaces arbitraires très voisines, le calcul numérique du facteur de forme conduit à des résultats divergents. La méthode semi-analytique permet de surmonter

cette difficulté tout en réduisant le nombre d'opérations de calcul numérique. La méthode est basée sur l'intégration de contour. En utilisant le théorème de Stokes, la formule du facteur de forme de l'équation (2.1) s'écrit :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} \ln r \, d\vec{r}_i d\vec{r}_j \quad (2.8)$$

Où  $r$  représente la distance entre les vecteurs positions  $\vec{r}_i$  (respectivement  $\vec{r}_j$ ) d'un point quelconque appartenant au  $\partial A_i$  (respectivement  $\partial A_j$ ) de la surface  $A_i$  (respectivement  $A_j$ ) donnée par :

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.9)$$

Cette approche développée dans [8] consiste dans un premier temps à lever la singularité en intégrant analytiquement la partie singulière. Ensuite, intégrer numériquement le résultat de l'étape précédente. L'expression de facteur de forme est alors comme suit :

$$F_{ij} \approx \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (e_i \cdot e_j) (\Gamma_{ij}^a + \Gamma_{ij}^b + \Gamma_{ij}^c) \quad (2.10)$$

Où  $e_i$  et  $e_j$  sont des vecteurs unitaires appartenant respectivement aux segments de contour  $L_i$  et  $L_j$  formant les frontières  $\partial A_i$  et  $\partial A_j$ . Les fonctions  $\Gamma_{ij}^a$ ,  $\Gamma_{ij}^b$  et  $\Gamma_{ij}^c$  expriment les propriétés géométriques des segments de contour.

#### 2.4.5 Méthode de Monte-Carlo [10]

Cette méthode est parmi les premières méthodes numériques adaptées au calcul de la surface radiative mutuelle (facteur de forme). Notons qu'il n'y pas une méthode unique de Monte Carlo, mais plutôt différentes approches statistiques. Cette méthode a démontré son efficacité même pour les géométries plus complexes. La méthode de Monte Carlo est une méthode probabiliste basée sur un processus stochastique, répétitif, qu'on peut résumer en trois étapes. À la première étape, un point d'émission est choisi aléatoirement de la surface émettrice à l'aide d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0,1]$ . Ensuite, une direction d'émission est sélectionnée via l'angle polaire formé par la direction d'émission

et la normale, ainsi que l'angle azimutal. Le point d'interaction du rayon avec la surface réceptrice est déterminé à partir du point et la direction d'émission. Enfin, pour chaque rayon lancé, un test est réalisé pour déterminer s'il est intercepté ou non par la surface réceptrice. Un compteur est incrémenté pour chaque rayon arrivé à la surface de la surface réceptrice [3]. Afin de déterminer le facteur de forme, le nombre d'essais qui ont touché la surface réceptrice est divisé par le nombre d'essais total.

### *2.5 Optimisation en thermoformage*

Le problème de la minimisation des gradients de température dans les pièces thermoformées via l'optimisation du chauffage a été abordé dans la littérature (différentes approches ont été adoptées): McEvoy et al ont souligné l'importance d'optimiser la phase de chauffage dans le moulage par étirage-soufflage [11]. Chyan a proposé un modèle de réseau neuronal « inverse » pour prédire les conditions de traitement optimales pour le thermoformage [12]. Monteix a optimisé les paramètres de traitement pour la phase de réchauffage d'un procédé de moulage par injection-étirage en deux étapes [13]. Bendada et Nguyen ont développé une technique inverse utilisant des mesures de température de surface pour reconstruire la distribution de la température [14]. Boutaous et al ont développé une méthode pour modéliser et optimiser le chauffage par rayonnement pour le thermoformage à l'aide du traçage de rayons [15]. Néanmoins, l'utilisation d'algorithmes métaheuristiques pour optimiser le processus de thermoformage n'a pas encore été suffisamment clarifiée, en particulier pour la phase de chauffage. Deux études que nous pourrions citer, sur le plan de la résolution algorithmique, celle effectuée par Erchiqui et al [2] ainsi qu'une étude plus récente par Erchiqui [4]. Les résultats obtenues dans la thèse de K.Bachir [3] montre que le recuit simulé est un choix judicieux en comparaison avec d'autres algorithmes. Toutefois, les deux approches ne concernent que le cas statique et pour lesquels la structure est supposée être plane (absence de la force de gravité). Pour cela, ils ont utilisé, deux métaheuristiques: le recuit simulé (SA) et l'algorithme génétique (GA). Dans leur approche, l'objectif est de réduire les différences d'énergie interceptées par

différentes zones d'une feuille thermoplastique plane exposée à un champs radiatif émise par un ensemble de zones radiantes. Autrement dit, les algorithmes d'optimisation utilisés ne considèrent pas les déformations d'affaissement causées par la force de gravitation. C'est dans ce cadre que notre proposition s'inscrit et considère le cas d'une structure courbée pour l'optimisation. À cet effet, le recuit simulé (SA) sera considéré. Le facteur de forme, nécessaire pour calculer l'énergie interceptée par la surface thermoplastique courbée sera estimé par la méthode de Monte-Carlo. Le but est d'amener un système d'un état initial arbitraire à un état avec un minimum d'énergie.

## CHAPITRE 3

# MODÉLISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE INFRAROUGE EN THERMOFORMAGE

### 3.1 Équation de conservation d'énergie

La distribution de la température dans le temps en un point donné d'une structure exposée à un champ radiatif peut être déterminée en résolvant l'équation de la chaleur [16]. Ainsi, en vertu de la première loi de la thermodynamique, l'équation traduisant la conservation de l'énergie interne en absence de convection est donnée par l'expression (3.1) [16]:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \nabla \cdot (k_c \cdot \nabla T) = -\nabla q_{rad} \quad (3.1)$$

où  $T$  est la température,  $t$  le temps.  $q_{rad}$  représente la densité du flux radiatif.  $\rho, C_p$  et  $k_c$  sont respectivement la densité, la chaleur spécifique, et la conductivité thermique du matériau polymérique supposé isotrope.

La condition de frontière considérée, dans le cas d'un milieu isotrope, est liée aux pertes convectives et radiatives particulièrement importantes, notamment durant la phase d'équilibre (après arrêt du chauffage). Elle est donnée par :

$$k \nabla T \cdot n_{rp} + h(T_p - T_\infty) + \varepsilon_p \sigma (T_s^4 - T_p^4) = 0 \quad (3.2)$$

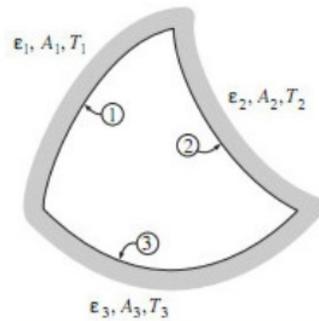
Le terme  $h(T_p - T_\infty)$  représente le transfert de chaleur par convection à partir du milieu polymérique vers le milieu ambiant,  $h$  est son coefficient d'échange de chaleur par convection.  $T_p$  désigne la température de surface externe de la préforme exposée à la chaleur radiative,  $T_s$  la température de la source et  $T_\infty$  est la température du milieu ambiant.  $n_{rp}$  étant le vecteur normal à la paroi.

Le terme  $\nabla q_{rad}$  représente la divergence du flux radiatif et il désigne l'énergie radiative absorbée par unité de volume au niveau du point matériel considéré. Ce terme à un signe

près, est plus communément appelé terme source radiatif. Tout l'enjeu de la modélisation des transferts radiatifs réside dans l'estimation de ce terme source.

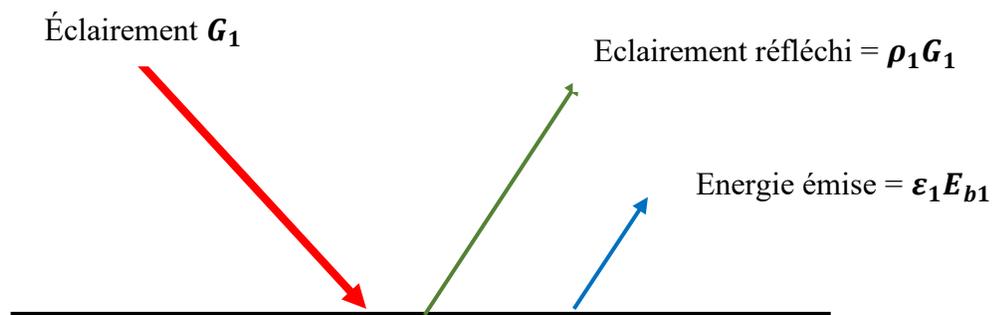
### 3.2 Calcul du flux intercepté par une structure donnée

Dans cette partie, nous mettons en avant les équations essentielles qui permettent de quantifier l'énergie nette reçue par chaque surface d'un polymère soumis à un rayonnement monochromatique. Pour cela, nous considérons l'hypothèse du milieu froid de telle sorte que seule la température de la source ( $T_s$ ) est supposée très grande que celle de la surface polymérique ( $T_p$ ); ( $T_s \ll T_p$ ). Pour illustrer la méthode utilisée dans ce travail pour déterminer le flux intercepté par une surface donnée, nous considérons une enceinte formée de trois surfaces grises représenté par la figure 3.1 :



**Figure 3. 1** : Une enceinte former de trois surfaces grises [8]

La figure 3.2 représente le rayonnement sur une seul surface grise :



**Figure 3. 2** : Rayonnement sur une surface grise

Un bilan d'énergie réalisée en surface nous permet d'obtenir la relation :

$$\frac{(q_i)_{net}}{A_1} = (q_1)_{net}'' = (J_1 - G_1) \quad (3.3)$$

$G_1$  représente l'éclairement de la surface 1, qui est due à l'énergie provenant de l'ensemble des surfaces formant l'enceinte (incluant la surface 1),  $\rho_1$  sa réflectivité et  $\varepsilon_1$  son émissivité.  $J_1$  représente la radiosité, qui est l'énergie qui quitte la surface polymérique, elle est égale à la somme de l'énergie émise par unité de surface ( $\varepsilon_1 E_{b1}$ ) et l'éclairement réfléchi ( $\rho_1 G_1$ ):

$$J_1 = \varepsilon_1 E_{b1} + \rho_1 G_1 \quad (3.4)$$

On déduit de l'équation (3.4), l'expression de l'éclairement  $G_1$  :

$$G_1 = \frac{1}{\rho_1} J_1 - \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} E_{b1} \quad (11)$$

En substituant (3.5) dans (3.3) et en utilisant la relation  $\varepsilon_1 = (\rho_1 - 1)$ , nous obtenons :

$$(q_1)_{net}'' = \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} (E_{b1} - J_1) \quad (3.6)$$

En conséquence, selon la formule (3.6), le calcul de  $(q_1)_{net}''$ , nécessite la connaissance de la radiosité  $J_1$ . À cet effet, considérons l'expression mathématique de l'éclairement associé à la surface 1 (qui est dû à l'ensemble des radiosités des trois surfaces formant l'enceinte thermique) :

$$A_1 G_1 = A_1 F_{11} J_1 + A_2 F_{21} J_2 + A_3 F_{31} J_3 \quad (3.7)$$

où  $F_{ij}$  représente le facteur de forme entre la surface  $i$  et la surface  $j$ . En utilisant le principe de réciprocité :

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (3.8)$$

On obtient pour (3.7) :

$$G_1 = F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3 \quad (3.9)$$

En introduisant (3.9) dans (3.6) :

$$(q_1)_{net} = \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} (E_{b1} - J_1) = J_1 - F_{11}J_1 + F_{12}J_2 + F_{13}J_3 \quad (3.10)$$

Soit :

$$\left(1 - F_{11} + \frac{\varepsilon_1}{\rho_1}\right)J_1 + (-F_{12}J_2) + (-F_{13}J_3) = \frac{\varepsilon_1}{\rho_1}E_{b1} \quad (3.11)$$

Cette équation peut être généralisé pour ‘n’ surfaces formant une enceinte :

$$\begin{bmatrix} 1 - F_{11} + \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} & \dots & -F_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_{n1} & \dots & 1 - F_{nn} + \frac{\varepsilon_n}{\rho_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} E_{b1} \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\rho_n} E_{bn} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Ainsi, en connaissant les propriétés optiques de chaque surface ( $\varepsilon$ ,  $\rho$ ) et sa température T, nous pouvons alors calculer les radiosités  $J_n$ . Ensuite, en connaissant la valeur de la radiosité  $J_i$ , on peut déterminer l'énergie nette, qui doit être ajoutée à la surface « i » pour maintenir sa température a une valeur constante, par l'entremise de l'équation (3.6).

*Remarque* :  $F_{ii}$  est nul si la surface i est plane

### 3.2.1 Discrétisation spatiale

Dans ce travail, un modèle 1D sera considéré pour la résolution de l'équation de la chaleur. Ce choix est motivé par des considérations géométriques reliées aux feuilles thermoplastiques utilisées en thermoformage. Effectivement l'épaisseur de la feuille thermoplastique est généralement négligeable par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). En plus, nous supposons que l'énergie se propage dans la direction normale en chaque point de la structure polymérique. Dans ces conditions, et en désignant par x la direction normale de la propagation de l'énergie radiative, l'équation d'énergie devient :

$$\left[ \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dx} (k_c \cdot \nabla T) - Q_{rad} \right] = 0 \quad (3.13)$$

Avec

$\rho$  : La masse volumique

$C_p$  : La chaleur spécifique

$k_c$  : La conductivité thermique.

$Q_{rad}$  : Le Flux de chaleur.

$\nabla T$  : Variation de température.

Pour la résolution numérique de l'équation (3.13), nous considérons la méthode des éléments finis. Ainsi, en se référant à l'Annexe C, l'expression algébrique qui régit l'équation différentielle (3.13) de transfert de chaleur est donnée par :

$$[M] \cdot \{\dot{T}\} + [K] \cdot \{T\} = \{F\} \quad (3.14)$$

où :

$[K]$ : la matrice conductivité thermique globale.

$[M]$  : la matrice de capacité thermique globale.

$\{F\}$  : le vecteur de charge thermique global.

### 3.2.2 Discrétisation temporelle

Pour déterminer la température dans le matériau thermoplastique, nous introduisons une famille d'approximation en  $\theta$  et en temps  $t_n$  [13].

$$([M] + \Delta t \theta [K]) T^{n+1} = ([M] - \Delta t (1 - \theta) [K]) T^n + \Delta t \{F\} \quad (3.15)$$

Avec :

$$T^{n+\theta} = (1 - \theta) T^n + \theta T^{n+1} \quad (3.16)$$

$$\theta = \frac{t - t_n}{\Delta t}$$

$\Delta t$  = le pas de temps en seconde.

Concernant le paramètre  $\theta$ , il existe plusieurs valeurs dans la littérature [17]:

$\theta = 0$  : schéma d'Euler

$\theta = 1/2$  : schéma de Crank-Nicolson

$\theta = 2/3$  : Méthode de Galerkin

$\theta = 1$  : Backward différence schéma

Dans ce travail, nous considérons le schéma de Crank-Nicolson pour lequel ( $\theta = 1/2$ ). Ce choix est motivé par des considérations de convergences et de stabilité [17].

Pour le cas d'un matériau opaque exposé des deux côtés par la radiation, on a pour le vecteur charge thermique l'expression suivante :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} Q_{net} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ Q_{net} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Pour le cas d'un matériau semi-transparent (absorbant), d'épaisseur  $h$  et subdivisé en  $n$  éléments finis (de  $z_0$  à  $h$ ), exposé des deux côtés par la radiation, on a :

$$\{F\} = \{F_1\} + \{F_2\} \quad (3.18)$$

Avec :

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} Q_{net.e^{-z_0}} \\ Q_{net.e^{-z_1}} \\ Q_{net.e^{-z_2}} \\ \vdots \\ Q_{net.e^{-h}} \end{Bmatrix} ; \{F_2\} = \begin{Bmatrix} Q_{net.e^{-h}} \\ \vdots \\ Q_{net.e^{-z_2}} \\ Q_{net.e^{-z_1}} \\ Q_{net.e^{-z_0}} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Le terme  $Q_{net}$  est donné par l'expression (3.6). Le terme  $h$  désigne l'épaisseur de la feuille thermoplastique et les  $z_i$  ( $i=0,..n$ ), avec  $0 \leq z \leq h$ , représentent des positions selon  $h$  (direction normale).

### 3.3 Validation : Matériau opaque et semi transparent

Cette partie est consacrée à la validation de la solution numérique à l'aide de la méthode des éléments finis de l'équation de conservation d'énergie. Le but est de s'assurer de la validité de calcul avant de l'introduire dans le modèle d'optimisation. Cette validation est réalisée entre la solution numérique produite par la méthode des éléments finis 1D et la solution analytique. Le calcul de la répartition de la température à travers l'épaisseur de la matière est réalisé à partir de l'équation de chaleur transitoire 1D, respectivement, avec et sans source radiative interne.

#### 3.3.1 Milieu semi-transparent :

Dans cette partie, nous considérons une feuille PET semi-infinie à parois adiabatiques, d'épaisseur  $z = 0.01$  m, soumise à une densité de flux radiatif uniforme  $q_0''$ , supposée constante pour une durée de 35 s. La feuille est discrétisée en 10 éléments linéaires suivant son épaisseur. L'atténuation d'une source volumique  $q_0'''$ , en fonction de l'épaisseur ( $z$ ), est estimée par la loi de Beer-Lambert :

$$q_0''' = q_0'' \cdot \exp^{-z} \quad (3.20)$$

L'équation de transfert de chaleur s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_0''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.21)$$

Avec  $0 < z < \infty$

Les conditions aux limites et initiales à imposer à la surface sont :

$$T(z, t = 0) = T_0 \quad (3.22)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T = T_0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_0'' \quad (3.24)$$

La solution analytique de l'équation (3.21) est donnée par (voir Annexe A):

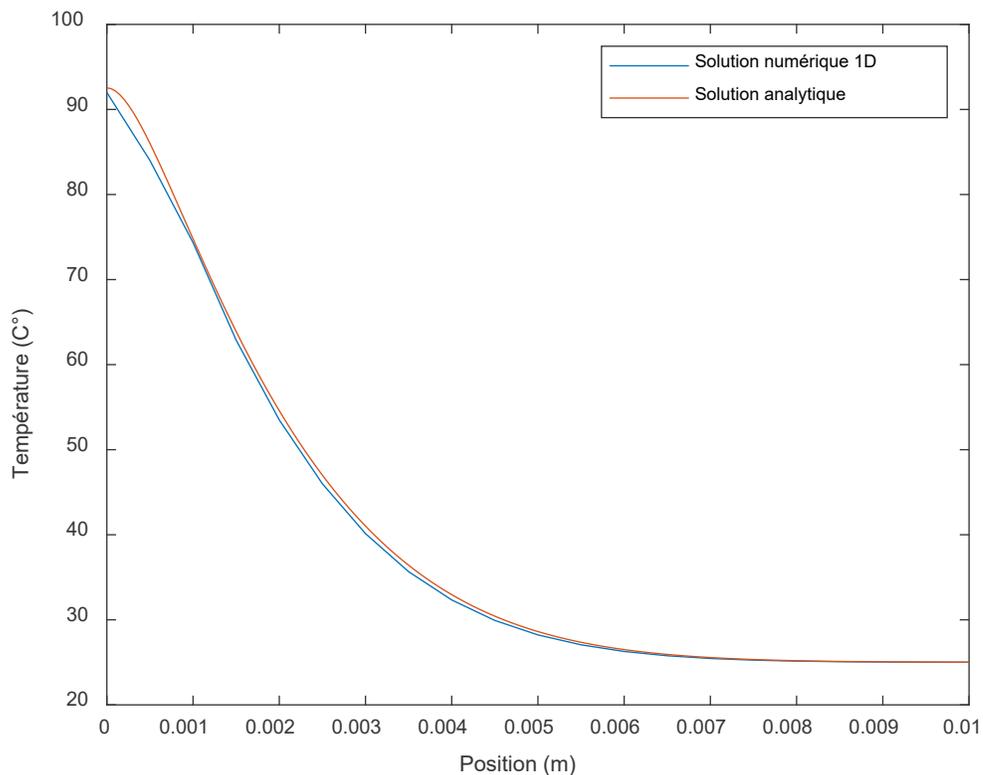
$$\begin{aligned}
T(z, t) = T_{ini} - \frac{q_0'''}{k\beta} \exp^{-\beta z} + q_0'' \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \\
+ \frac{q_0'''}{2k\beta} \exp(\beta^2 \alpha t + \beta z) \operatorname{erfc} \left( \beta \sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \\
+ \frac{q_0'''}{2k\beta} \exp(\beta^2 \alpha t - \beta z) \operatorname{erfc} \left( \beta \sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right)
\end{aligned} \quad (3.25)$$

Avec  $L = \frac{z}{2}$ ,  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$

Les paramètres thermo-physiques utilisés pour cette simulation sont résumés par le tableau 3.1 :

**Tableau 3. 1** : Propriétés thermo-physiques du PET [3]

Propriétés thermiques	Valeurs
Diffusion thermique $\alpha$ ( $ms^{-2}$ )	$1.183. 10^{-7}$
Densité $\rho$ ( $kg. m^{-3}$ )	1400
Chaleur spécifique $C_p$ ( $J. kg^{-1}. k^{-1}$ )	1750
Conductivité thermique $k$ ( $W. m^{-1}. k^{-1}$ )	0.29
Flux, $q_0''$ ( $\frac{W}{m^2}$ )	10000
Température initiale $T_0$ (K)	25
Coefficient moyen d'absorption $\beta$ (longueur d'onde [0.2 – 10] $\mu m$ ) $m^{-1}$	2660



**Figure 3.3** : Validation de l'équation de conservation d'énergie d'un milieu semi-transparent

La Figure 3.3 montre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis 1D et la solution analytique de l'équation (3.25). On observe une similitude entre la solution analytique et numérique avec une erreur relative inférieure à 0.2%.

### 3.3.2 Milieu opaque

Dans cette partie, nous nous intéressons à la validation de la solution numérique avec la méthode des éléments finis 1D dans le cas où la source interne radiative est négligée. L'étude est menée sur une feuille ABS semi infinie, d'épaisseur  $2L = 0.02$  m, sa surface est soumise à une densité de flux radiatif,  $q_0'' = 10000$   $W/m^2$ , constante pour une durée

de chauffage  $t = 35$  s. La feuille est discrétisée en 10 éléments linéaires suivant son épaisseur. L'équation analytique de transfert de chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.26)$$

Avec  $0 \leq z \leq L$

Les conditions aux limites et initiales à imposer à la surface sont :

$$T(z, t = 0) = T_0 \quad (3.27)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T = T_0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} = q_0'' \quad (3.29)$$

Sous ces conditions aux limites, la solution analytique de l'équation (3.26) est comme suit [20] (voir Annexe B): :

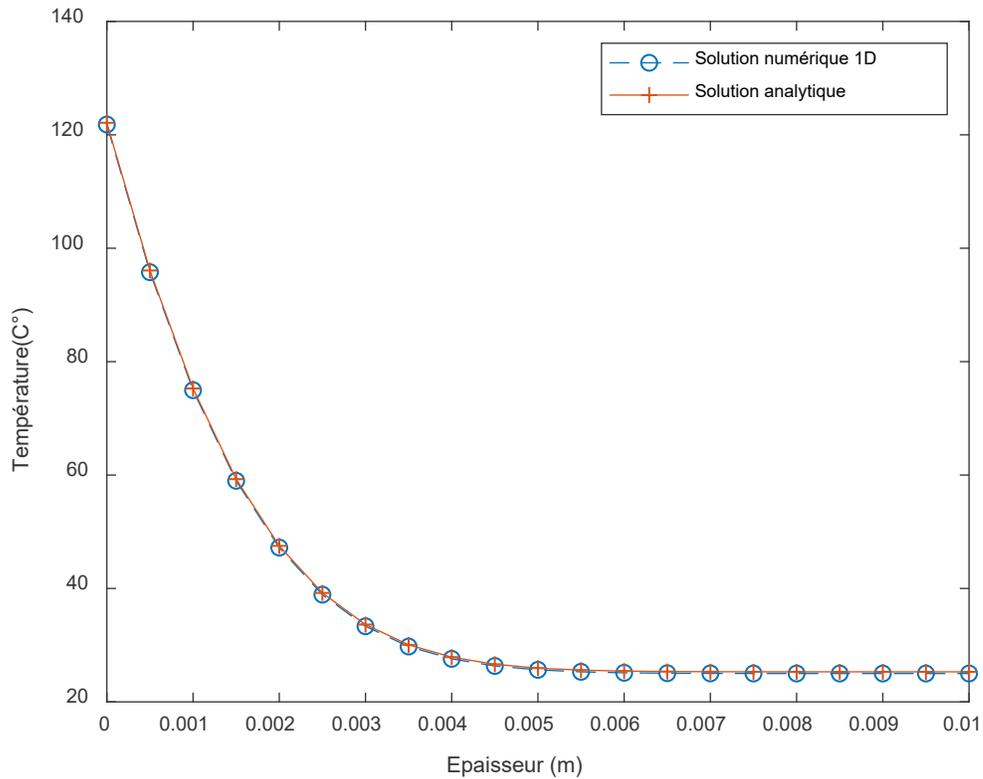
$$T(z, t) = T_{init} - \frac{q_0 L}{k} \left[ F_0 + \frac{Z^2}{2} + \frac{1}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp(-\lambda_n^2 F_0) \cos(\lambda_n Z) \right] \quad (3.30)$$

Avec  $\lambda_n = n\pi$ ;  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ ;  $F_0 = \frac{\alpha t}{L^2}$ .

Les propriétés thermo-physiques utilisées pour cette simulation sont résumées par le tableau 3.2 :

**Tableau 3. 2** Propriétés thermo-physiques de ABS [3]

Propriétés thermiques de ABS	Valeurs
Densité $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	1050
Chaleur spécifique $C_p$ ( $J.kg^{-1}.k^{-1}$ )	2590
Conductivité thermique $k$ ( $W.m^{-1}.k^{-1}$ )	0.174



**Figure 3. 4 :** Validation de l'équation de conservation d'énergie d'un milieu opaque

Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis 1D et la solution analytique de l'équation (3.30) sont résumés par la figure 3.4. Les résultats montrent une similarité entre la solution analytique et numérique avec une erreur relative inférieure à 0.01%.

### 3.4 Calcule du facteur de forme : Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monté Carlo est une technique probabiliste basée sur la simulation d'une série de nombres aléatoires  $R_\xi$  compris entre 0 et 1 et qui constituent les distributions de probabilités des variables d'un problème complexe [18].

$$R_{\xi} = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi^*) d\xi^*}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi} \quad (3.31)$$

Avec  $\xi$  une variable du problème et  $f(\xi)$  une fonction relative à  $\xi$ .

L'évaluation des facteurs de forme entre deux surfaces par la méthode de Monte Carlo consiste à simuler numériquement l'émission d'un nombre élevé de  $N$  radiations à partir de la surface  $A_i$  et de compter le nombre  $n$  de rayons atteignant la surface  $A_j$ . Le facteur de forme est alors obtenu en faisant le rapport du nombre de rayons qui atteint la surface  $A_j$  sur le nombre total de rayons générés à partir de  $A_i$  [6].

$$F_{ij} = \frac{n}{N} \quad (3.32)$$

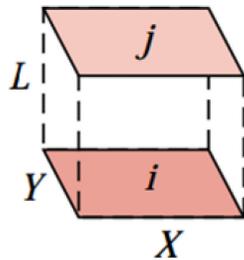
### 3.5 Validation

Afin de valider l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo, nous allons l'appliquer afin de calculer le facteur de forme pour deux cas de figure :

- ✓ Deux rectangles parallèles
- ✓ Deux rectangles perpendiculaires

#### Deux rectangles parallèles :

En développant l'équation (2.1), on obtient le facteur de forme  $F_{ij}$  pour cette configuration



**Figure 3.5 :** Facteur de forme pour deux rectangles parallèles alignés [1]

$$F_{ij} = \frac{2}{\pi\bar{X}\bar{Y}} \left\{ \ln \left[ \frac{(1+\bar{X}^2)(1+\bar{Y}^2)}{1+\bar{X}^2+\bar{Y}^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \bar{X}(1+\bar{Y}^2)^{1/2} \tan^{-1} \left[ \frac{\bar{X}}{(1+\bar{Y}^2)^{1/2}} \right] + \right. \\ \left. \bar{Y}(1+\bar{X}^2)^{1/2} \tan^{-1} \left[ \frac{\bar{Y}}{(1+\bar{X}^2)^{1/2}} \right] - \bar{X} \tan^{-1} \bar{X} - \bar{Y} \tan^{-1} \bar{Y} \right\} \quad (3.33)$$

Avec  $\bar{X} = \frac{a}{c\bar{Y}} = \frac{b}{c}$

Ensuite nous allons comparer les résultats obtenus avec la formulation analytique donnée par l'équation (2.1).

Pour calculer le facteur de forme en utilisant la méthode de Monte-Carlo. Pour cela, considérons les points d'émission sont calculés par

$$x_e = R_x \cdot (a) \quad (3.34)$$

$$y_e = R_y \cdot (b) \quad (3.35)$$

Les paramètres a et b représente respectivement la longueur et la largeur du rectangle,  $R_x$  et  $R_y$  sont des nombres aléatoires [19]. Les angles azimutal et polaire des faisceaux de photons émis sont obtenus par :

$$\varphi = 2\pi R_\varphi \quad (3.36)$$

$$\theta = \arcsin(\sqrt{R_\theta}) \quad (3.37)$$

Avec  $R_\varphi$  et  $R_\theta$  des nombres aléatoires

La distance c étant fixe, les points des faisceaux passant dans le plan de la surface 2 peuvent être évalués comme :

$$x = x_e + c \cdot \tan\theta \cdot \cos\varphi \quad (3.38)$$

$$y = y_e + c \cdot \tan\theta \cdot \sin\varphi \quad (3.39)$$

Ou  $\varphi$  est l'angle mesuré à partir de l'axe X positive,  $\theta$  est mesuré à partir de l'axe Z positive. La méthodologie utilisée pour le calcul des facteurs de forme est la suivante :

Si les coordonnées y et z sont dans la zone délimitée par la surface 2, les faisceaux de photons émis ont touché la surface 2, alors nous pouvons les comptabiliser [19]. Une fois que nous avons déterminé le nombre de faisceaux ayant touché la surface 2, nous pouvons calculer le facteur de forme par l'expression suivante :

$$F_{ij} = \frac{n}{total} \quad (3.40)$$

Avec :

$n$  : Le nombre de faisceaux ayant touché la surface 2.

$total$  : Le nombre de faisceaux émis.

Pour l'estimation de l'erreur en pourcentage entre la solution exacte et la solution de calculer par la méthode de Monte-Carlo, nous considérons l'équation suivante :

$$\text{Erreur} = \frac{F_{ij}(\text{numérique}) - F_{ij}(\text{analytique})}{F_{ij}(\text{analytique})} \times 100 \quad (3.41)$$

Pour la validation des facteurs de forme, les situations suivantes sont considérées :

Cas 1 : X= 1, Y = 1, Z=1

**Tableau 3. 3** : Facteur de forme : Deux rectangles parallèles alignés avec Z = 1

Cas 1 : Deux rectangles parallèles alignés	Résultats analytiques	Monte-Carlo	Erreur %
1000	0.1998	0.1870	-6.40
5000	0.1998	0.2016	0.90
10000	0.1998	0.2033	1.75
100000	0.1998	0.2005	0.35

Le tableau 3.3 représente les résultats obtenus du facteur de forme calculé par la méthode analytique ainsi que la méthode de Monte-Carlo, l'erreur diminue en augmenter le nombre de faisceaux émis pour chaque essai, cependant, pour un nombre faible d'émission, l'erreur

est d'environ 6.4%, ceci est dû aux paramètres aléatoires qui interviennent dans la méthode de Monte-Carlo.

Cas 2 :  $X=1$ ,  $Y=1$ ,  $Z=0.5$

**Tableau 3.4** : Facteur de forme : Deux rectangles parallèles alignés avec  $Z = 0.5$

Cas 1 : Deux rectangles parallèles alignés	Résultats analytiques	Monte-Carlo	Erreur %
1000	0.6320	0.6100	-3.48
5000	0.6320	0.6476	2.46
10000	0.6320	0.6403	1.31
100000	0.6320	0.6289	-0.49

Le tableau 3.4 représente le facteur de forme calculé par la méthode analytique et la méthode de Monte-Carlo, dans cette configuration, les deux rectangles sont plus proches  $Z=0.5$ , le résultat obtenu montre que l'erreur entre les deux méthodes est de 3.48%.

Cas 3 :  $X=1$ ,  $Y=1$ ,  $Z=0.1$

**Tableau 3.5** : Facteur de forme : Deux rectangles parallèles alignés avec  $Z = 0.1$

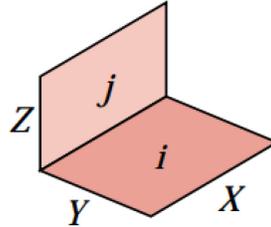
Cas 1 : Deux rectangles parallèles alignés	Résultats analytiques	Monte-Carlo	Erreur %
1000	0.9804	0.9820	0.16
5000	0.9804	0.9752	-0.53
10000	0.9804	0.9798	-0.06
100000	0.9804	0.9810	0.06

Le tableau 3.5 représente les résultats obtenus par la méthode de Monte-Carlo comparés à la méthode analytique, dans ce cas de figure, la distance entre les deux plaques rectangulaires alignées est de  $Z=0.1$ , on remarque que plus le nombre de faisceaux émis

augmente, plus la méthode de Monte-Carlo est efficace avec une erreur de 0.53% aux derniers essais.

**Deux rectangles perpendiculaires :**

En développant l'équation (2.1), on obtient le facteur de forme  $F_{ij}$  pour cette configuration :



**Figure 3. 6 : Deux rectangles perpendiculaires**

$$\begin{aligned}
 F_{ij} = \frac{1}{\pi W} & \left( W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{W} - (H^2 + W^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{1}{(H^2 + W^2)^{1/2}} \right. \\
 & + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1 + W)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left[ \frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(W^2 + H^2)} \right]^{W^2} \right. \\
 & \left. \left. \times \left[ \frac{H^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + H^2)(W^2 + H^2)} \right]^{H^2} \right\} \right) \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

avec  $H = \frac{Z}{X}$  ;  $W = \frac{Y}{X}$

Dans cette partie, nous allons calculer le facteur de forme avec la méthode de Monte-Carlo, puis nous allons comparer les résultats obtenus avec la formulation analytique donnée par l'équation (2.1).

Les résultats obtenus dans le cas de la validation, pour la situation où  $Z = 1, Y = 1, X=1$ , sont présenté dans le tableau 3.6 :

**Tableau 3. 6 : Facteur de forme : Deux rectangles perpendiculaires**

<b>Cas 2 : Deux rectangles perpendiculaires</b>	<b>Résultats analytiques</b>	<b>Monte-Carlo</b>	<b>Erreur %</b>
1000	0.2000	0.2120	6
5000	0.2000	0.2002	0.1
10000	0.2000	0.1959	-2.05
100000	0.2000	0.1960	-2

Dans le Tableau 3.6, on remarque que pour 1000 faisceaux émis, l'erreur est de 6% tandis que pour 5000 faisceaux, elle diminue à 0.1%, ceci est dû aux termes aléatoires qui sont impliqués dans la méthode Monte-Carlo, si le nombre de faisceaux émis est faible, les résultats peuvent converger ou diverger à chaque tentative, en augmentant le nombre de faisceaux émis, l'erreur se stabilise aux environs de 2%, ce qui est raisonnable et attendu dans cette étude.

## CHAPITRE 4

### NOTIONS D'OPTIMISATION COMBINATOIRE

Dans cette étude, nous allons modéliser le problème de la répartition des énergies reçues par la feuille thermoplastique à l'aide d'un problème d'optimisation combinatoire [20].

**Définition :** Un problème d'optimisation combinatoire est un problème dont il faut optimiser une fonction objective sur un ensemble de solutions dont la taille est très grande.

Le problème d'optimisation combinatoire est donc un problème pour lequel une solution optimale existe de ce fait. Seulement, comme l'ensemble de solutions est important, son énumération complète devient prohibitive, même pour des instances modestes. Il est donc essentiel de concevoir des méthodes algorithmiques qui atteignent la solution optimale en un temps raisonnable.

Le principe de la résolution d'un problème d'optimisation combinatoire est de choisir une meilleure solution parmi un ensemble fini de solutions. Autrement dit, cela revient à chercher un optimum pour une fonction objective, avec ou sans contraintes, sur un ensemble fini de possibilités. Pour trouver la solution du problème dans un laps de temps acceptable, la méthode de résolution doit être choisie judicieusement. Pour adapter une meilleure stratégie de résolution, l'étude de la complexité du problème d'un point de vue algorithmique est incontournable. Une classification des problèmes d'optimisation combinatoires selon leur difficulté de résolution à mener à plusieurs classes de complexité, dont les plus importantes, est comme suit [20]:

- La classe des problèmes dont la résolution nécessite un temps d'exécution polynomial (classe P).
- La classe des problèmes NP-complets (NP-difficiles) dont la résolution connue actuellement nécessite un temps d'exécution exponentiel.

La grande différence entre les deux classes réside dans le temps nécessaire pour trouver une solution optimale du problème considéré. Pour la classe P, le temps requis pour déterminer une solution optimale est polynomial. Cependant, pour les problèmes de la classe NP-difficile, les méthodes exactes restent inefficaces devant les problèmes de grandes instances. Néanmoins cela ne va pas nous empêcher d'essayer de trouver une solution aux problèmes de cette classe. En effet, pour contourner cette difficulté, depuis une vingtaine d'années des techniques et des méthodes approchées ont été développées, telles que les heuristiques et les métaheuristiques [20]. Ces méthodes permettent de trouver une solution de bonne qualité au problème en un temps raisonnable sans garantie l'optimalité. Par ailleurs, il y a lieu de signaler que des développements pour affiner les méthodes dites exactes ont été également développés.

#### **4.1 Méthodes heuristiques et métaheuristiques**

Ces méthodes sont censées produire des solutions rapidement, mais, comme nous l'avons mentionné, ne garantissent pas l'obtention d'une solution optimale. Nous en distinguons deux approches :

##### *4.1.1 Heuristiques*

Une heuristique est un algorithme approché qui permet d'identifier, généralement en temps polynomial, donc en un temps rapide, au moins une solution réalisable. Généralement, une heuristique est conçue pour un problème particulier. Les heuristiques sont des méthodes qui génèrent des solutions à partir d'une solution partielle, pouvant être vides au départ, en ajoutant petit à petit des éléments, composant la solution complète, et ce, à l'aide de règles simples, jusqu'à ce qu'une solution complète soit obtenue. On les appelle *méthodes gloutonnes* ou *voraces*.

L'expérience montre que l'efficacité d'une heuristique dépend essentiellement du problème à résoudre.

Les algorithmes heuristiques de type vorace ont une caractéristique importante. Ils se prêtent souvent à une analyse mathématique. Cette analyse mesure la distance qui sépare

la solution optimale (que nous ne connaissons pas) à la valeur de la solution produite par cet algorithme. Cette distance peut être mesurée soit dans le pire cas, soit dans le cas moyen, dans le pire cas, nous essayons de borner supérieurement (ou inférieurement s'il s'agit d'un problème de maximisation) cette distance. Dans le cas moyen ou probabiliste, nous mesurons cette distance par le biais de l'espérance mathématique et de l'écart type.

#### 4.1.2 Métaheuristiques

Face aux difficultés rencontrées par les heuristiques pour avoir une solution réalisable de bonne qualité pour des problèmes d'optimisation difficiles, les métaheuristiques ont fait leur apparition. Les métaheuristiques se placent à un niveau plus général. Elles interviennent dans toutes les situations dont on ne connaît pas d'heuristique efficace pour résoudre le problème en question.

La plupart des métaheuristiques utilisent des processus aléatoires et itératifs comme un moyen d'exploration de l'espace de recherche, et faire ainsi face aux problèmes d'explosion combinatoire (*problèmes NP-difficiles*).

Notons qu'une métaheuristique peut être adaptée à différents types de problèmes, contrairement à une heuristique conçue pour un problème donné. Parmi les métaheuristiques les plus populaires, nous citons :

- Acceptation de seuil.
- Algorithme d'échantillonnage et d'épuration.
- Algorithme du grand déluge.
- Colonie de fourmis.
- Algorithmes génétiques.
- Algorithme par essaim de particules.
- Programmation par la logique de contraintes.
- Recherche harmonique.
- Recherche taboue.

- Recuit simulé.
- Réseaux de neurones.

Parmi ces méthodes, nous avons choisi une approche ayant clairement démontré sa performance dans de nombreux domaines d'application, le recuit simulé [21] qui est couramment utilisé depuis plus de 25 ans.

## 4.2 Recuit simulé

La méthode de recuit simulé s'inspire du processus de recuit physique. Ce processus utilisé en métallurgie pour améliorer la qualité d'un solide. [21]

En effet, le processus consiste à fixer la température à laquelle le solide est devenu liquide, la phase de refroidissement conduit la matière liquide à retrouver sa forme solide par une diminution progressive de la température. Chaque température est maintenue jusqu'à ce que la matière trouve un équilibre thermodynamique. L'état final du système dépend essentiellement du paramètre température :

- Si la température est abaissée progressivement le système atteint son optimum, cette technique est celle du recuit.
- Si la température est abaissée trop rapidement le système s'arrêterait au premier minimum local trouvé, cette la technique de la trempe.
- Si la température tend vers zéro, seules les transitions d'un état à un état d'énergie plus faible sont possibles.

Pour simuler cette évolution d'un système physique vers son équilibre thermodynamique à une température  $T$ , la méthode du recuit simulé exploite l'algorithme de *Métropolis*.

Le principe général de la méthode est d'éviter des optimaux locaux par acceptation de déplacement de détérioration de la fonction des coûts. La technique du *Recuit Simulé* est comme suit : choisir au hasard une solution  $\acute{s}$  dans  $N(s)$ . Cette solution voisine à  $s$  est acceptée comme nouvelle solution courante si elle meilleur que  $s$ . Dans le cas contraire,  $\acute{s}$  n'est acceptée comme nouvelle solution courante qu'avec une certaine probabilité. Si  $\acute{s}$  est

refusée, une nouvelle solution est tirée au hasard dans  $N(s)$ , et ainsi de suite. Le processus s'arrête lorsque la solution  $s$  n'a plus été modifiée depuis un certain temps. La probabilité d'accepter une solution voisine  $\acute{s}$  avec  $f(\acute{s}) > f(s)$  comme nouvelle solution courante, diminue avec le temps.

Techniquement, on part avec une solution notée  $s_0 \in S$  initialement générée de manière aléatoire dont correspond une énergie initiale  $E_0$ , et une température initiale  $T_0$  généralement élevée. A chaque itération de l'algorithme, on passe de la solution courante  $s$  à une autre solution  $\acute{s}$  qui est dans son voisinage  $N(s)$  cette modification fait varier l'énergie du système donnée par  $\Delta E = f(\acute{s}) - f(s)$ .

- Si  $\Delta E < 0$  : alors la nouvelle solution est acceptée, elle améliore la fonction objective, et permet de diminuer l'énergie du système.
- Si  $\Delta E \geq 0$  : alors la solution trouvée est moins bonne que la précédente alors elle sera acceptée avec une probabilité  $P$  calculée suivant la distribution de Boltzmann donnée par :

$$P(E, T) = \exp^{-\frac{\Delta E}{T}}. \quad (4.1)$$

Cette probabilité est comparée à un nombre  $e$  généré aléatoirement compris entre 0 et 1 comme suit :

- Si  $P(E, T) \leq e$  : la nouvelle solution est acceptée.
- Si  $P(E, T) > e$  : la nouvelle solution est refusée.

L'interprétation du critère de Metropolis :

- Si  $\Delta E < 0$ , alors  $P(E, T) > 1$  : donc  $e$  est toujours inférieur à cette valeur, donc on accepte la solution  $\acute{s}$  (la solution  $\acute{s}$  est meilleure que  $s$ ).
- Si  $\Delta E > 0$ , on a deux cas :
  - Si  $P(E, T) \cong 1$ , alors  $T$  est très grand donc toute solution voisine de  $\acute{s}$  est acceptée (bien que la solution  $\acute{s}$  soit plus « mauvaise » que  $s$ ).

- Si  $P(E, T) \cong 0$ , alors  $T$  est très petit donc une dégradation a peu de chances d'être acceptée et on refuse  $s$ .

On peut résumer la méthode de recuit simulé dans les étapes suivantes [22]:

1. Générer aléatoirement une solution initiale  $S_0$  et l'ensemble  $S \leftarrow S_0$ .
2. Initialise l'ensemble de température  $T = T_{int}$  et vitesse de refroidissement  $c$  ( $0 \leq c \leq 1$ ).
3. Initialisé  $U=0$  et  $V=0$  avec  $U$  représente le nombre de pas de boucle interne, et  $V$  compte le nombre de succès.
4. Tant que ( $T > T_{min}$ )
  - a- Créer une nouvelle solution  $s$  de l'espace de voisinage et mettre  $\Delta S = s - S$ .
  - b- Si  $\Delta S > 0$  alors accepter la nouvelle solution (c-à-d,  $s \leftarrow S$ ) et définir  $V = V+1$ .
  - c- Si  $\Delta S \leq 0$  alors accepter la nouvelle solution avec une probabilité  $\exp(\Delta S/T)$  et  $V = V+1$ .
  - d- Si  $V = V_{max}$  aller à l'étape f
  - e- L'ensemble  $U = U + 1$  et si  $U < U_{max}$ , aller à l'étape a (Répétez l'opération pour la température actuelle)
  - f- La nouvelle température est  $T = c \times T$ .
  - g- Fin de tant que

Le chauffage de la feuille thermoplastique est principalement effectué par rayonnements infrarouges incidents à la surface de la feuille. Nous supposons dans un premier temps que les fluctuations de températures sont principalement causées par ce flux radiatif. Le milieu qui sépare la feuille thermoplastique et les éléments chauffants est considéré comme un milieu transparent. La convection entre le milieu ambiant et la surface inférieure (respectivement supérieure) de la feuille est négligeable. L'intensité radiative émise par la

surface de la feuille est négligeable. Dans ces conditions, les échanges thermiques à la surface d'une zone de feuille se réduisent au flux radiatif incident donné par l'équation (3.6).

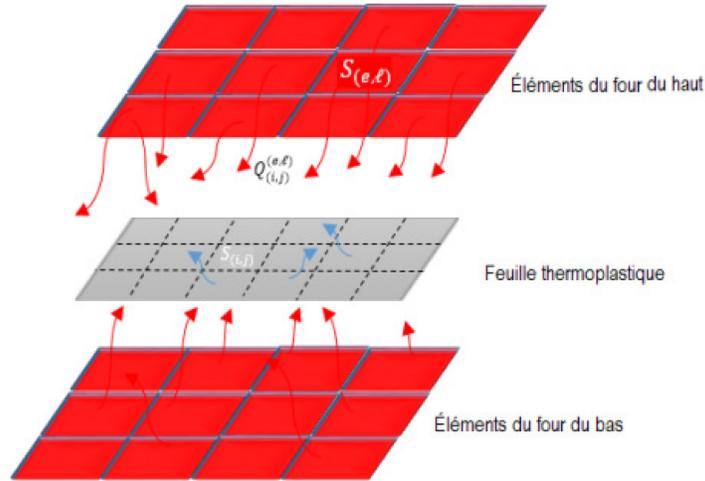
Lors du chauffage de la feuille, la zone située au centre va recevoir plus de chaleur par rapport à ses bords. Pour contrôler les fluctuations du flux radiatif à la surface de la feuille, l'approche est de minimiser les écarts d'énergies entre les zones de cette feuille. Pour mettre cette idée sous forme d'un modèle d'optimisation, nous procédons comme suit.

Lors du chauffage de la feuille, il est évident que la zone centrale va recevoir plus de chaleur par rapport à ses bords. Pour contrôler les fluctuations du flux radiatif à la surface de la feuille, l'idée est de minimiser les écarts d'énergies entre les zones de cette feuille.

Pour mettre cette idée sous forme d'un modèle d'optimisation, nous procédons comme suit

La surface de la matière thermoplastique est subdivisée en petites surfaces élémentaires 97 simples. Ainsi, la surface de la feuille thermoplastique est discrétisée en  $n = n_1 \times n_2$  zones de surface  $S_{(i,j)}$ ,  $i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2$  disposées en matrice de dimension  $(n_1, n_2)$ .

D'autre part, nous supposons que le four possède un ensemble  $m$  éléments chauffants, disposés en matrice de dimension  $(m_1, m_2)$  avec bien entendu  $m = m_1 \times m_2$  sur sa partie supérieure et inférieure, respectivement. Chaque élément est constitué d'une plaque en céramique de surface  $S_{(e,l)}$ ,  $e = 1, \dots, m_1; l = 1, \dots, m_2$ , recevant une température de l'ensemble  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$



**Figure 4. 1 :** Disposition des éléments du four [3]

La quantité de flux d'énergie reçue par une zone  $(i, j)$  de la feuille est donnée par  $Q_{(i,j)}^{(e,l)}$

Cette quantité d'énergie est calculée selon la température  $T_{(e,l)}$  de chaque élément chauffant du four (voir Figure (4.1)). La quantité de rayonnements sortant de l'élément de surface  $S(e,l)$  et atteignant la zone de surface  $S(i,j)$  est donnée par :

$$Q_{(i,j)}^{(e,l)} = F_{(i,j)}^{(e,l)} \frac{S_{(e,l)}}{S_{(i,j)}} \bar{\epsilon} \sigma T_{(e,l)}^4, \quad (4.2)$$

$F_{(i,j)}^{(e,l)}$  représente le facteur de forme correspondant aux surfaces  $(i, j)$  et  $(e, l)$ .

$T_{(e,l)}$  représente la température de l'élément chauffant  $(e, l)$ .

$\bar{\epsilon}$  représente l'émissivité de la source moyenne.

$\sigma$  est la constante de Boltzman de valeur  $5.669 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

Chaque zone de la feuille thermoplastique reçoit un flux radiatif de tous les éléments du four. La quantité d'énergie reçue par une zone  $(i, j)$  est comme suit [3]:

$$C(i, j) = \sum_e \sum_l Q_{(i,j)}^{(e,l)} \quad (4.3)$$

Pour formuler notre problème sous forme d'un programme mathématique en nombres entiers, nous procédons comme suit :

Un élément chauffant (e, l) ne peut recevoir de l'ensemble des températures qu'une seule température. Une température peut être assignée à plusieurs éléments du four. Autrement dit, si nous introduisons la variable de décision  $x_{e,l}^k$  définie comme suit :

$$x_{e,l}^k = \begin{cases} 1 & \text{si la température } \tau_k \text{ de } \tau \text{ est affectée à l'élément chauffant (e, l) du four,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, pour une température  $\tau_k$  affectée à l'élément (e, l) du four, la quantité de flux radiatif reçue par la zone (i, j) de la feuille est comme suit [3]:

$$Q_{i,j}^{e,l,k} = F_{(i,j)}^{(e,l)} \frac{S_{(e,l)}}{S_{(i,j)}} \bar{\epsilon} \sigma \tau_k^4 \times x_{e,l}^k \quad (4.4)$$

L'énergie totale reçue par une zone (i, j) de la feuille à partir de tous les éléments du four est comme suit [3]:

$$Q_{i,j} = \sum_{e=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} Q_{i,j}^{e,l,k} \quad (4.5)$$

$$k \in \{1, \dots, p\}$$

Cette quantité d'énergie reçue par chaque zone de la feuille dépend des températures assignées aux éléments du four, ainsi que de la position de la zone de la feuille par rapport aux éléments du four.

La fonction objective que nous avons choisie, comme indicateur de la meilleure distribution d'énergie captée par les cellules de la feuille thermoplastique, est celle qui minimise les écarts entre l'énergie reçue par une cellule et la moyenne des énergies reçues par l'ensemble des cellules de la feuille chauffée. Étant donnés  $n_1$  et  $n_1$ , respectivement,

le nombre de zones de la feuille en longueur et en largeur, la formulation mathématique de ce problème est alors comme suit [3]:

$$\min f(Q_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (Q_{i,j} - \bar{q})^2} \quad (4.6)$$

La quantité  $Q_{i,j}$  désigne l'énergie reçue par la zone (i, j) de la feuille thermoplastique donnée par l'équation (4.5).

Le paramètre  $n = n_1 \times n_2$  représente le nombre de cellules de la feuille thermoplastique.

La quantité  $\bar{q}$  représente la moyenne des flux d'énergie reçus par la feuille à thermoformer. Elle est donnée par la formule suivante [3] :

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} Q_{i,j} \quad (4.7)$$

En plus de cette fonction objective, nous avons inclus trois contraintes au modèle. La première est liée aux choix des températures des éléments du four. En effet, la température  $\tau_k$  d'un élément chauffant (e, l) doit être nécessairement choisie de l'ensemble,  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ , de températures. La contrainte s'écrit comme suit :

$$\tau_k = \tau; k = 1, \dots, p \quad (4.8)$$

La seconde contrainte concerne le fait qu'un élément chauffant (e, l) ne peut recevoir de l'ensemble des températures qu'une seule température. Elle est exprimée comme suit [3]:

$$\sum_{k=1}^q x_{e,l}^k = 1; e = 1, \dots, m_1, l = 1, \dots, m_2 \quad (4.9)$$

La troisième contrainte concerne les températures de l'ensemble  $\tau$ . Chacune de ces températures ne peut être utilisée plus de  $m_1 \times m_2$  fois. Son expression est alors comme suit [3]:

$$\sum_{e=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} x_{e,l}^k \leq m_1 \times m_2; k = 1, \dots, p \quad (4.10)$$

Le modèle d'optimisation que nous obtenons est donc comme suit [3]:

$$\min f(Q_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (Q_{i,j} - \bar{q})^2} \quad (12)$$

Sous les contraintes suivantes :

1.  $\sum_{k=1}^q x_{e,l}^k = 1; e = 1, \dots, m_1, l = 1, \dots, m_2$
2.  $\sum_{e=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} x_{e,l}^k \leq m_1 \times m_2; k = 1, \dots, p$
3.  $\tau_k \in \tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}; k = 1, \dots, p$

# CHAPITRE 5

## OPTIMISATION MÉTAHEURISTIQUE : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

### 5.1 Validation : Cas d'une structure thermoplastique plane

#### 5.1.1 Validation sans optimisation: Cas d'une structure thermoplastique plane

L'optimisation du chauffage en thermoformage pour une plaque thermoplastique a déjà été élaborée dans l'article [4]. Dans cette partie, nous allons comparer nos résultats avec ceux obtenus dans l'article [14]. Pour cela, nous considérons les mêmes données géométriques et thermophysique. Les paramètres du four ainsi que du matériau sont définis dans le tableau suivant :

*Tableau 5. 1 : Paramètre et configuration du four [14].*

Dimension de la plaque	500 x 500 mm <sup>2</sup>
Épaisseur de la plaque	3.0 mm
Dimension de la plaque chauffante supérieur	500 x 500 mm <sup>2</sup>
Dimension de la plaque chauffante inférieur	500 x 500 mm <sup>2</sup>
Distance initiale entre la plaque et le four supérieur	500 mm
Distance initiale entre la plaque et le four inférieur	500 mm
Maillage plaque chauffante supérieur	6x6
Maillage plaque chauffante inférieur	6x6
Température initiale de la plaque	20 °C
Temps de chauffage	20 sec
Émissivité	0.7

Deux cas ont été considérés dans l'article [14]., avec les températures du four suivantes :

**Tableau 5. 2 :** Distribution arbitraire des températures du four : cas 1 [14]

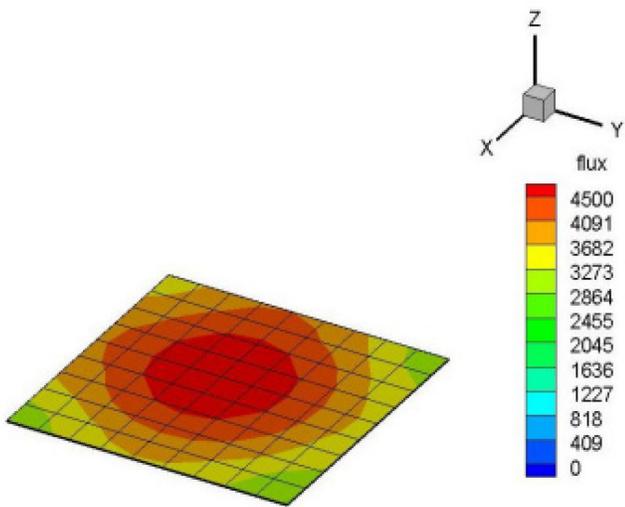
<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	500	600	700	800	900	400
2	400	600	550	700	620	900
3	400	500	800	900	400	480
4	400	700	440	850	420	600
5	530	500	640	730	530	730
6	500	700	720	550	400	400

**Tableau 5. 3 :** Distribution arbitraire des températures du four : cas 2 [14]

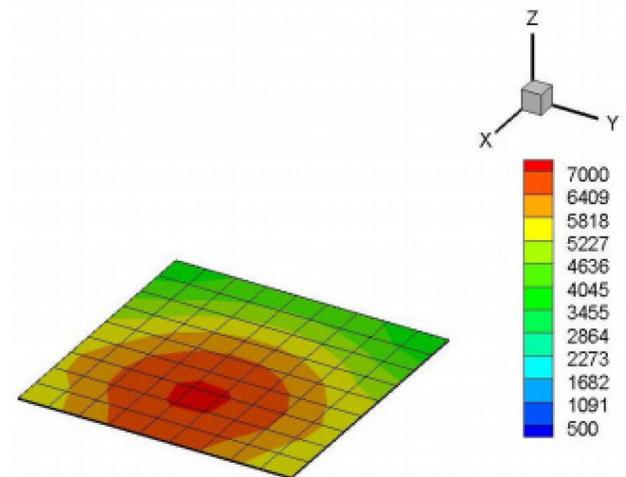
<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	420	400	410	400	490	490
2	520	505	520	510	590	560
3	600	600	600	610	630	640
4	700	700	700	780	765	710
5	830	800	800	850	830	830
6	900	910	920	950	950	990

Les résultats graphiques en flux et températures obtenus par l'article [14], sans optimisation, sont présentés dans les figures 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4.

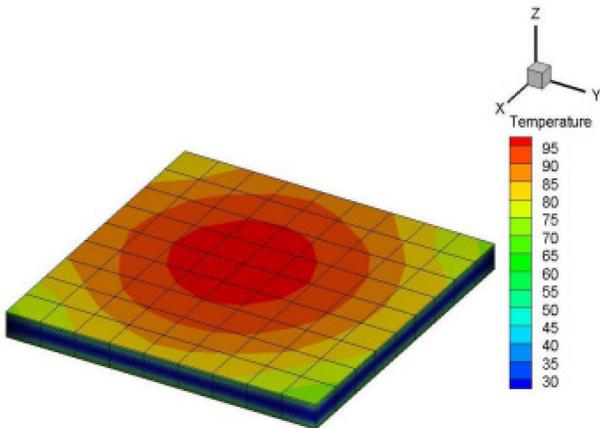
Les figures 5.1 et 5.2 sont relatives à la distribution des flux interceptés par la structure thermoplastique, induite par le rayonnement infrarouge, pour les deux cas respectifs. Les figures 5.1 et 5.2 sont relatives à la distribution des températures à la surface de la structure thermoplastique pour les deux cas. On constate que les distributions des flux interceptés et des températures à la surface du matériau sont asymétriques



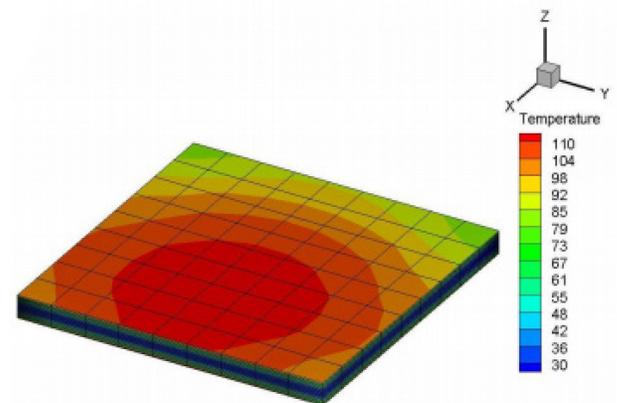
**Figure 5. 1** Flux intercepter par la feuille thermoplastique cas 1 [14]



**Figure 5. 2 :** Distribution de la température sans optimisation cas 1 [14]



**Figure 5. 4 :** Distribution de la température sans optimisation cas 1 [14]



**Figure 5. 3 :** Distribution de la température sans optimisation cas 2 [14]

Pour l'analyse qui suit, basée sur la méthodologie proposée et avec les mêmes considérations géométrique et thermophysique que celles présentées dans la référence [14], nos résultats sont présentés dans les tableaux ici-bas dans le cas des flux interceptés (pour les deux cas).

**Tableau 5. 4** Cas 1 flux intercepté sans optimisation

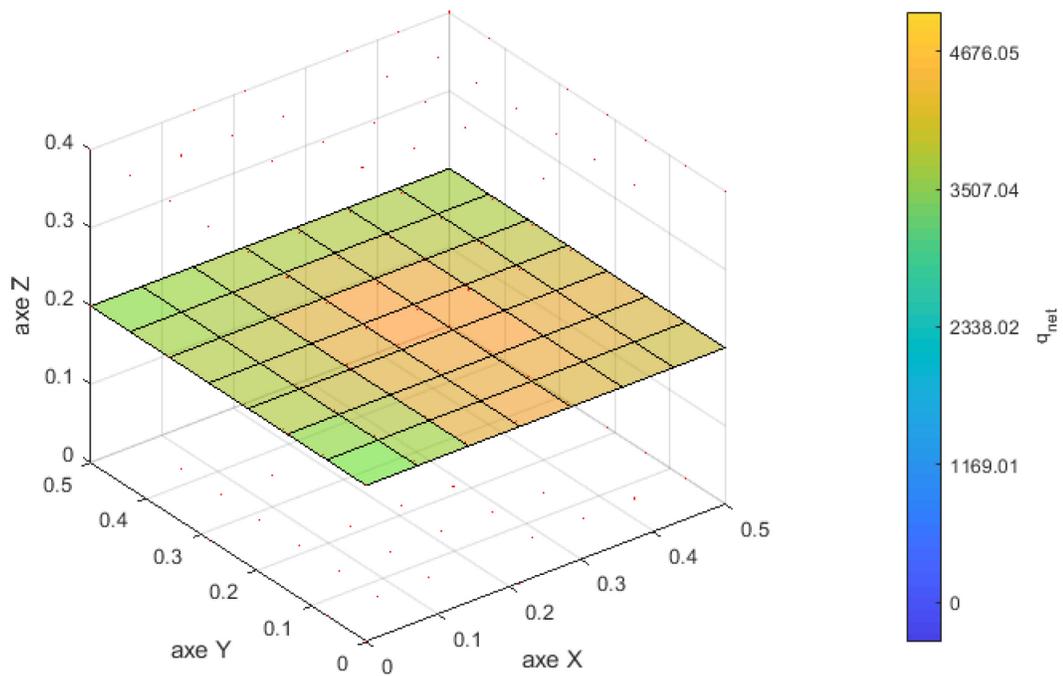
<i>i \ j</i>	1	2	3	4	5	6
1	3023,70	3939,87	4706,43	4274,38	4213,75	4028,37
2	3589,60	4424,83	4062,88	4521,19	4684,68	4341,72
3	3786,07	4244,31	4361,94	4898,83	4283,40	4262,29
4	3614,07	4023,93	4749,57	4693,83	4465,06	3988,52
5	3790,21	3900,02	4398,35	4499,28	4011,39	3742,68
6	3239,68	3636,42	3617,11	3681,63	3710,97	3560,25

**Tableau 5. 5** Cas 2 flux intercepté sans optimisation

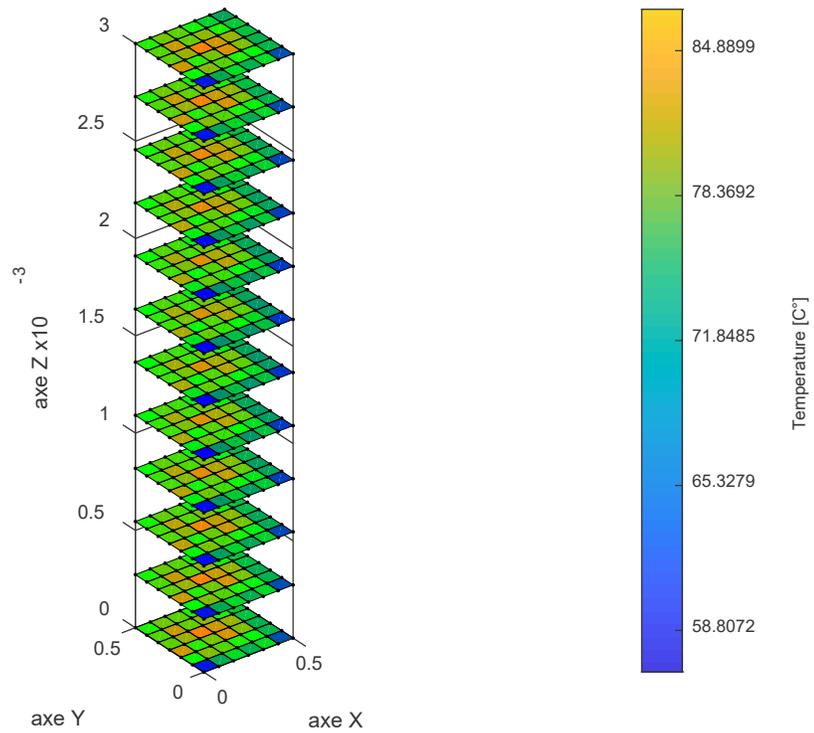
<i>i \ j</i>	1	2	3	4	5	6
1	3231,90	3959,32	4398,95	3973,24	4224,94	4234,17
2	4266,68	4641,83	4551,19	4844,97	4734,69	4371,43
3	5020,47	5420,05	5684,97	5877,11	5089,61	5122,09
4	4940,00	5755,00	6722,54	6163,79	6104,83	5396,47
5	5509,09	5981,50	6889,07	6889,07	5975,05	5265,47
6	4860,12	5866,05	5971,62	6097,31	6062,72	5664,46

On remarque que la distribution du flux sur la plaque thermoplastique, pour les deux cas, n'est pas homogène. En conséquence, l'emplacement des émetteurs du four ainsi que la valeur attribuer à un impact direct sur le flux intercepté à la surface.

Pour le premier cas, pour illustrer les résultats, on a représenté sur la figure 5.5 la distribution du flux intercepté sans optimisation et sur la figure 5.6 la distribution de la température, calculée numériquement à l'aide de la MEF, à travers de l'équation de chaleur 1D. On remarque que la variation de température est de l'ordre de 40 degrés suivant les différentes zones de la plaque thermoplastique.

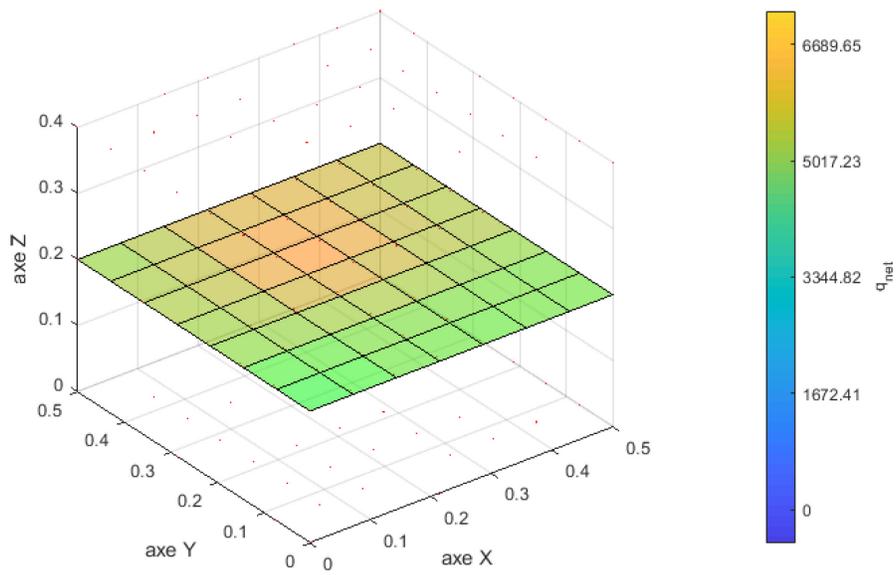


**Figure 5. 5 :** Cas 1 sans optimisation du flux

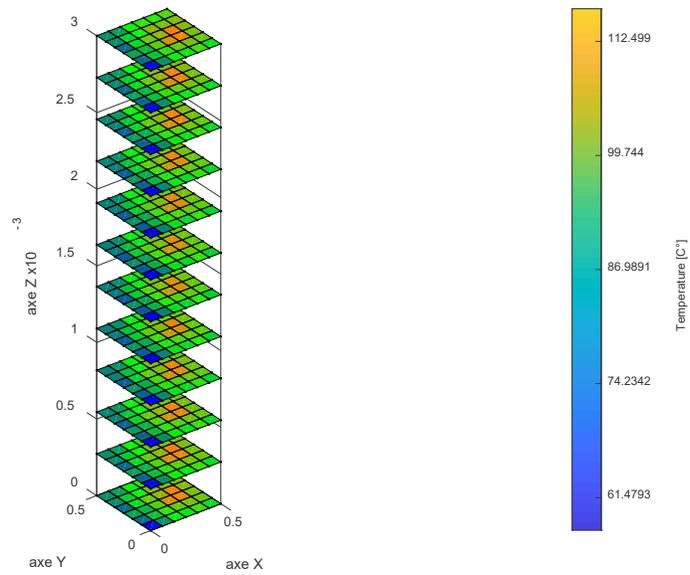


**Figure 5. 6 :** Cas 1 Conduction sans optimisation

Pour le deuxième cas, pour illustrer les résultats, on a représenté sur la figure 5.7 la distribution du flux intercepté sans optimisation et sur la figure 5.8 la distribution de la température, calculée numériquement à l'aide de la MEF, à travers de l'équation de chaleur 1D. On remarque que la variation de température est de l'ordre de 50 degrés suivant les différentes zones de la plaque thermoplastique.



**Figure 5. 7 :** Cas 2 Sans optimisation du flux



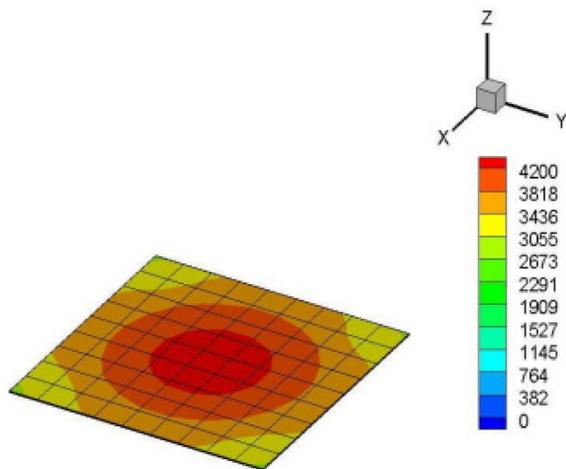
**Figure 5. 8 :** Cas 2 Conduction sans optimisation

Comme on peut le constater, l'approche utilisée reproduit adéquatement les résultats obtenus dans l'article [14] en reprenant les mêmes configurations et paramètres du four et de la plaque thermoplastique.

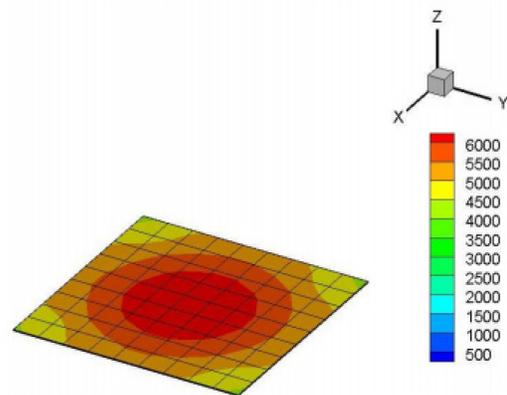
### 5.1.2 Validation avec optimisation: Cas d'une structure thermoplastique plane

Dans cette partie nous tenons compte de l'optimisation et nous confrontons nos résultats avec ceux obtenus dans la référence [14] dans le cas d'une structure thermoplastique plane. Les résultats graphiques obtenus par l'article [14], avec optimisation, sont illustrées dans les figures 5.9-5.12.

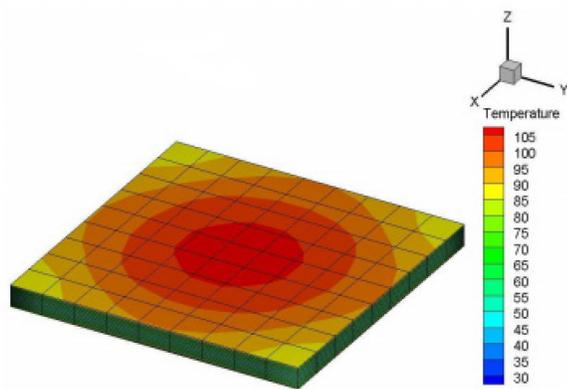
Les figures 5.9 et 5.10 sont relatives à la distribution des flux interceptés par la structure thermoplastique, induite par le rayonnement infrarouge, pour les deux cas respectifs. Les figures 5.11 et 5.12 sont relatives à la distribution des températures à la surface de la structure thermoplastique pour les deux cas. On constate que les distributions des flux interceptés et des températures à la surface du matériau sont symétriques



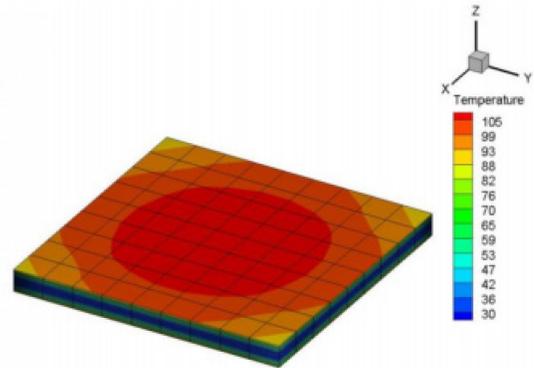
**Figure 5. 9** Flux intercepter par la feuille thermoplastique cas 1 avec optimisation [14]



**Figure 5. 10** Flux intercepter par la feuille thermoplastique cas 2 avec optimisation [14]



**Figure 5. 11** Distribution de la température avec optimisation cas 1 [14]



**Figure 5. 12** Distribution de la température avec optimisation cas 2 [14]

Pour l'analyse qui suit, basée sur la méthodologie proposée et avec les mêmes considérations géométrique et thermophysique que celles présentées dans la référence [14], nos résultats avec optimisation sont présentés dans les tableaux ici-bas dans le cas des flux interceptés (pour les deux cas).

Dans les tableaux 5.7 et 5.8, nous avons présentés les températures obtenues, dans la référence [14], après optimisation pour les cas étudiés. Dans les tableaux 5.9 et 5.10 nous avons présenté les températures obtenues par l'entremise de la méthodologie proposée dans ce travail. Les résultats sont presque similaires. La différence entre nos résultats et ceux fournis dans la référence [14] est, à notre avis, due au caractère aléatoire, d'une part, de l'approche métaheuristique et la méthode de Monte-Carlo.

**Tableau 5. 7 :** Température optimisée cas 1 [14]

<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	850	600	700	720	440	900
2	600	400	530	620	500	400
3	730	530	640	500	400	800
4	730	550	600	700	480	700
5	400	500	400	500	550	400
6	900	400	800	700	420	900

**Tableau 5. 8 :** Température optimisée cas 2 [14]

<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	990	600	830	850	630	920
2	505	600	520	520	420	800
3	830	640	610	800	590	700
4	830	400	780	600	400	910
5	710	490	410	700	510	490
6	950	560	900	700	765	950

**Tableau 5. 6 :** Température optimisée cas 1 (Matlab)

<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	850	610	750	730	430	950
2	580	400	530	650	500	390
3	700	520	630	490	400	850
4	720	540	620	700	500	650
5	400	550	400	530	550	450
6	900	450	750	700	450	850

**Tableau 5. 10 :** Température optimisée cas 2 (Matlab)

<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	850	610	750	730	430	950
2	580	400	530	650	500	390
3	700	520	630	490	400	850
4	720	540	620	700	500	650
5	400	550	400	530	550	450
6	900	450	750	700	450	850

**Tableau 5. 11** Cas 1 flux intercepté avec optimisation

<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	4080,50	4192,14	4296,47	4215,82	4208,21	4164,82
2	4202,00	4264,15	4255,041	4267,55	4277,24	4208,67
3	4217,95	4322,17	4327,82	4385,51	4259,08	4219,63
4	4204,57	4312,75	4412,69	4315,79	4298,08	4216,38
5	4192,49	4233,90	4339,05	4359,69	4207,48	4154,37
6	4114,89	4214,30	4211,95	4178,97	4206,26	4150,97

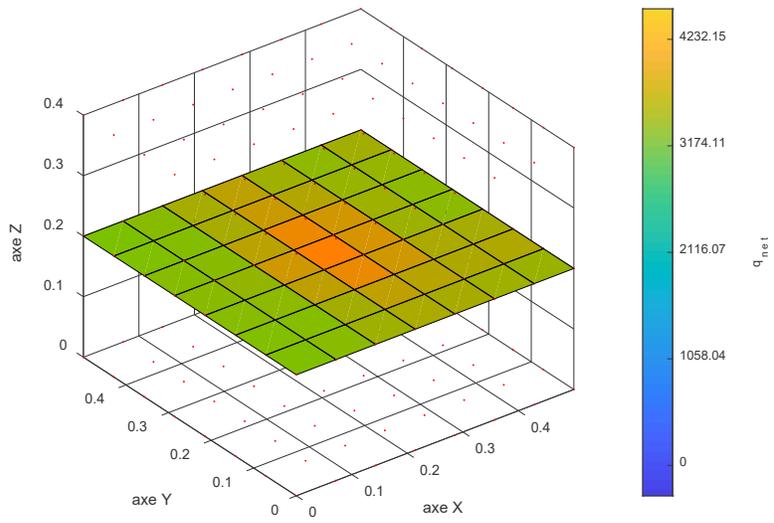
Du tableau 5.11, concernant le premier cas d'optimisation, on remarque une nette amélioration du flux intercepté par la plaque thermoplastique. Le flux est plus important au centre de la plaque qu'aux extrémités.

**Tableau 5. 12** Cas 2 flux intercepté avec optimisation

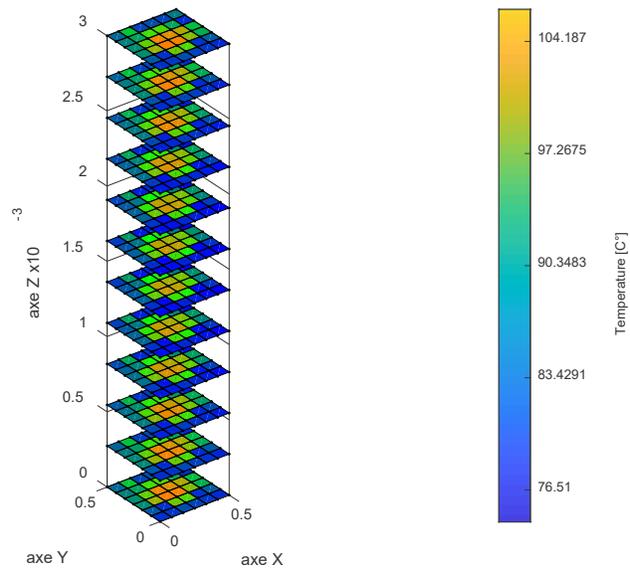
<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6
1	5628,46	5613,02	5596,84	5633,72	5625,07	5592,45
2	5623,10	5870,76	5960,72	5974,76	5881,16	5629,10
3	5636,79	6013,51	6021,00	6059,88	5964,31	5634,90
4	5626,37	6004,72	6077,56	6015,42	5995,13	5632,61
5	5618,27	5848,01	6025,93	6039,91	5829,11	5685,13
6	5685,26	5631,29	5630,15	5605,73	5624,50	5582,39

Le tableau 5.12 donne le flux intercepté par la plaque thermoplastique après optimisation, on remarque aussi que le flux est mieux réparti. Dans les deux cas, on constate une symétrie dans les résultats, avec une légère concentration du flux au centre qu'aux extrémités de la plaque.

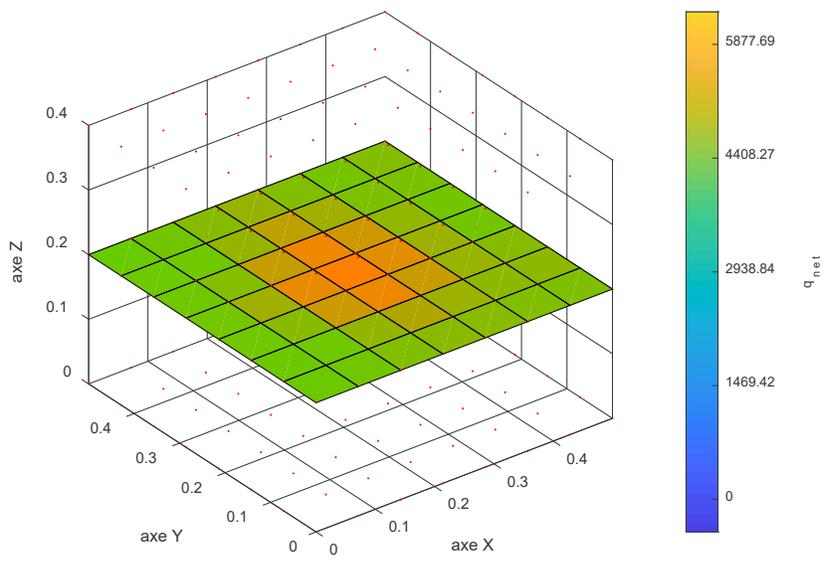
Pour illustrer les résultats, en flux et en température, obtenus pour les deux cas avec optimisation, on a présenté sur les figures 5.13 et 5.14, respectivement, les distributions des flux interceptés et des températures à la surface de la plaque thermoplastique pour le premier cas d'étude. Les figures 5.15 et 5.16 représentent, respectivement, les distributions des flux interceptés et des températures à la surface de la plaque thermoplastique pour le second cas. On remarque que l'écart de température entre le minimal et le maximal est réduit à 25° pour le premier cas et de 30 dans le second cas.



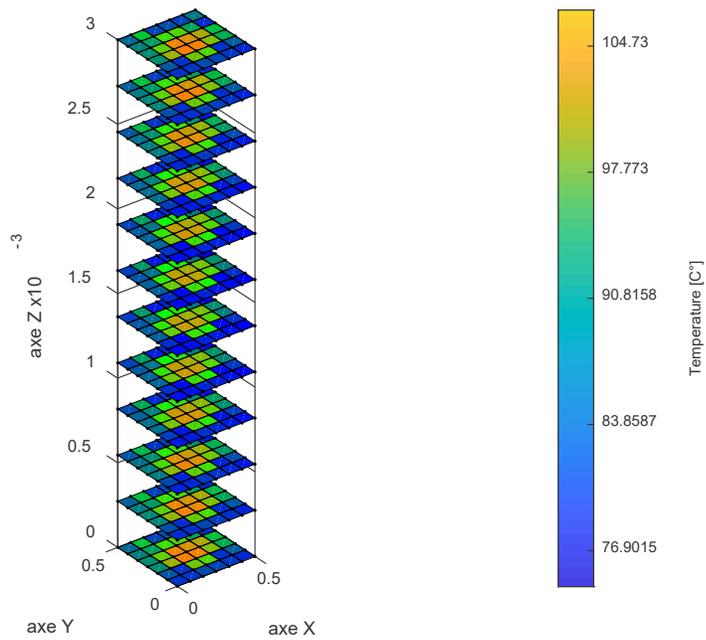
**Figure 5. 13 :** Cas 1 avec optimisation du flux



**Figure 5. 14 :** Cas 1 Conduction avec optimisation



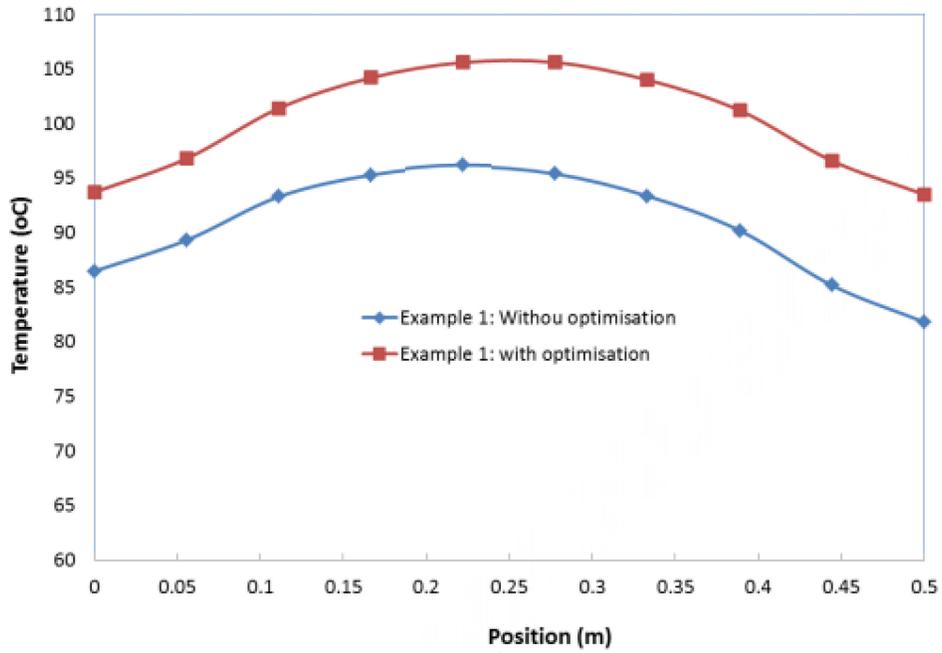
**Figure 5. 15 :** Cas 2 optimisations du flux



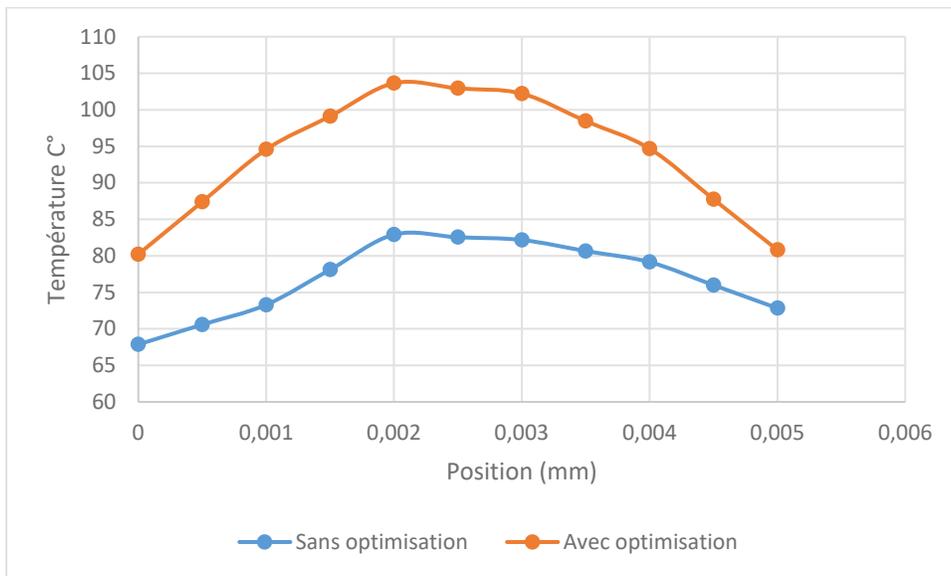
**Figure 5. 16 :** Cas 2 conductions avec optimisation

Selon les résultats obtenus, nous constatons que les distributions de l'énergie de rayonnement et de la température sont presque symétriques (ces distributions sont mieux réparties que dans le cas sans optimisation). En effet, même si les températures des différentes zones du four ne sont pas identiques, leur localisation, grâce à l'optimisation métaheuristique, est plus organisée. Par conséquent, la distribution de l'énergie de rayonnement interceptée par la feuille de plastique est mieux répartie que dans le cas sans optimisation. De même, la distribution de la température sur et à l'intérieur de la feuille, par rapport à la coordonnée normale  $z$ , est améliorée (presque symétrique).

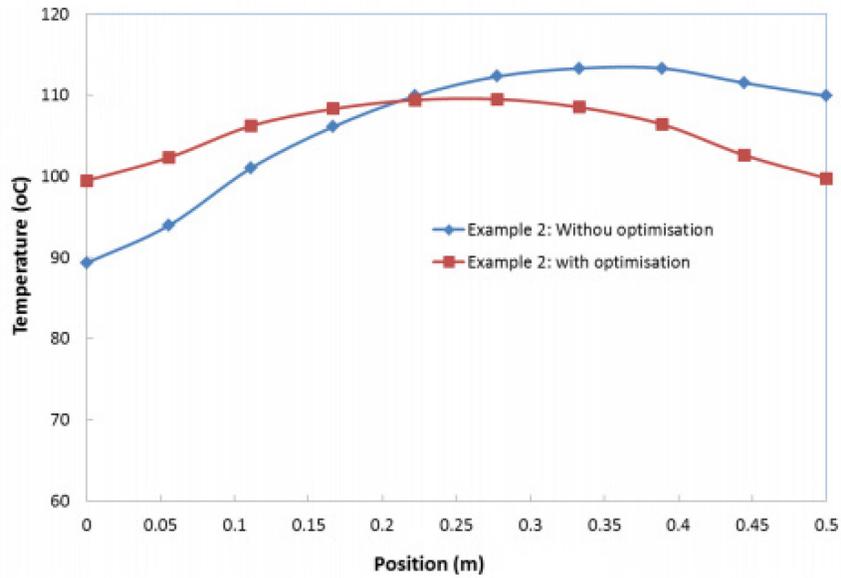
La figure 5.17 représente la distribution de la température, extraite de la référence [14], dans la direction normale de la feuille thermoplastique (à travers son épaisseur) pour le 1<sup>er</sup> cas et la figure 5.18 celle obtenue par notre approche. L'écart entre les différentes valeurs peut s'expliquer par l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo pour le calcul du facteur de forme, en comparaison avec la méthode analytique utilisé dans l'article [4], en effet celui-ci intervient dans le calcul du flux intercepté par la plaque thermoplastique, et donc dans la résolution de l'équation de chaleur 1D. Ainsi, que la méthode métaheuristique qui est basée sur une génération aléatoire de températures pour le four. La figure 5.19 représente la distribution de la température, extraite de la référence [14], dans la direction normale de la feuille thermoplastique (à travers son épaisseur) pour le 2<sup>ème</sup> cas et la figure 5.20 celle obtenue par notre approche par la MEF.



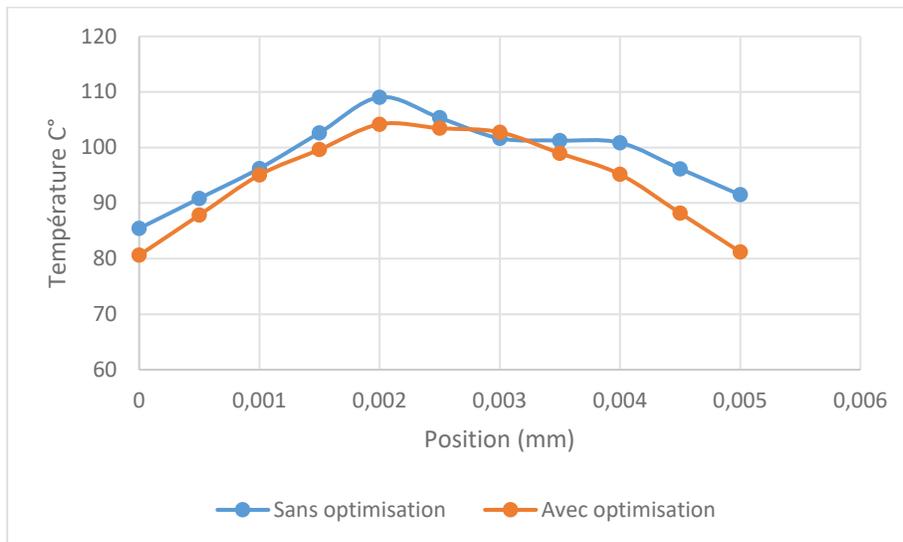
**Figure 5. 17 :** Distribution de la température cas 1 dans la direction 1 [14]



**Figure 5. 18 :** Distribution de la température cas 1 dans la direction de l'épaisseur



**Figure 5. 19 :** Distribution de la température cas 2 dans la direction de l'épaisseur [14]



**Figure 5. 20 :** Distribution de la température cas 2 dans la direction 1

On remarque de la figure 5.18 et 5.20 que la répartition de la température après optimisation est symétrique. L'écart type moyen par rapport à la moyenne est plus faible pour le cas optimisé comparé à celui du cas sans optimisation.

En conclusion, les résultats obtenus par notre approche pour les deux cas étudiés (sans et avec optimisation) sont similaires à ceux fournis dans la référence [14].

### 5.2 Application : cas d'une structure thermoplastique courbée

Dans cette partie, nous allons appliquer l'approche développée dans le cas d'une structure courbée sous l'effet de la gravité. La contrainte de résolution dans le cas de l'optimisation est le choix de la température du four. En effet pour un temps de chauffage donné, le matériau choisi doit rester dans la plage de thermoformage. Pour cela, nous avons varié la température du four entre 350 et 500 C°. La courbature de la structure est générée grâce à l'aide de la formule suivante (qui caractérise l'affaissement d'une membrane polymérique de type HDPE à température ambiante [23]):

$$Z(X, Y) = \frac{16\rho g}{\pi\sigma} * \frac{12(1-\nu^2)}{Ed^2} * \sum_{j=135}^n \sum_{k=135}^n \frac{\sin\left(\frac{j\pi X}{a}\right) * \sin\left(\frac{k\pi Y}{b}\right)}{jk\left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)^2} \quad (5.1)$$

avec

Masse volumique (Kg.)

$\sigma$  : Conductivité thermique W

$g$  : Gravité (N/Kg)

$\nu$  : Coefficient de poisson

Module de Young (Pa)

$d$  : Epaisseur de la plaque (m)

Soulignons que l'équation 5.1 décrit le courbe de fléchissement d'une structure polymérique (de type HDPE), causé par les forces de gravité, à la température ambiante. Aussi, il est opportun de souligner que l'affaissement de la structure dépend des paramètres du matériau qui varie en fonction de la température. L'application visée concerne

seulement cet état de déformation ; ce choix permettra de faciliter le passage vers une étude dynamique pour de futur travaux.

### 5.2.1 Application : cas d'une structure thermoplastique courbée sans optimisation

Pour l'analyse nous avons considéré la distribution des températures, sans optimisation, du four dans la table 5.12 suivante :

**Tableau 5. 7 :** Température des plaques du four

<b>i \ j</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	500	500	500	500	500	500
<b>2</b>	500	500	500	500	500	500
<b>3</b>	500	500	500	500	500	500
<b>4</b>	500	500	500	500	500	500
<b>5</b>	500	500	500	500	500	500
<b>6</b>	500	500	500	500	500	500

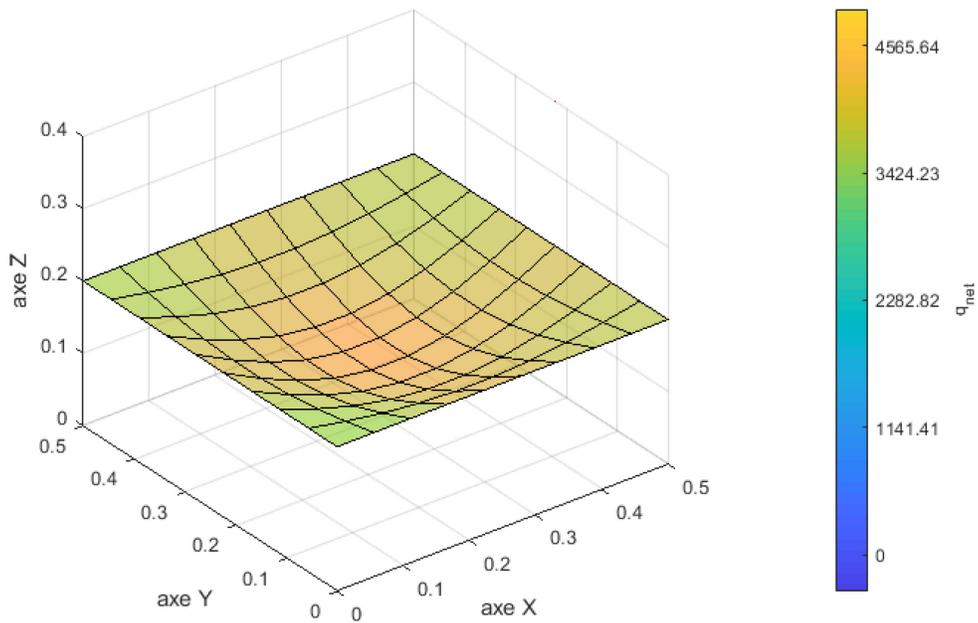
Les résultats obtenus des flux interceptés par la structure courbée sans est présenté dans le tableau 5.13.

**Tableau 5. 8** Flux intercepté par la structure courbée sans optimisation

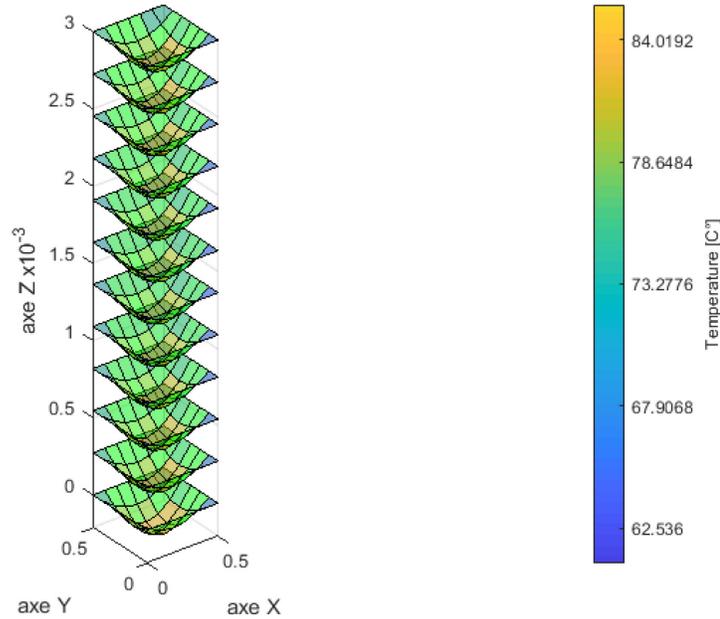
<b>i \ j</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	3314,23	3834,82	4465,13	4015,76	3922,73	3720,07
<b>2</b>	3960,97	4263,07	4135,67	4315,80	4344,77	4020,50
<b>3</b>	4074,30	4510,94	4616,79	4767,12	4172,66	4012,34
<b>4</b>	4006,20	4434,06	4833,09	4653,95	4397,31	3991,29
<b>5</b>	3989,20	4133,67	4592,09	4638,55	4029,40	3689,42
<b>6</b>	3495,10	4003,96	4004,68	3855,30	3944,22	3673,67

On remarque que le flux est concentré plus au centre de la structure qu'aux extrémités, ce résultat est attendu.

La figure 5.21 illustre la distribution du flux de chaleur intercepté par la structure courbée, on peut constater que le flux est concentré au centre de la structure. La figure 5.22 illustre la distribution de température à travers l'épaisseur de la structure courbée, ici on peut voir que l'écart de température est d'environ 22°.



**Figure 5. 21** : Structure courbée sans optimisation du flux



**Figure 5. 22 :** Conduction sans optimisation (Structure courbée)

**5.2.2 Application : cas d'une structure thermoplastique courbée avec optimisation**

**Tableau 5. 14:** Température après optimisation

<b>i \ j</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	493	361	381	466	487	467
<b>2</b>	394	372	447	467	390	384
<b>3</b>	398	474	473	435	435	392
<b>4</b>	454	469	416	416	419	391
<b>5</b>	451	485	486	462	389	453
<b>6</b>	369	368	378	371	437	361

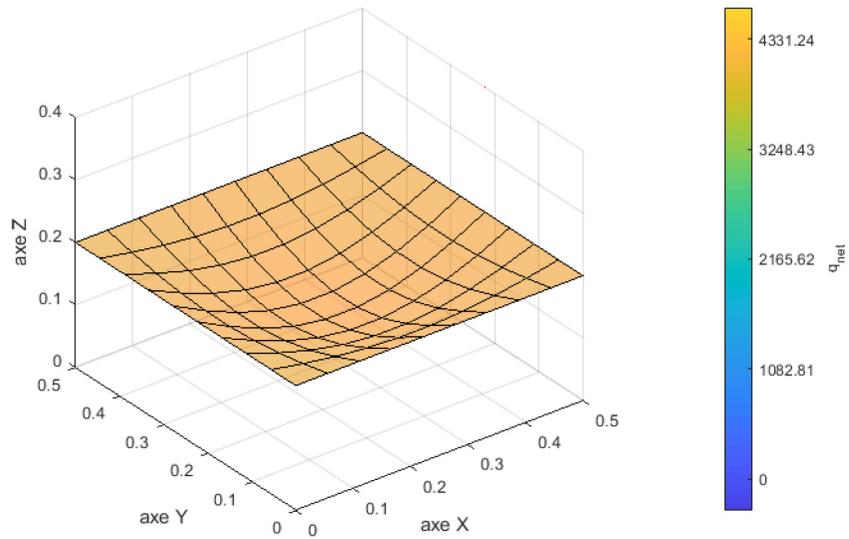
Tableau 5.14 présente les températures obtenues après optimisation. On remarque que contrairement au cas d'une plaque thermoplastique, l'optimisation de la température donne des résultats non symétriques pour le cas d'une structure courbée. Ceci peut s'expliquer par le fait que la distance entre les plaques du four et la structure courbée n'est pas

identique, comme celle de la plaque thermoplastique, l'attribution des températures de la plaque chauffante supérieur et inférieur est identique. L'algorithme utilisé pour l'optimisation dans ce cas précis doit tenir compte des attribuer des températures aux plaques supérieur et inférieur du four, tout en optimisant le flux intercepter par la structure courbée. Ceci permet de suggérer qu'une optimisation de la température de la plaque supérieur et inférieur devrais être faite séparément afin d'améliorer l'étape de chauffage.

**Tableau 5. 9** Flux intercepté par la structure courbée avec optimisation

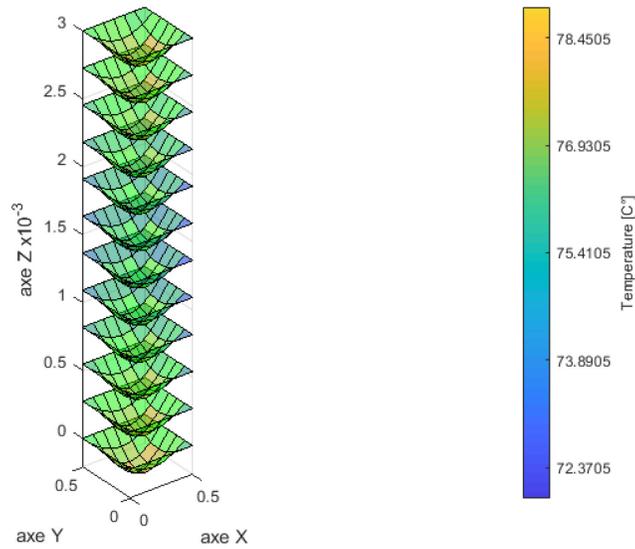
<i>i \ j</i>	1	2	3	4	5	6
1	4135,04	4196,99	4196,99	4215,90	4206,38	4182,52
2	4208,51	4244,11	4232,29	4248,99	4252,76	4214,39
3	4220,63	4274,16	4283,88	4306,04	4235,84	4215,46
4	4212,68	4265,90	4315,67	4284,72	4260,61	4213,55
5	4208,73	4227,99	4283,29	4290,96	4215,23	4178,08
6	4178,08	4213,64	4213,46	4195,89	4207,52	4176,06

Le tableau 5.15 contient le flux intercepté par la structure courbée après optimisation. On remarque une amélioration dans les valeurs obtenues, ainsi qu'une symétrie dans les résultats, toute fois, la concentration du flux au centre de la structure courbée persiste.



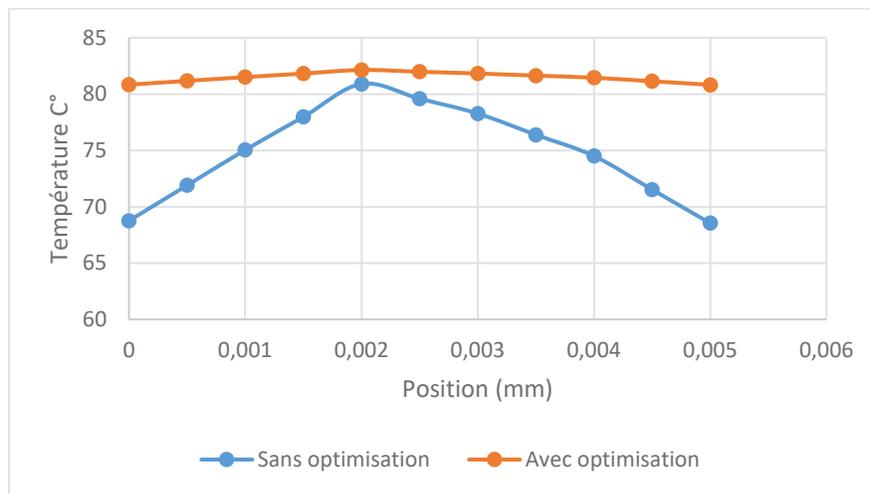
**Figure 5. 23 :** Flux avec optimisation (Structure courbée)

La figure 5.23 représente le flux intercepté par la structure courbée après optimisation, on peut voir que l'optimisation a permis de réduire l'écart entre les différentes zones de la structure.



**Figure 5. 24 :** Conduction avec optimisation (Structure courbée)

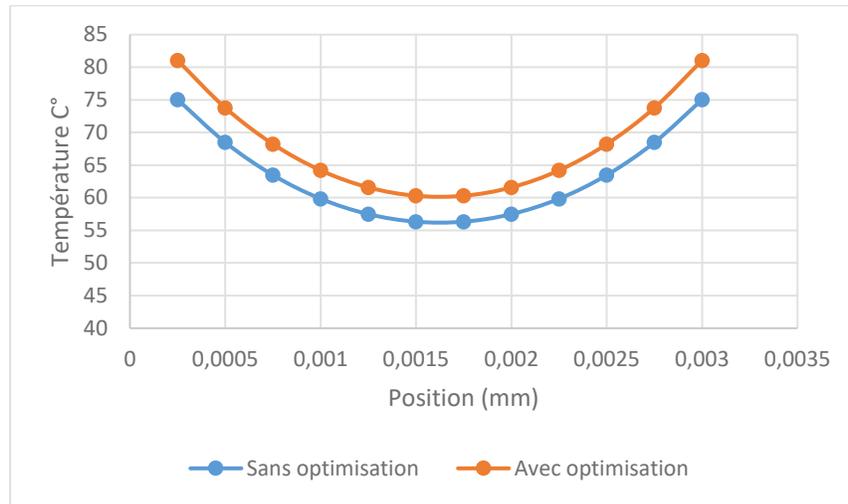
Dans la figure 5.24, la température à travers l'épaisseur de la structure courbée est présentée, on remarque que l'optimisation a permis de réduire l'écart de température à environs  $10^\circ$



**Figure 5. 25 :** Distribution de la température dans la direction 1

La figure 5.25 montre la distribution de la température sur la surface de feuille thermoplastique dans la partie se situant au centre, avant et après optimisation. On

remarque que sans optimisation, les différentes zones chauffantes ont une température qui varie de 12 degrés tant dit que la température après optimisation varie de  $\pm 4$  degrés. On constate que l'optimisation a eu un impact positif sur la répartition de température sur la surface de la structure courbée (l'écart type moyen par rapport à la moyenne est plus faible pour le cas optimisé comparé à celui du cas sans optimisation).



**Figure 5. 26 :** Distribution de la température dans la direction de l'épaisseur

La figure 5.26 représente la distribution de température à travers l'épaisseur pour l'élément de la zone situer au centre de la structure thermoplastique. On peut noter une augmentation de la température après optimisation, mais la répartition de la température à travers l'épaisseur n'est pas affectée par l'optimisation. Ceci peut s'expliquer par le choix de résolution par éléments finis 1D, chaque zone de la structure thermoplastique reçoit un flux a sa surface supposée constant, la résolution de l'équation de chaleur dans ce cas ne permet pas de montrer l'impact de l'optimisation dans ce cas précis.

# CHAPITRE 6

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

### 6.1 Conclusion

Dans ce travail, on s'intéresse, d'une part, à la conduction de la chaleur dans une feuille thermoplastique mince et, d'autre part, à l'optimisation de la quantité de chaleur reçue par une structure thermoplastique courbée à l'aide d'un algorithme méta-heuristique (Recuit Simulé). Pour le volet de la modélisation de la conduction thermique, on a considéré la méthode des éléments finis 1D avec validation pour deux types de matériaux : opaque et semi-transparent. Pour le calcul de flux intercepté par la structure thermoplastique, on a utilisé la méthode de Monte-Carlo avec validation pour plusieurs paires de configurations. Pour l'optimisation du flux intercepté, on a appliqué et validé l'algorithme Recuit Simulé pour le cas d'une surface plane. Ensuite, l'algorithme a été appliqué pour une surface courbée.

Pour l'optimisation de l'étape de chauffage, nous avons couplé les résultats des flux optimisés (déduites de l'optimisation pour le cas d'une surface courbée) à l'équation d'énergie. Les résultats obtenus sont satisfaisants en considérant que le facteur de forme est calculé avec la méthode probabiliste de Monte-Carlo, sans oublier que le terme conductif qui intervient dans l'équation de chaleur a été simplifié par l'hypothèse d'un milieu froid.

À titre de conclusion, les résultats obtenus sur la distribution de la température dans le thermoplastique dépendent largement du flux intercepté, d'où l'importance de l'optimisation thermique de l'étape de chauffage en thermoformage.

### 6.2 Recommandations

Dans ce projet, le modèle choisi pour cette étude peut-être amélioré, nous pouvons citer quelques recommandations :

- Une formulation de l'équation de chaleur en tenant compte du terme conductif.

- Une modélisation par élément fini 3D
- Une résolution dynamique : plaque qui s'affaisse sous l'effet de la gravité
- Une variation du maillage (forme, nombre)

Pour les travaux futurs, les améliorations citées précédemment pourront être appliquées et comparées avec une étude expérimentale afin de valider le modèle. Ces travaux permettront d'améliorer la qualité du produit, d'optimiser l'énergie utilisée pour le chauffage, réduire les pertes au contrôle qualité, ce qui répond aux questions d'actualité en termes d'optimisation de coût et de l'environnement en réduisant la consommation d'énergie.

## Références

- [1] j.-f. Agassant et J.-M. Haudin, Mise en forme des polymères thermoplastiques, 2ème édition éd., Paris: Dunod, 2007, pp. 53-110.
- [2] F. Erchiqui, N. Nahas, M. Nourelfath et M. Souli, «Metaheuristic algorithms for optimisation of infrared heating in thermoforming process,» *International Journal of Metaheuristics*, vol. 1, n° 13, pp. 199-221, 2011.
- [3] K. Bachir-Cherif, Thèse de doctorat, «Optimisation de l'étape de chauffage infrarouge», Université du Québec à Chicoutimi, Canada, 2019.
- [4] F.Erchiqui, «Application of genetic and simulated annealing algorithms for optimization of infrared heating stage in thermoforming process», *Applied Thermal Engineering*, Vol. 128, pp. 1263-1272, 2018.
- [5] M. Shelby, «Effects of Infrared Lamp Temperature and Other Variables on the Reheat Rate of PET,» *Annual Technical Conference - ANTEC, Conference Proceedings*, vol. 37, pp. 1420-1424, Shelby, M.D., 1991.
- [6] H. Ibrahime, «Modélisation de l'étape de chauffage infrarouge des biocomposites de type pet- chanvre en thermoformage», Thèse de doctorat, Université du Québec à Chicoutimi, 2016.
- [7] F. Steward et P. CANNON, «The calculation of radiative heat flux in a cylindrical furnace using the Monte Carlo Method,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 14, pp. 245-262, 1971.
- [8] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. Bergman et A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and mass transfer*, John Wiley & Sons, 2006.
- [9] F. Erchiqui et G. D. Ngoma, «Analyse comparative des méthodes de calcul des facteurs de formes,» *International Journal of Thermal Sciences*, Vol.46, No.3, pp. 284-293, 2007.
- [10] J. R. A Howell, «The Monte Carlo Method in Radiative Heat Transfer,» *Journal of Heat Transfer*, vol. 120, n° 13, pp. 547-560, 1998.

- [11] J. McEvoy, C. Armstrong et R. Crawford, «Advances in Polymer Technology,» vol. 7, n° 14, p. 339, 1998.
- [12] Y. Chyan et H. Shiu-Wan, «Modeling and Optimization of a Plastic Thermoforming Process,» *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 23, n°11, p. 109.
- [13] S. Monteix, «PhD dissertation,» École des Mines de Paris, France, 2001.
- [14] A. Bendada et K. Nguyen, «Applications of the boundary element method to some inverse problems in engineering mechanics,» chez *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, 3rd Int. Conference on Inverse Problems in Engineering, Port Ludlow, WA, USA, 1999.
- [15] M. Boutaous, P. Bourgin, D. Heng et D. Garcia, «Optimization of radiant heating using the ray tracing method: Application to thermoforming,» *Journal of Advanced Sciences*, vol. 17, n° 11,2, p. 139, 2005.
- [16] M. N. Ozisik, *Heat Conduction*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1993.
- [17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *The Art of Scientific Computing*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [18] J.-R. Howell, R. Siegel et M. Pinar-Mengüç, *Thermal Radiation Heat Transfer*, CRC Press, 2010.
- [19] G. Demirkaya, «Monte Carlo solution of a radiative heat transfer problem,» Thesis, The Middle East Technical University(USA), 2003.
- [20] G. M et J. D, *A guide to the theory of NP-completeness*, New York: W.H Freeman and company, New York, 1979.
- [21] Kirkpatrick et al, «Optimization by simulated annealing,» *Science, Vol. 220, Issue 4598, pp. 671-680*, 1983.
- [22] S. Patrick et al, *étaheuristiques : recuit simulé, recherche avec tabous, recherche à voisinages variables, méthode GRASP, algorithmes évolutionnaires, fourmis artificielles, essaims particuliers et autres méthodes d'optimisation*, Paris: Eyrolles, 2014.

- [23] S. aus der Wiesche, «Industrial thermoforming simulation of automotive fuel tanks,» *Applied Thermal Engineering*, vol. 24, n° 116, pp. 2391-2409, 2004.
- [24] O. Hamdani, «Modélisation Numérique Du Chauffage Par Microondes Des Membranes Biocomposites,», mémoire de maîtrise, Université du Québec en Abitibi-Témiscamngue, 2016 .
- [25] S.Monteix, F.Schmidt and al, «Experimental Study and Numerical Simulation of Perform or Sheet Exposed,» *Journal of Materials Processing Technology*, Vol.119, No:1-3, pp. 90-97, 2001.
- [26] J. R. Ehlert et T. Smith, «View Factors for Perpendicular and Parallel,» *Thermophys Heat Trans*, vol. 7, n° 13, pp. 173-174, 1993.
- [27] J. R. Ehlert et T. F. Smith, «View Factors for Perpendicular and,» *The American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 7, n° 11, pp. 174-175, 1992.
- [28] J. Dréo , A. Pérowski , P. Siarry et E. Taillard, Méthaeuristiques pour l'optimisation difficile, Éditions Eyrolles, 2003.
- [29] F. Erchiqui, I. Hamani et A.Charette, «Modélisation par éléments finis du chauffage infrarouge des membranesthermoplastiques semi-transparentes,» *International Journal of Thermal Science*, Vol.48, No.1, pp. 73-84, 2009.
- [30] Plastics: thermoformage transformations de matière plastique, «dxplastiques,» [En ligne]. Available: [http://m.dxplastiques.com/procedes\\_thermoformage.php](http://m.dxplastiques.com/procedes_thermoformage.php). [Accès le 22 septembre 2019].
- [31] [http://www.atomer.fr/1/Conditions\\_parametres\\_de\\_thermoformage\\_plastiques\\_polymeres.html](http://www.atomer.fr/1/Conditions_parametres_de_thermoformage_plastiques_polymeres.html). [Accès le 30 Janvier 2020]
- [32] Frank P. Incropera, Fundamentals of heat and mass transfer, JOHN WILEY & SONS, 2007.
- [33] Bordival M., Schmidt F.M., Le Maoult Y., Velay V (2009 ) : Optimization of Preform Temperature Distribution for the Stretch-Blow Molding of PET Bottles : Infrared Heating and Blowing Modeling, *Polymer Engineering and Science*, vol.49(4), pp.783-793.
- [34] Yousefi A., Bendada A., Diraddo R (2002) : Improved Modeling for the Reheat

Phase in Thermoforming Through an Uncertainty Treatment of the Key Parameters, *Polymer Engineering and Science*, vol. 42(5), pp. 1115-1129.

- [35] Ghobadnam M., Mosaddegh P., Rejani M.R., Amirabadi H., Ghaei A (2015) : Numerical and experimental analysis of HIPS sheets in thermoforming process, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol.76(5-8), pp. 1079–1089.
  
- [36] Cosson B., Schmidt F., Le Maout Y., Bordival M (2011) : Infrared heating stage simulation of semi-transparent media (PET) using ray tracing method, *International Journal of Material Forming*, vol.4(1), pp. 1-10.
  
- [37] Huang H.X., Deng Y.H., Huang Y.F (2005) : Temperature profiles within reheated preform in stretch blow molding, *SPE ANTEC Technical Papers*, 12, Boston, USA.
  
- [38] Chung T.J., Kim J.Y (1982) : Radiation View Factors by Finite Elements, *ASME Journal Heat Transfer*, vol.104(4), pp. 792-795.
  
- [39] Mirhosseini M., Saboonchi A (2011) : View factor calculation using the Monte Carlo method for a 3D strip element to circular cylinder, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol.38 (6), pp. 821–826.
  
- [40] Erchiqui F., Dituba N.G (2007) : Analyse Comparative des Méthodes de Calcul des Facteurs de Formes pour des Surfaces à Contours Rectilignes, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 46(3), pp. 284-293.
  
- [41] Zhen-Zhe L., Tai-Hong C., Yun-De S., Dong-Ji X (2015) : Optimal Heater Control with Technology of Fault Tolerance for Compensating Thermoforming Preheating System, *Advances in Materials Science and Engineering*, vol.12, pp. 1-5.

- [42] Shen Y.D., Li Z.Z., Xuan D.J., Heo K.S., Seol S.Y (2010) : Time-Dependent Optimal Heater Control Using Analytic and Numerical Methods, Precision Engineering and Manufacturing, vol.11(1), pp. 77-81.
- [43] Back, T (1996) : Evolutionary Algorithms in Theory and Practice : Evolution Strategies. Evolutionary Programming, Genetic Algorithms, Oxford University Press, New York.
- [44] Akbar K.S., Girard P., Bhuiyan N., Thomson V (2012) : Improved Mathematical Modeling for the Sheet Reheat Phase During Thermoforming, Polymer Engineering and Science, vol.52(3), pp. 625-636.
- [45] Shapiro A.B (1985) : Computer Implementation, Accuracy and Timing of Radiation View Factor Algorithms, ASME Journal of Heat Transfer, vol.107(3), pp. 730-732.
- [46] Ehlert J.R., Smith T.F (1993) :View Factors for Perpendicular and Parallel, Rectangular Plates, Journal of Thermo-physics and Heat Transfer, vol.7(1), pp. 173-174.
- [47] Duman E., Uysal M., Alkaya A.F (2012) : Migrating Bird Optimization : A New Metaheuristic Approach and its Performance on Quadratic Assignment Problem, Information Sciences, vol.217, pp. 65-77.
- [48] Sorkin G.B (1991), Efficient Simulated Annealing on Fractal Energy Landscapes, Algorithmica, vol.6(1-6), pp. 367-418.
- [49] Martin O.C, Otto S.W (1996) : Combining Simulated Annealing with Local Search Heuristics, Annals of Operations Research, vol.63(1), pp. 57-75.
- [50] Eglese R.W (1990) : Simulated annealing : A tool for operational research, European Journal of Operational Research, vol.46, pp. 271-281.

14

Appliquée au cas du solide semi-infini il s'agit de résoudre l'équation de chaleur sous la forme suivante [24]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Aq_0'' e^{-AZ}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$T(z, t = 0) = T_{ini} \quad (\text{13})$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z, t) = T_{ini} \quad (\text{14})$$

On adopte le changement de variable :

$$\theta(z, t) = T(z, t) - T(z, t = 0) + \frac{q_0'' e^{-AZ}}{k.A} \quad (\text{A.5})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{15})$$

Que l'on peut résoudre en utilisant les transformées de Laplace sur la variable temporelle

$$L[\theta(z, t)] = \bar{\theta}(z, p) \quad (\text{A.7})$$

Dans l'espace de Laplace l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{\theta} = -\frac{q_0'' e^{-AZ}}{\alpha k A} \quad (\text{16})$$

La solution est de la forme :

$$\bar{\theta}(z, p) = \bar{\theta}_1(z, p) + \beta e^{-AZ} \quad (\text{A.9})$$

La substitution de cette solution dans l'équation précédente fait apparaître une équation  $\bar{\theta}_1$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_1}{\partial z^2} - \frac{P}{\alpha} \bar{\theta}_1 = -e^{-AZ} \left[ \frac{q_0''}{\alpha k A} + \beta \left( A^2 - \frac{P}{\alpha} \right) \right] \quad (\text{A.10})$$

La condition pour laquelle cette équation admet une solution sans second membre permet d'identifier la variable  $\beta$

$$\beta = - \left[ \frac{q_0''}{\alpha k A \left( A^2 - \frac{P}{\alpha} \right)} \right] \quad (\text{A.11})$$

Et de disposer d'une équation sans second membre qui admet une solution triviale et permet finalement d'obtenir une solution pour  $\theta$  :

$$\bar{\theta}(z, p) = K e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha}} z} + \beta e^{-AZ} \quad (\text{A.12})$$

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{q_0''}{k} \quad (\text{A.13})$$

Sont exprimées dans l'espace de Laplace par :

$$\left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{q_0''}{k p} = -k \sqrt{\frac{P}{\alpha}} - \beta A \quad (\text{A.14})$$

Cette égalité permet d'identifier l'expression de la constante d'intégration K, et de formuler la solution en  $\theta$  par :

$$\frac{q_0''}{\alpha k \left( A^2 - \frac{P}{\alpha} \right) q} e^{-qz} = -\frac{q_0'' e^{-AZ}}{k \alpha} \quad (\text{A.15})$$

La solution finale de l'équation exprimée dans l'espace  $(z, t)$  est obtenue par transformée inverse de ces trois termes qui sont traités séparément :

L'identification de la transformée inverse du deuxième terme n'est pas apparente sous cette forme et il est nécessaire de la décomposer en fraction rationnelle selon :

Par identification on obtient :

$$A = B = \frac{1}{2A} \quad (\text{A.16})$$

Finalement pour identifier la transformée inverse, on écrit ce terme de la façon suivante :

En  $a = \pm A\sqrt{\alpha}$

$$k' = \frac{z}{\sqrt{\alpha}} \quad (\text{A.17})$$

Identifiant et cette expression admet une transformée donnée par :

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0''}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = e^{ak} e^{a^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right) \quad (\text{A.18})$$

Les premiers et derniers termes expriment la solution et sont plus simples à inverser puisque directement identifiables par une transformée classique par :

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0''}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = e^{ak} e^{a^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0''}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = \frac{q_0'' e^{-aA^2 t} e^{-AZ}}{KA} \quad (\text{A.20})$$

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0''}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = \left( \frac{q_0''}{k} \right) 2\sqrt{\alpha t} \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (\text{A.21})$$

En utilisant les propriétés des fonctions Erf tel que :

$$\operatorname{Erfc}(z) = 1 - \operatorname{Erf}(z) \text{ et } -\operatorname{Erf}(z) = 1 - \operatorname{Erf}(-z)$$

Avec

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon \quad (\text{A.22})$$

$$ierfc(z) = e^{(-z \times z)/\sqrt{\pi}} - z \times erfc(z) \quad (\text{A.23})$$

On obtient finalement l'expression de  $\theta$ , en fonction de  $z$  et de  $t$  par [25]:

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &= T(z, t) - T_{ini} + \frac{q_0'' e^{-AZ}}{KA} \\ &= Aq_0'' \sqrt{at} ierfc\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{q_0''}{2k}\right) e^{A^2 ak + Az} erfc\left(A\sqrt{at} + \frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{q_0''}{2k}\right) e^{A^2 ak - Az} erfc\left(A\sqrt{at} - \frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} T(z, t) &= T(z, t) - T_{ini} + \frac{q_0'' e^{-AZ}}{KA} \\ &= Aq_0'' \sqrt{at} ierfc\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{q_0''}{2k}\right) e^{A^2 ak + Az} erfc\left(A\sqrt{at} + \frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{q_0''}{2k}\right) e^{A^2 ak - Az} erfc\left(A\sqrt{at} - \frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

## Annexe B : Résolution de l'équation de chaleur 1D (opaque)

Considérons l'équation unidimensionnelle de la conductivité thermique d'une plaque indéfinie d'épaisseur  $2\delta$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{B.1})$$

Où

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \quad (\text{B.2})$$

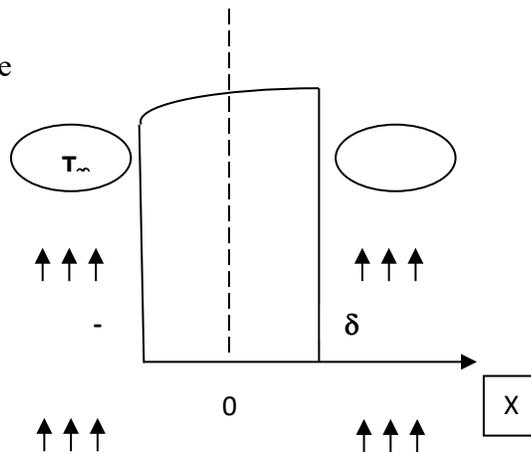
Avec :

$\alpha$  : La diffusivité du matériau

$\lambda$  : La conductivité

$\rho$  : La densité

$C_p$  : La chaleur spécifique



**Figure** : une plaque plane infinie longée dans un courant de fluide

Avec la condition aux limites de troisième genre (surface exposée):

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right| = -h(T - T_\infty) \quad (\text{B.3})$$

Avec :

$\lambda$  : La conductivité.

$h$  : Le coefficient de convection associé aux pertes de chaleur avec le milieu ambiant.

$T_\infty$  : La température ambiante.

La plaque à l'instant initial ayant une température uniforme  $T_0$  est plongée dans un courant de fluide à la température  $T_f \neq T_0$ .

On pose :

$$\theta(x, t) = T_f - T \quad (\text{B.4})$$

En utilisant le changement de variable, l'équation (B.1) peut s'écrire:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{B.5})$$

En tenant compte de la symétrie de la plaque, on tiendra compte également de la symétrie du champ thermique qui se traduit par le flux nul au centre de la plaque. On étudiera donc notre domaine de  $x=0$  à  $x=\delta$ .

Les conditions aux limites s'écriront alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=+\delta} = -h\theta(t, \delta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ \text{à } t = 0, \quad \theta(x,0) = \theta_0 = T_f - T_0 \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

En utilisant la méthode de séparation des variables on pose :

$$\theta(x, t) = F(x) \cdot G(t) \quad (\text{B.7})$$

Après le remplacement de ce dernier dans l'équation (78) :

$$F(x) \cdot \frac{\partial G(t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \cdot G(t) \quad (\text{B.8})$$

En séparant les variables on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{1}{\alpha \cdot G(t)} \cdot \frac{\partial G(t)}{\partial t} = \frac{1}{F(x)} \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \quad (\text{B.9})$$

Sachant que  $\frac{1}{\alpha \cdot G(t)} \cdot \frac{\partial G(t)}{\partial t}$  ne dépend pas de x et  $\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}$  ne dépend pas de t, on

déduit que leur valeur totale ne dépend ni de x ni de t. Ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha \cdot G(t)} \cdot \frac{\partial G(t)}{\partial t} = \text{Constante} = -b_2 \\ \text{et} \\ \frac{1}{F(x)} \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = \text{Constante} = -b_2 \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

L'équation (B.10) se traduit par deux équations différentielles qui se résolvent en tenant compte des conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial G(t)}{\partial t} + \alpha b^2 G = 0 & \Rightarrow G(t) = C'_0 e^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t} \\ \text{et} \\ \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + b^2 F = 0 & \Rightarrow F(x) = C'_1 \sin(bx) + C'_2 \cos(bx) \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Avec  $C'_0$ ,  $C'_1$ ,  $C'_2$  les constantes d'intégrations.

D'où la forme générale de la solution :

$$\theta(x, t) = C_0 e^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t} [C'_1 \sin(b \cdot x) + C'_2 \cos(b \cdot x)] \quad (\text{B.12})$$

Ou en réunissant les constantes :

$$\theta(x, t) = e^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t} [C_1 \sin(b \cdot x) + C_2 \cos(b \cdot x)] \quad (\text{B.13})$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = b \cdot C_1 \cdot \exp^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (\text{B.14})$$

Et

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\delta} = [-b \cdot C_2 \cdot \sin(b \cdot \delta)] \cdot \exp^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t} = -\frac{h}{\lambda} \theta_\delta = -\frac{h}{\lambda} \cdot [C_2 \cdot \cos(b \cdot \delta)] \cdot \exp^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t} \quad (\text{B.15})$$

En réduisant les deux membres de l'égalité de l'équation (B.14) :

$$\frac{[C_2 \cdot \cos(b \cdot \delta)] \cdot \exp^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t}}{[C_2 \cdot \sin(b \cdot \delta)] \cdot \exp^{-\alpha \cdot b^2 \cdot t}} = \frac{b \lambda}{h} \quad (\text{B.16})$$

$$\cot g(b \cdot \delta) = \frac{\lambda \cdot b}{h} = \frac{b \cdot \delta}{Bi} \quad (\text{B.17})$$

$$\text{Avec le nombre de Biot, } Bi = \frac{h \cdot \delta}{\lambda} \quad (\text{B.18})$$

$$n = b \cdot \delta \quad (\text{B.19})$$

$$\cot g(n) = \frac{n}{Bi} \quad (\text{B.20})$$

Cette équation transcendante régit les valeurs propres admissibles pour n et se résout graphiquement en cherchant les points d'intersection de la droite  $y_1 = \frac{n}{Bi}$  et la droite  $y_2 = \cot g(n)$

- Pour  $Bi=0$ , les solutions de n sont :

$$n_i = (i-1) \pi. \quad (\text{B.21})$$

(Avec i : un entier)

- Pour  $Bi = \infty$ , les solutions de n sont :

$$n_i = (2i-1) \pi/2. \quad (\text{B.22})$$

La solution générale de l'équation différentielle se calcule comme la somme des solutions particulières.

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp^{-\alpha \cdot \frac{n_i^2}{\delta^2} \cdot t} \quad (\text{B.23})$$

On a: le nombre de Fourier  $Fo = \frac{\alpha \cdot t}{\delta^2}$ .

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp^{-n_i^2 Fo} \quad (\text{B.24})$$

À  $t=0$  :

$$\theta(x,0) = \theta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \quad (\text{B.25})$$

Après la multiplication des deux parties de l'équation (B.25) par  $\cos\left(m_i \cdot \frac{x}{\delta}\right)$ , on obtient

l'équation suivante :

$$\int_0^{\delta} \theta_0 \cos\left(m_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^{\delta} \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(m_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx \quad 86$$

(B.26)

$$\theta_0 \cdot \delta \cdot \frac{\sin(n_i)}{n_i} = C_i \frac{1}{2} \delta \left[ 1 + \frac{\sin(2n_i)}{2n_i} \right] \quad (17)$$

$$\Rightarrow C_i = \frac{2 \theta_0 \sin(n_i)}{n_i + \sin(n_i) \cos(n_i)} \quad (B.28)$$

En remplaçant (B.28) dans (B.24), on obtient l'équation suivante :

$$\theta = \theta_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n_i)}{n_i + \sin(n_i) \cos(n_i)} \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp^{-n_i^2 F_0} \quad (B.29)$$

## Annexe C : Discrétisation spatiale

Pour une formulation par élément fini, nous considérons l'approche de Galerkin. Pour cela, considérons une fonction teste  $V(x)$ . Ainsi, en multiplie l'équation (C.1) par  $V(x)$  :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dx} (k_c \cdot \nabla T) - Q_{rad} = 0 \quad (C.1)$$

$$V(x) \left[ \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dx} (k_c \cdot \nabla T) - Q_{rad} \right] = 0 \quad (C.2)$$

Intégration par partie donne :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho C_p V(x) \frac{dT}{dt} + k_c \frac{dV(x)}{dx} \frac{dT}{dx} - V(x) Q_{rad} \right] dx + V(x) k_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1} - V(x) k_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x_2} = 0 \quad (C.3)$$

Et en utilisant les définitions suivantes pour les conditions aux limites :

$$P_1 = -k_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_1} ; \quad P_2 = +k_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_2}$$

L'équation (C.3) devient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho C_p V(x) \frac{dT}{dt} + k_c \frac{dV(x)}{dx} \frac{dT}{dx} - V(x) Q_{rad} \right] dx - P_1 V(x_1) - P_2 V(x_2) = 0 \quad (18)$$

En choisissant

$$V(x) \rightarrow N_i(x)$$

Ainsi, si on considère une interpolation linéaire sur chaque élément de la structure (deux nœuds), on a sur cet élément l'expression suivante de la température :

$$T(x, t) = N_1(x)T_1(t) + N_2(x)T_2(t) \quad (C.5)$$

$N_i$  sont les fonctions d'interpolations. Sous forme indicielle et d'une manière plus générale, l'équation s'écrit :

$$T(x, t) = N_i(x)T_i(t) \quad (C.6)$$

où  $i$  représente le nombre de nœuds par éléments. Ainsi, une discrétisation spatiale de la température conduit aux expressions suivantes des dérivées :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dx} = \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j(t) \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} = N_j(x) \frac{\partial T_j(t)}{\partial t} \quad (C.8)$$

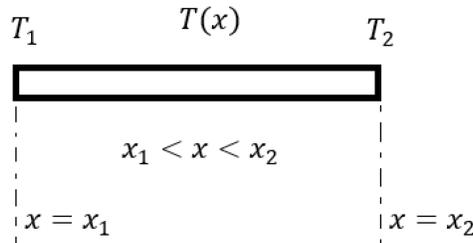
En posant :

$$\frac{\partial T_j(t)}{\partial t} = \dot{T}_j \quad (C.9)$$

L'expression devient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho C_p N_i N_j \dot{T}_j + k_c \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j - N_i Q_{rad} \right] dx - P_1 N_i(x_1) - P_2 N_i(x_2) = 0 \quad (C.10)$$

Pour une interpolation linéaire, on a :



**Figure C.1 : discrétisation spatiale**

$$T(x) = N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 \quad (C.11)$$

Avec :

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{h} \quad (C.12)$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{h} \quad (C.13)$$

Ce qui donne, sous forme élémentaire, la présentation suivante :

$$\left[ \int_{x_1}^{x_2} (\rho C_p N_i N_j) dx \right] \dot{T}_j + \left[ \int_{x_1}^{x_2} k_c \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] T_j - \int_{x_1}^{x_2} N_i Q_{rad} dx - P_1 N_i(x_1) - P_2 N_i(x_2) = 0 \quad (19)$$

En introduisant la définition de la Matrice de masse élémentaire :

$$M_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_2} (\rho C_p N_i N_j) dx \quad (C.15)$$

$$M^e = \frac{l C_p h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La définition de la Matrice de conductivité thermique :

$$K_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_2} k_c \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (C.16)$$

$$K^e = \frac{K}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et la définition du vecteur charge :

$$F_i^e = \int_{x_1}^{x_2} N_i Q_{rad} dx - P_1 N_i(x_1) - P_2 N_i(x_2) \quad (C.17)$$

La formulation intégrale de l'équation sur l'ensemble des éléments devient :

$$\sum_e [M^e] \cdot \{\dot{T}_e\} + \sum_e [K^e] \{T_e\} - \sum_e \{F_e\} = \{0\} \quad (\text{C.18})$$

L'assemblage consiste à construire les matrices globales de  $[K]$ ,  $[M]$  à partir de leurs matrices élémentaires et du vecteur de charge  $\{F\}$  à partir de son vecteur élémentaire. Ainsi, en utilisant les définitions suivantes :

$$[K] = \sum_e [K^e] : \text{la matrice conductivité globale.}$$

$$[M] = \sum_e [M^e] : \text{la matrice de capacité globale.}$$

$$\{F\} = \sum_e \{F^e\} : \text{le vecteur de charge thermique global.}$$

On a le système global suivant qui gouverne l'évolution de la température sur la structure :

$$[M] \cdot \{\dot{T}\} + [K] \cdot \{T\} = \{F\} \quad (\text{C.19})$$