UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

ÉTUDE DES RELATIONS ENTRE CONCEPTIONS DES ÉLÈVES ET RAPPORT INSTITUTIONNEL AU SAVOIR : CAS DES FRACTIONS EN 5^{e} ANNÉE DU PRIMAIRE

RAPPORT DE RECHERCHE PRÉSENTÉ À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION (M.Ed.)

PAR
SIMON THÉBERGE

OCTOBRE 2022

Ce rapport de recherche a été réalisé à l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue dans le cadre du programme de maîtrise en éducation

Remerciements

Cinq ans, un mois et quelques jours, voilà le temps qui aura dû s'écouler entre le moment où je suis entré pour la première fois à l'université pour entamer un projet de maîtrise et le moment où j'ai finalement été prêt à présenter un mémoire de recherche à des correcteurs. Dire que je ne savais pas dans quoi je m'engageais au départ relève de l'euphémisme. Pour accompagner un étudiant dans un tel parcours, la direction de recherche est une tâche délicate nécessitant la quête constante d'un équilibre fragile entre l'enseignement et l'exploitation adéquate de connaissances, souvent complexes. En cela, je crois que mon directeur a su faire preuve d'une mesure, d'une minutie, d'une rigueur et d'un investissement personnel à l'égard de mon projet qui révèlent, à mes yeux, son engagement envers l'étudiant que je suis et envers la recherche.

Merci à ma direction, Ridha Najar, d'avoir accepté le projet audacieux d'accompagner, dans une recherche en didactique des mathématiques, un étudiant qui n'était spécialisé ni en didactique ni en mathématiques. Merci pour le temps, l'expertise, l'engagement et les sacrifices qui ont été faits pour m'accompagner durant ces cinq années.

Par ailleurs, durant mon baccalauréat, deux enseignants ont su allumer une première étincelle du plaisir que l'on peut éprouver devant les mathématiques. Thomas Rajotte et Marie-Josée Richard, merci pour votre patience devant l'étudiant démotivé et frustrant que j'ai pu être dans vos cours.

Je connaîtrai, moi-même, cette réalité de l'enseignement universitaire quelques années plus tard, merci à Houria Hamzaoui pour l'accompagnement en ce sens.

Un merci spécial également à Lily Bacon ; son soutien et ses conseils sont arrivés à un moment charnière et ont fait toute la différence.

Merci à Rénal Dufour ; tu as entretenu en moi la flamme du goût d'apprendre à une époque où elle était bien faible.

Merci, enfin, à ma famille, à mes amis et à ceux que la vie a éloignés. À tous ceux qui se reconnaissent, vous avez souvent cru en moi bien plus que le principal intéressé.

Avant-propos

Je n'ai jamais vraiment aimé les mathématiques. Ce n'est pas qu'elles aient réellement été source d'angoisses ou de difficultés. Je n'y avais, simplement, jamais réellement pris plaisir. Pour moi, les mathématiques étaient, au plus, une connaissance utile, un outil pratique, mais ennuyeux. Je me considérais bien davantage comme un esprit littéraire. J'aimais la philosophie et l'anthropologie.

J'ai choisi cette discipline parce qu'elle m'est apparue, à travers nombres de mes camarades de classe, comme le parent pauvre et mal aimé de l'éducation. J'avais l'intuition que les mathématiques devaient être quelque chose de plus qu'un savoir utile pour occuper près de 40% du temps d'enseignement au primaire. Si c'était le cas, je voulais comprendre pourquoi et l'expliquer à mes collègues pour qu'enfin cesse cette injustice historique infligée aux mathématiques. Si ce n'était pas le cas, je voulais le faire savoir à tous pour qu'enfin cesse cette injustice infligée aux enfants.

J'ai découvert, dans les mathématiques, une humanité au moins égale à celle que je retrouvais dans ces autres disciplines qui m'étaient si chères. Pour moi, les mathématiques sont véritablement victimes d'une profonde injustice. Les élèves ne sont cependant pas moins victimes, à mes yeux, dans la manière dont elles sont, trop souvent, enseignées.

Au cours de ma maîtrise, j'ai voulu construire des activités. J'ai voulu travailler sur la motivation et sur le rapport au savoir. J'ai voulu intégrer dans un seul projet, un diagnostic de difficultés et une intervention fondée sur une synthèse des plus récentes approches en enseignement. J'ai voulu construire quelque chose de grand, de beau, de nouveau.

Pragmatisme oblige, je me suis retrouvé dans un projet beaucoup plus humble et impliquant beaucoup plus de savoirs mathématiques techniques que je ne l'aurais pensé au départ. J'ai fini par tenter de mettre en relation les conceptions des élèves à propos des fractions avec le rapport institutionnel ; les mathématiques dans une perspective anthropologique et psychologique.

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des abréviations sigles et acronymes

MÉQ : Ministère de l'Éducation du Québec;

NAEP : National Assessment of Educational Progress;

PDA : Progression des apprentissages;

PFEQ : Programme de formation des écoles québécoises;

TAD : Théorie anthropologique du didactique.

Liste des symboles

$\in$: Appartient à;

$\mathbb{Z}$: Ensemble des nombres entiers;

$\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels.

Résumé

Dans ce rapport de recherche, nous faisons état de différents signes documentés dans les traces écrites d'élèves dans différentes populations et à divers endroits du monde de la complexité que peut impliquer l'apprentissage de la notion de fraction. Nous adoptons une perspective anthropologique et didactique pour interpréter les difficultés des élèves et tentons de mettre en relation les concepts de rapport institutionnel et de conception des élèves dans la perspective de l'apprentissage des fractions en 5^{e} année du primaire. Nous inscrivant dans une perspective didactique, nous avons fait le choix d'observer les conceptions des élèves à travers les stratégies mobilisées en situation problème. Nous avons défini deux types de stratégies. Le premier intègre les stratégies procédurales. Lesquelles consistent en des stratégies apprises de façon routinière et destinées à être appliquées de façon directe dans des contextes prédéterminés. Le second intègre les stratégies que nous avons nommées conceptuelles et qui consistent en des stratégies pouvant être justifiées et verbalisées grâce à la mise en relation de différentes connaissances, ou encore, en des stratégies nécessitant une mobilisation et une mise en relation autonome de plusieurs techniques. Nous avons associé le premier à un modèle d'enseignement plutôt transmissif et le second à un modèle plutôt socioconstructiviste. Nous avons construit un test comportant différentes tâches de représentation et de comparaison de fractions pouvant potentiellement faire émerger des stratégies, soit procédurales, soit conceptuelles. L'objectif était de tenter de déterminer si l'un ou l'autre de ces types de stratégies allait être priorisé par les élèves. Nous avons constaté que, si les stratégies conceptuelles menant à une réponse correcte étaient bel et bien présentes dans les traces écrites des élèves (la majorité des élèves s'est montrée en mesure de mobiliser au moins une stratégie conceptuelle), les stratégies procédurales étaient globalement plus nombreuses chez ces derniers. Nous émettons l'hypothèse d'un décalage entre les attentes des documents prescriptifs et le rapport aux savoirs des différents acteurs institutionnels (enseignants et concepteurs de matériel didactique). Cette hypothèse devra être validée dans des recherches ultérieures. Nous émettons en outre des recommandations quant à la formulation de certains savoirs essentiels visés par la progression des apprentissages au Québec.

Mots clés : didactique ; mathématique ; rapport au savoir ; conception ; fraction.

Introduction

La compréhension du monde à travers le prisme de l'anthropomorphisation constitue une idée qui est, pour nous, tout à la fois magnifique et angoissante puisqu'elle unit les humains dans une perception commune de l'univers tout en les y enfermant. Elle nous permet cela dit, d'emblée, de considérer les mathématiques dans une perspective pragmatique en les observant comme un phénomène proprement humain, intégré dans un cadre historique, social et institutionnel. Ce mémoire se situe ainsi dans l'approche anthropologique de Chevallard (1992 ; 1998) et s'intéresse à la notion de fraction dans le contexte institutionnel de l'école primaire au Québec. Héritage millénaire d'un riche ensemble de cultures humaines, la notion de fraction est apparue devant des besoins semblables, typiquement humains, qui se sont révélés à divers moments et en divers endroits du monde : le besoin de partager, d'établir un ratio, ou encore de noter une division. Nous parlerons de la manière dont cet héritage s'enseigne et s'apprend aujourd'hui dans un Québec de 2022.

Au cours de notre parcours professionnel dans différentes écoles primaires, nous avons eu l'occasion de travailler dans des classes de tous les niveaux. Dans les niveaux allant de la troisième à la sixième année, nous avons constaté, dans les traces écrites de plusieurs élèves, des signes de la complexité que peut revêtir l'apprentissage des fractions. Ces signes touchaient un ensemble relativement large de situations. Les élèves avaient, par exemple, du mal à représenter les fractions à l'aide de matériel de manipulation ou de représentation. Ils pouvaient, par ailleurs, avoir du mal à comparer ou ordonner des fractions. D'autres manifestations apparaissaient devant des situations impliquant d'établir une équivalence entre fractions. Certains élèves éprouvaient des difficultés à additionner, soustraire ou à estimer le résultat de ces opérations lorsqu'elles impliquaient des fractions. De telles manifestations ne sont pas spécifiques au milieu d'enseignement où nous avons exercé. Elles sont, au contraire, plutôt répandues et ont été rapportées et étudiées dans plusieurs recherches au Québec et dans le monde.

Dans cette recherche, nous avons fait le choix de nous pencher sur une éventuelle relation entre le rapport institutionnel (Chevallard, 1992 ; 1998) au savoir sur les fractions enseignées au primaire et les conceptions des élèves à propos de ce savoir, selon qu'elles révèlent un niveau de pensée plutôt procédural ou plutôt conceptuel.

I. Problématique

Les difficultés des élèves en mathématiques peuvent avoir des origines multiples. Houle et Giroux (2016) ciblent à ce propos plusieurs domaines d'études par lesquels il est possible d'observer ce phénomène. Nommons brièvement le domaine psychoaffectif (par exemple la motivation, le sentiment de compétence, etc.), l'environnement socioculturel des élèves (par exemple le milieu de vie de l'élève, les pressions sociales, les attentes parentales, etc.), le domaine de la neuropsychologie (par exemple l'étude sur la dyscalculie), le domaine de la psychologie cognitive (par exemple des limitations en ce qui concerne le traitement de l'information en référence à la mémoire de travail ou à la mémoire à long terme, développement de la pensée numérique…) ou encore celui de la maîtrise de la langue. Les deux auteures ajoutent également la perspective didactique à cette liste. Cette dernière accorde une place centrale au savoir mathématique dans le contexte de son enseignement et de son apprentissage. Les recherches qui relèvent de cette perspective peuvent toucher plusieurs dimensions se rapportant à l'enseignement et à l'apprentissage, par exemple, les rapports institutionnel et personnel au savoir, les conceptions, le langage et les représentations sémiotiques, les obstacles didactiques, le rôle de l'erreur, etc. Cette perspective peut être utilisée pour expliquer la manifestation de la complexité de l'apprentissage des fractions (Blouin, 2002; Rosard *et al.* 2007; Carette *et al.* 2009). Nous nous intéressons ici particulièrement à l'approche proposée par Chevallard (1992 ; 1998), concernant le rapport institutionnel au savoir. Certains chercheurs se sont inscrits dans cette perspective pour tenter d'expliquer les difficultés des élèves en mathématiques (Roiné, 2009 ; Sarrazy, 2001). Dans sa thèse de 2009, Roiné remet en question une certaine perspective qui tend à « psychologiser » les difficultés des élèves en occultant les facteurs sociaux et les conditions didactiques qui permettent l'efficience de l'enseignement. De son côté, Sarrazy (2001) a montré que l'action de l'enseignant pouvait être assujettie à un certain nombre de conditions didactiques et non didactiques et que cet assujettissement pouvait engendrer chez les élèves des effets cognitifs variables. Notre intention est d'adopter une perspective similaire en ce qui a trait aux relations qui pourraient exister entre les choix institutionnels d'enseignement et quelques manifestations documentées de la complexité qu'implique l'apprentissage des fractions.

Nous nous appliquons, dans la section qui suit, à énumérer un ensemble relativement vaste d'erreurs commises par les élèves quand vient le temps de travailler sur les fractions. Comme nous le verrons, ces erreurs sont susceptibles d'apparaître à différents niveaux académiques entre le deuxième cycle du primaire et le troisième cycle du secondaire. Ce prolongement de telles manifestations jusqu'aux dernières années de la scolarisation obligatoire témoigne de la profondeur et de la persistance de ces dernières et justifie l'importance qu'il faut accorder à l'enseignement des fractions. Nous proposerons ensuite quelques pistes d'interprétations proposées par une perspective didactique. De ces observations, issues de la littérature scientifique, nous tirerons un certain nombre de conclusions qui nous permettront de formuler une hypothèse et une question générale de recherche.

I. 1. Manifestations de la complexité de l'apprentissage de la notion de fraction

La plupart des études que nous avons consultées portant sur les connaissances mathématiques des fractions qu'ont les élèves (Brown *et al.* 1988; Carette *et al.* 2009; Haseman, 1985; Lesh *et al.* 1983; Mercier et DeBlois, 2004; Post, 1981) ont été réalisées auprès d'échantillons impliquant un assez grand nombre d'élèves (parfois plus d'un millier). Certaines de ces enquêtes datent des années 80, mais d'autres, plus récentes viennent appuyer les observations qu'elles ont consignées. Les problèmes mathématiques utilisés correspondent à un contenu souvent semblable d'une recherche à l'autre. On demande, par exemple, aux élèves d'identifier et de représenter plusieurs fractions, d'estimer et d'effectuer des opérations sur les fractions, de comparer ou d'ordonner des nombres incluant des fractions, ou encore, de résoudre des problèmes impliquant une ou plusieurs étapes mettant en jeu les fractions.

L'observation de l'ensemble des résultats de ces recherches montre que plusieurs erreurs perdurent dans le temps, et ce, partout où les connaissances des élèves sont analysées, que ce soit au Québec (Mercier et DeBlois, 2004), aux États-Unis (Brown *et al.* 1988 ; Lesh *et al.* 1983; Post, 1981) ou en Europe (Carette *et al.* 2009; Haserman, 1985).

I. 1.1 Représentation

Plusieurs ont observé des difficultés à interpréter l'écriture fractionnaire et à représenter la fraction de façon symbolique (Brown *et al.* 1988 ; Fortier, 1988). Brown et ses collaborateurs (1988) observent des contradictions dans la compréhension qu'ont les élèves de ce que signifie l'écriture symbolique. Si d'une part, la plupart des élèves de 7^{e} année (équivalent de la première année du secondaire au Québec) étaient capables, de transformer une fraction impropre en nombre fractionnaire, moins de la moitié d'entre eux, tant en 7^{e} qu'en 11^{e} année (respectivement, la première et la dernière année du secondaire au Québec) reconnaissaient l'équivalence entre $5\frac{1}{4}$ et $5+\frac{1}{4}$.

I. 1.2 Ordonner, comparer et déterminer une équivalence

Mercier et DeBlois (2004) observent que des élèves de la sixième année du primaire et de la première année du secondaire, au Québec, ont tendance à placer la fraction $\frac{5}{6}$ entre le 5 et le 6 sur une droite numérique. Pour ces auteurs, cette difficulté manifestée par les élèves d'associer une fraction à un modèle révèle une certaine confusion entre les propriétés des entiers naturels et les propriétés des nombres rationnels.

Fortier (1988), de son côté, constate que plusieurs élèves de 9 ans préféraient obtenir la note de 8/10 plutôt que la note 90/100. Ces élèves croyaient qu'il valait mieux avoir perdu seulement deux points plutôt que dix. Un tel raisonnement peut indiquer que le concept d'équivalence est toujours en construction chez ces élèves du deuxième cycle du primaire ce qui semble, ici, tout à fait normal. Cela dit, Ghailane s'est intéressée, en 2015, à la compréhension de tâches de comparaison et d'équivalence de fractions. Son étude s'est penchée sur le cas de 123 élèves de 3^{e} cycle du primaire au Québec. L'auteure constate que les élèves réussissent généralement à comparer des fractions familières et simples comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8}$, mais échouent significativement plus devant des fractions moins familières ou impropres comme $\frac{5}{4}$ et $\frac{15}{16}$. L'auteure constate également que les élèves réussissent généralement bien les situations d'équivalence lorsque l'un des deux numérateurs peut être atteint en multipliant l'autre par un opérateur appartenant à l'ensemble des entiers (par exemple : $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{8}$), mais que le taux de réussite chute drastiquement lorsque l'équivalence doit être déterminée par un opérateur appartenant à l'ensemble des rationnels (par exemple : $\frac{4}{10}$ et $\frac{6}{15}$). Dans sa recherche, l'auteure distingue les élèves jugés à risque par leur milieu des autres élèves. Elle conclut que la complexité des tâches constitue un meilleur facteur de prédiction de la réussite de ces dernières que le fait d'être un élève à risque.

I. 1.3 Estimation, addition et soustraction

En ce qui concerne la tâche d'estimer la somme de fractions, Post (1981), dans le cadre du Programme d'évaluation des progrès dans le système éducatif américain (National Assessment of Educational Progress ou NAEP), analyse les résultats d'une évaluation qui a porté sur un échantillon d'environ 25 000 élèves. Cette analyse montre que seuls 24% des élèves âgés de 13 ans sont en mesure d'estimer la somme des fractions $\frac{12}{13}$ et $\frac{7}{8}$. Lorsque des choix de réponses leur sont offerts, les élèves choisiront 19 ou 21 plutôt que 2 qui est une estimation beaucoup plus proche du résultat réel. L'auteur constate alors que les élèves ont tendance à traiter la situation en considérant indépendamment les numérateurs ou les dénominateurs. Dans ce cas-ci, certains élèves n'ont fait qu'additionner 12 et 7 ou 13 et 8 pour obtenir les résultats 19 ou 21.

Du côté des procédés additifs, encore une fois dans le cadre du NAEP adressé à plusieurs milliers d'élèves du secondaire, Brown et ses collaborateurs (1988) affirment que 53% des élèves de 13 ans qui ont été observés effectuent correctement le calcul $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}$. Cependant, ce nombre chute à 32% quand vient le temps de calculer $7\frac{1}{6} - 3\frac{1}{2}$. Arrivés en 11^{e} année (équivalent de la cinquième année du secondaire au Québec), les élèves réussissent respectivement ces deux tâches à 71% et 45%. On peut constater ici le rôle déterminant que peut jouer la complexité de la tâche alors que dans la première, les deux entiers peuvent rapidement être éliminés (3 – 3 = 0) pour laisser la place à une soustraction de deux fractions relativement familières. Au contraire, dans la seconde situation, la simple application d'un algorithme est plus difficile à faire puisqu'elle nécessite plusieurs contrôles. D'abord l'entier n'est pas éliminé. Ensuite la fraction à soustraire est plus petite que la fraction qui soustrait. Ce type de complexité peut amener l'élève à manifester des conceptions partielles, voire erronées au moment de la résolution. L'élève pourrait, par exemple additionner tous les chiffres représentés dans la grandeur avant de soustraire (7 + 1 + 6 = 14 et 3 + 1 + 2 = 6, donc 14 – 6 = 8). L'élève pourrait également simplement soustraire les dénominateurs et reporter les numérateurs ($7\frac{1}{6} - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$).

I. 1.4 Multiplication et division

En ce qui concerne la multiplication de fractions au secondaire, Haserman (1985) observe, en Allemagne chez 100 élèves de 7^{e} année (équivalent de la première année du secondaire au

Québec), une difficulté particulière devant l'opération $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}$. Si la moitié des élèves avait réussi à calculer la bonne réponse ($\frac{3}{24}$) en appliquant une procédure technique ou un algorithme, moins du tiers était en mesure d'hachurer correctement la partie d'un cercle qu'elle représentait par rapport à ces deux facteurs. Le problème, dans ce cas, semble se trouver dans l'interprétation du sens de l'opération sur les fractions. DeBlois (2011) exprime une difficulté semblable alors qu'elle affirme que de nombreux élèves du secondaire capables d'effectuer une division de fractions en appliquant l'algorithme enseigné (exemple : $\frac{1}{4} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{1}$) se voient bien embêtés quand vient le temps de représenter avec du matériel l'opération ou d'expliquer pourquoi cette procédure fonctionne.

I. 1.5 Des pistes pour expliquer les erreurs des élèves.

Les chercheurs qui ont documenté ces différentes erreurs commises par des élèves les ont expliquées de façons relativement diverses. Certains se sont intéressés à la complexité de la tâche (Ghailane, 2015 ; Brown *et al.* 1988). Dans ce cas, c'est plutôt le nombre de contrôles à effectuer à chaque étape de résolution qui constituait un facteur critique. Fortier (1988) de son côté nomme une erreur qui peut être interprétée comme un raisonnement fautif.

D'une manière plus large, Charnay et Mante (1992) considèrent les erreurs des élèves selon trois catégories : les erreurs causées par les caractéristiques individuelles de l'apprenant ; les erreurs causées par le contrat didactique ; ainsi que les erreurs tirant leurs sources des connaissances actuelles et des conceptions. Pour chacune de ces catégories, des types d'erreurs et des pistes d'interventions sont avancées.

Les caractéristiques individuelles incluent tout ce qui concerne l'individu lui-même (limitations développementales, charge de travail, représentation du problème, mobilisation de stratégies et autocontrôle, représentations que l'élève a de lui-même, des mathématiques, de l'école, etc.). Le contrat didactique pour sa part implique plutôt les erreurs causées par des règles implicites avec lesquelles on souhaite rompre ou clarifier le domaine de validité, ou encore, les erreurs causées par des règles implicites associées au déroulement des activités que l'apprenant ne s'est pas encore appropriées. Les conceptions insuffisantes constituent plutôt toutes les erreurs qui sont liées aux apprentissages réels qui sont visés.

En 2011, DeBlois proposait une adaptation mise à jour de cette typologie. Pour elle, les erreurs peuvent être interprétées en adoptant trois perspectives : 1) en s'intéressant à l'influence du contexte de la classe (climat scolaire, ambiance de travail, relation enseignant(e)/élèves, sentiment d'appartenance, obstacles épistémologiques, etc.), 2) en observant les connaissances des apprenants, 3) en portant une attention aux caractéristiques de l'apprenant. L'auteure affirme que « nous avons habituellement peu d'influence sur les caractéristiques de l'élève », alors que le contexte de la classe « exerce une pression sur les interactions entre les élèves et la tâche (p. 207). Nous trouvons cette remarque pertinente puisque, si les connaissances constituent les éléments visés par les interventions, les choix institutionnels d'enseignement tels que les documents prescriptifs, les manuels d'enseignement, la leçon telle qu'elle est construite par l'enseignante et ensuite réalisée en classe constituent, pour nous, une roulette « macrométrique » d'ajustement. Suivant cette logique, un ajustement tenant en compte ces éléments devrait permettre de prévenir la majorité des erreurs qui ne sont pas liées aux caractéristiques des élèves. Ceci fait, l'enseignant(e) pourrait voir apparaître plus clairement des erreurs associées aux caractéristiques individuelles et pourrait, alors, se permettre des ajustements « micrométriques » auprès de ces apprenants.

S'intéresser à l'influence du contexte revient, entre autres, à s'intéresser au contrat didactique, donc aux règles implicites au fonctionnement de l'école et de la classe qui doivent ou ne doivent pas être apprises et suivies par les élèves. S'intéresser aux connaissances et aux conceptions des élèves revient plutôt à s'intéresser aux structures de pensées qui peuvent justifier la réponse fournie. Par exemple, plusieurs erreurs soulevées dans notre revue de la littérature peuvent, à notre avis, tirer leurs sources de conceptions partielles ou erronées à propos de la notion de fraction. Par exemple, le fait pour un élève, d'estimer la somme des fractions $\frac{12}{13}$ et $\frac{7}{8}$ en répondant 19 ou 21 implique que la grandeur que représente chacune de ces deux fractions n'est pas considérée comme une relation entre le numérateur et le dénominateur. Les nombres sont plutôt considérés comme pouvant être traités individuellement.

Ainsi, en tenant compte du rapport institutionnel que nous avons identifié dans la section précédente, c'est aux conceptions des élèves à l'égard des fractions que nous nous intéresserons dans le cadre de ce projet de recherche. L'hypothèse d'une relation entre le rapport institutionnel et le développement du concept de fraction par les élèves du primaire a été peu abordée dans la littérature scientifique que nous avons consultée.

I. 2. Discussion et question générale

Les éléments soulevés dans les sections précédentes amènent certains constats. D'une part, plusieurs difficultés vécues par les élèves au secondaire à propos des fractions peuvent potentiellement tirer leur origine de conceptions erronées ou non conformes qui auraient dû être construites au primaire. C'est le cas des difficultés associées à la comparaison de fractions, à l'équivalence, et aux opérations sur les fractions. C'est également le cas des difficultés associées à la lecture, à l'écriture et aux opérations sur les nombres. Chacune de ces catégories implique des savoirs qui doivent normalement être maîtrisés à la fin du primaire[1]. Force est de constater que ce n'est souvent pas le cas.

D'autre part, la théorie anthropologique du didactique (TAD) nous donne quelques pistes de recherche en ce qui concerne le rapport institutionnel au savoir et son rôle dans le processus d'apprentissage. Cela nous amène à penser que l'institution, représentée par les documents institutionnels, mais également par l'enseignant ou l'enseignante assujettie aux règles de cette institution, jouent un rôle non négligeable dans le développement des conceptions observées. Ainsi, en arrivons-nous à formuler l'hypothèse suivante : *L'enseignement à l'école, institutionnalisé par la documentation ministérielle prescriptive (programme et progression des apprentissages) et le matériel didactique utilisé (manuel, activités d'apprentissage et matériel de manipulation ou de représentation picturale) oriente le développement des conceptions des élèves et leur caractérisation de la notion de fraction.*

De cette hypothèse et de ces choix préliminaires, nous tirons notre question générale de recherche que nous formulons ainsi : *Quelles relations se dégagent entre le rapport institutionnel au savoir et les conceptions des élèves au sujet des fractions en fin de 5e année du primaire?*

[1] La progression des apprentissages prévoit des savoirs impliquant les fractions jusqu'à la deuxième année du secondaire. À la fin du primaire, les critères du PFEQ stipulent que l'addition et la soustraction de fractions doivent se faire avec des fractions dont le dénominateur de l'une est le multiple de l'autre. Il stipule également que la multiplication impliquant une fraction doit se faire avec un entier naturel. La progression des apprentissages ne semble pas suggérer de généraliser ces savoirs lorsque les élèves arrivent au secondaire.

II. Cadre de référence

Afin de répondre à la question générale que nous avons posée, nous devons clarifier un certain nombre d'éléments qui nous permettront de définir la notion de conception et la notion de rapport au savoir. Nous pourrons alors dégager des indicateurs qui nous serviront à caractériser ces deux notions dans notre intervention.

Ainsi, nous nous appliquerons, dans cette section, à définir, dans un premier temps, les notions de conception et de rapport au savoir pour en dégager des indicateurs généraux. Avec ces éléments, nous saurons formuler des questions spécifiques qui indiqueront les étapes à suivre dans la mise en œuvre de ce projet.

II. 1. La notion de conception et son rôle dans l'enseignement des mathématiques

Giordan et ses collaborateurs (1994) définissent les conceptions des élèves comme des idées construites à partir d'expériences antérieures à propos des savoirs enseignés. Une conception prend la forme d'une structure de pensée. Elle constitue une grille de lecture du monde pour interpréter et prévoir la réalité. En ce sens, l'élève est, en quelque sorte, « emprisonné » dans ses conceptions puisqu'il ne peut comprendre le monde qu'à travers elles. Les trois auteurs utilisent un ensemble de cinq éléments pour définir ce qu'est une conception. Celle-ci renvoie à un problème, à un cadre de référence, à des opérations mentales, à un réseau sémantique et à un ensemble de signifiants. Pour ces auteurs, il est très difficile de modifier une conception. Cette dernière est ancrée dans une structure cohérente de la pensée de l'apprenant qui constitue sa logique et ses systèmes de significations. C'est pourquoi même des explications bien ficelées et des arguments élaborés n'arrivent souvent pas à modifier une conception incomplète ou erronée. L'approche cognitive adoptée par ces chercheurs est également celle adoptée par Vergnaud (1991) dans sa théorie des champs conceptuels. Lequel associe la notion de conception à celles de schème et de situation.

Pour Vergnaud (1991) un concept se forme nécessairement dans un contexte de situation et il est intimement lié à la notion de schème. Laquelle consiste en « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données » (1991, p. 134). Un schème constitue toutes les actions à mener pour résoudre une situation particulière. La notion de schème implique l'automatisation progressive d'opérations, mais elle implique également des décisions qui témoignent d'une prise en compte des différentes variables d'une situation donnée.

Pour se mettre en œuvre, le schème implique de mobiliser des conceptions. Lesquelles, pour Vergnaud (1991), sont composées de deux éléments : les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte. Un concept-en-acte est une conception ayant un certain domaine de validité, qui permet d'expliquer certaines situations. Le concept-en-acte revêt un caractère pertinent pour une situation donnée. De la même façon, un théorème-en-acte est un invariant opératoire, une action, qui fonctionne dans un certain nombre de situations. Le théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie par l'élève. Pour l'auteur, un schème repose toujours sur une conceptualisation implicite (Vergnaud, 1991). Ce schème peut être fondé sur des conceptions partielles ou erronées. Ainsi, si une conception possède un certain domaine de validité. Cela veut dire que, pour l'élève, certaines situations confirment la validité d'une conception, mais qu'il existe d'autres situations dans lesquelles cette conception devient partielle ou erronée sans que celui-ci n'arrive encore à bien distinguer chacune de ces occasions. Certains élèves se permettent ainsi d'étendre le domaine de validité d'un théorème en acte en l'appliquant à des situations dans lesquelles ce dernier n'est plus valide, occasionnant ainsi des réponses partielles ou erronées.

Il existerait ainsi une certaine classe de situations pour définir chaque concept. Vergnaud (1991) précise qu'une seule situation ne peut suffire à définir un concept. À l'inverse, l'auteur affirme qu'une situation peut contenir, en elle-même plusieurs concepts. L'ensemble des situations permettant de représenter un concept est appelé par l'auteur le champ conceptuel, d'où sa théorie du même nom.

De tout cela, nous pouvons déduire deux choses. D'une part, les conceptions d'un élève se manifestent dans des situations particulières. D'autre part, ces conceptions peuvent être inférées à travers le prisme des stratégies mobilisées par l'élève au moment de traiter ces situations ainsi qu'à travers les schèmes qui pourraient éventuellement être mis en œuvre dans la résolution. Puisque la notion de fraction implique en elle-même plusieurs conceptions susceptibles de se manifester dans différents types de situations, nous prévoyons élaborer un ensemble de situations qui feront émerger différentes conceptions associées au champ conceptuel de la notion de fraction. Chaque aspect du concept de fraction que nous envisageons d'étudier doit être associé à une situation. La manière dont les élèves résoudront ces situations nous donnera des indices sur leurs conceptions à propos de la notion considérée. Ces indices pourraient concerner les actions et les théorèmes-en actes mis en œuvre par les élèves dans leur résolution des situations proposées. La construction des situations spécifiques doit s'appuyer sur la caractérisation des conceptions conformes que l'on cherche normalement à faire construire chez les élèves. Cela requiert au préalable une analyse conceptuelle du concept de fraction. La section IV de ce rapport (p. 26-37) est consacrée à une telle analyse. Cela dit, une approche par les conceptions s'insère dans la perspective théorique plus large de la didactique. Nous nous appliquons dans la sous-section suivante à définir certains éléments tirés de la théorie anthropologique du didactique (TAD) qui pourraient guider la construction de notre outil de cueillette de donnée.

II. 2. Un rapport institutionnel à la notion de fraction

Dans ce rapport, les termes savoirs et connaissances sont abondamment utilisés. Or, plusieurs auteurs œuvrant dans le domaine de la didactique et de la sociologie considérèrent le savoir comme une construction plutôt sociale, rapprochant le concept de l'institution, alors que les connaissances sont plutôt considérées comme une construction individuelle, rapprochant le concept des situations (Conne, 1992 ; Margolinas, 2014). C'est dans cette perspective que nous avons choisi de nous inscrire alors que nous utilisons le terme « savoir » en référence aux prescrits institutionnels à partir des documents ministériels et des manuels scolaires. À l'opposé, nous utilisons plutôt le terme « connaissance » en faisant référence aux élèves et à leurs conceptions.

Chevallard (1998) place la société et l'institution au centre de sa pensée. L'auteur désigne par institution, un espace formé d'objets de types variés. Cet espace est constitué de personnes, des positions qu'occupent ces personnes dans cette institution, ainsi que des objets avec lesquels chaque personne de cet espace entretient un rapport personnel. Si nous nous intéressons à un système éducatif, une institution peut être représentée par l'école, une classe, une séance de cours ou de travaux dirigés, un programme d'enseignement, un objet de savoir, etc. Chevallard considère, cela dit, que la famille, la vie quotidienne, la culture sociétale, etc. sont des institutions qui peuvent également être prises en considération dans l'analyse du rapport institutionnel étant donnée l'influence qu'elles exercent sur l'apprentissage.

Pour Chevallard (1998), « Un savoir n'existe pas *« in vacuo »*, dans un vide social. Tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. Il en découle que tout savoir est savoir d'une institution. En ce sens que pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution à un moment donné, il doit se soumettre à un certain nombre de contraintes imposées par cette institution. Ces contraintes définissent le rapport qu'a l'institution vis-à-vis du savoir.

La notion de rapport institutionnel permet ainsi d'interroger les choix institutionnels d'enseignement, mais également, elle interroge la dynamique interne des interactions entre l'enseignant, l'élève et le savoir. Supposons, par exemple, que l'on s'intéresse à l'institution « école primaire ». À partir du moment où l'on constate un écart entre les conceptions entretenues par les élèves et les conceptions attendues à l'égard d'un savoir institutionnalisé, comme c'est le cas avec les difficultés rapportées précédemment à propos des fractions, il est possible, en adoptant l'approche anthropologique de Chevallard (1992), d'émettre l'hypothèse qu'il puisse y avoir des causes à cet écart qui tiennent leurs origines à l'intérieur même du rapport institutionnel.

Nous avons décrit brièvement ce en quoi consistait le rapport au savoir. Nous nous appliquons maintenant à présenter les définitions données par Chevallard (1992 ; 1998) aux différents termes primitifs utilisés dans sa modélisation de la notion.

Le *« rapport personnel »* d'un individu *X* à un objet *O* est l'ensemble (noté *R(X, O)*) des interactions, sans exception, que *X* peut entretenir avec *O*. Par exemple, le manipuler, le modifier, en parler, y penser, etc.

Le *« rapport institutionnel » RI(O)* d'une institution *I* à un objet *O*, est le rapport à *O* du *sujet idéal* de *I*.

« Connaître » un objet *O*, c'est (pour un sujet comme pour une institution) avoir un rapport à *O*.

« *Se former* », pour une personne, c'est *entrer en contact avec un certain nombre d'objets O* de manière qu'il soit, dans un temps limité, *le plus conforme possible* au rapport institutionnel *RI(O)* à ces mêmes objets.

Il y aura « *apprentissage* » dans une institution *I* pour des sujets de *I*, si leur rapport personnel, à certains objets *O* (pour notre cas, il s'agit de connaissances sur les fractions), évolue de façon à devenir *le plus conforme possible au rapport institutionnel RI(O)*.

Dans une institution *I*, un individu *X* sera qualifié de « *bon sujet* », s'il arrive à modifier ses rapports personnels *R(X, O)* pour les objets *O* qui existent pour *I* de manière à ce qu'ils *ressemblent le plus possible aux rapports institutionnels RI(O)*. Dans le cas contraire, *X* sera qualifié de « *mauvais sujet* ».

La première remarque que l'on peut faire ici concerne le lien entre rapport au savoir et conceptions. Si le rapport au savoir implique toutes les interactions que peut entretenir l'individu avec l'objet de savoir fraction, il est normal de concevoir les conceptions comme en étant un constituant important. En effet, les conceptions déterminent un certain domaine d'action en situation.

En seconde remarque, il y a lieu de souligner les décalages inévitables qui peuvent s'installer entre le rapport institutionnel tel qu'il est prescrit par l'institution et le rapport personnel de l'enseignante qui a la charge de faire évoluer les rapports personnels, et donc les conceptions des élèves de manière qu'ils deviennent le plus conformes possible au rapport institutionnel. Il est possible que les documents prescriptifs, le matériel didactique et l'enseignante ne rendent pas exactement le même rapport au savoir. Il est également possible que le rapport au savoir attendu ne soit pas le même que celui qui est développé chez les élèves. Par ailleurs, les auteurs des manuels scolaires et les concepteurs du matériel didactique sont eux-mêmes assujettis à d'autres institutions que l'institution scolaire (maisons d'édition, illustrateurs, communauté enseignante, etc.) de même pour l'enseignante (formation initiale, équipe-école, parents, localité, etc.). Ces distinctions amènent le rapport institutionnel tel qu'il est présenté à l'élève à apparaître plutôt comme une mosaïque susceptible de changer dans le temps que comme une figure monolithique statique.

Pour relever les nuances qui peuvent s'installer dans le rapport institutionnel, nous avons choisi d'adopter une lunette épistémologique en nous intéressant aux perspectives transmissives et socioconstructivistes. Jusqu'à tout récemment, plusieurs chercheurs ont mis en lumière un changement de courant épistémologique qui semble s'être installé durant les années 1990 (DeBlois, 2014 ; Dionne, 1995 ; Hiebert et Carpenter, 1992). Dans la dernière moitié du 20e siècle, deux grandes approches d'enseignement se distinguent. La première est une approche d'enseignement plutôt transmissive, fondée sur une épistémologie positiviste. L'apprentissage se concentre sur un ensemble de méthodes et de procédures à suivre dans un apprentissage segmenté en silo. La seconde est une approche d'enseignement plutôt centrée sur la résolution de situations problèmes et se fonde sur une épistémologie socioconstructiviste favorisant la construction de sens dans une perspective holistique (DeBlois, 2014 ; Gagnon, 2015). L'objectif de l'apprentissage devient plutôt la capacité à mobiliser un ensemble de connaissances et de procédures dans un contexte inédit. Dans notre recherche, nous nous concentrons sur les documents ministériels prescriptifs. Par documents prescriptifs, nous entendons le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ, 2006) et, plus spécifiquement, la progression des apprentissages (PDA). Ces documents témoignent, selon nous, du rapport institutionnel au savoir « fractions » à l'école primaire jusqu'en 5e année. Ce projet aurait également pu être élargi afin d'inclure les rapports personnels au savoir de chacune des enseignantes ainsi que des moments d'enseignement/apprentissage réalisés directement en classe. Cependant, nous avons fait le choix de nous limiter à l'étude des documents institutionnels pour mieux nous conformer à l'ampleur normale d'un mémoire de maîtrise.

II. 2.1 Une praxéologie mathématique

Bosch et Chevallard (1999) considèrent le savoir mathématique comme une connaissance issue de l'action humaine assujettie à des institutions. Considérant ces savoirs comme nécessairement assujettis à une institution, les deux auteurs (Bosch et Chevallard, 1999) proposent de les observer à travers une praxéologie formée d'une tâche, d'une technique, d'une technologie et d'une théorie.

La tâche s'exprime par un verbe représentant une action définie et attendue par le cadre institutionnel. Dans le contexte des fractions au primaire, une tâche pourrait prendre l'une des formes suivantes : représenter une fraction à partir d'un tout donné ; représenter le tout à partir d'une fraction ; comparer deux fractions de même dénominateur ; comparer deux fractions, le dénominateur de l'une est multiple du dénominateur de l'autre ; etc. Ces tâches peuvent être regroupées par catégories que l'on nommera *types de tâches.*

La technique consiste en une manière de réaliser un certain type de tâches. Cette technique peut être considérée comme routinière si l'institution considère qu'elle a été suffisamment travaillée par les élèves et qu'ils l'ont maitrisée. Ladite technique est ainsi disponible au moment de réaliser la tâche pour laquelle elle est destinée. Dans le cas contraire, nous pourrons dire que cette technique est non routinière pour l'individu. Ce caractère routinier/non routinier n'est donc pas absolu et dépend de la technique et de l'individu qui l'applique. Bosch et Chevallard (1999) intègrent la tâche et la technique en un seul bloc qu'ils nomment le bloc *pratico-technique* correspondant à ce qui est généralement appelé le savoir-faire.

La technologie constitue un discours logique servant à rendre intelligible l'utilisation de la technique dans le contexte de la tâche. La forme de la technologie varie et évolue selon l'institution et en son sein selon les époques et les moments d'étude de la technique.

La théorie quant à elle vise à rendre intelligible la technologie en l'intégrant dans un système de pensée plus général, mais demeurant cohérent. Ces deux niveaux peuvent cependant donner une réponse très semblable, voire identiques selon l'objet de recherche et le degré d'approfondissement visé. Nous parlerons alors du bloc *technologico-théorique*.

Ces éléments nous permettront de caractériser le rapport institutionnel en découpant le savoir contenu dans les documents prescriptifs et les manuels scolaires pour décrire les tâches qu'ils contiennent et les techniques mises de l'avant par l'institution pour les réaliser.

II. 3. Connaissances conceptuelles et procédurales et les mondes de pensée en mathématique

II. 3.1 Connaissances conceptuelles et connaissances procédurales

Nous pensons qu'il est possible de faire un lien entre la praxéologie de Bosch et Chevallard (1999) et la notion de connaissance conceptuelle/procédurale telle qu'elle a été présentée par Rittle-Johnson et Alibali (1999). Dans ce cas, nous associerions le bloc pratico-technique à des savoirs plutôt procéduraux et le bloc technologico-théorique à des savoirs plutôt conceptuels. Nous voyons dans cette section ce que cette mise en commun peut impliquer.

La plupart des apprentissages impliquent une articulation entre concepts fondamentaux et procédures adéquates pour résoudre des problèmes. Dans l'enseignement des fractions, plusieurs ont indiqué un déséquilibre entre la mise de l'avant des savoirs conceptuels et procéduraux (Blouin, 2002 ; Carette *et al.* 2009). Les seconds seraient apparemment plus enseignés que les premiers. La compréhension de la relation qui existe entre ces deux types de savoir reste encore à établir. Selon Rittle-Johnson et Alibali (1999), plusieurs recherches tendent à montrer que l'apprentissage des connaissances conceptuelles précèderait l'apprentissage des connaissances procédurales lors de la construction d'un objet de savoir. Les auteurs nuancent cependant ce propos, affirmant que, dans certains cas, l'apprentissage des procédures pourrait mener à une meilleure compréhension conceptuelle.

Les connaissances procédurales sont vues comme des séquences d'actions permettant de résoudre des problèmes. Il s'agit plutôt d'une connaissance des opérations et des conditions dans lesquelles elles peuvent être utilisées. Les connaissances procédurales sont sujettes à une certaine forme d'automatisation. Cette caractéristique permet à l'individu de se décharger cognitivement puisqu'une part de la connaissance appartient à des processus inconscients. Cela la rend, cependant, moins facilement verbalisable. Un élève peut donc entretenir des conceptions à l'égard d'un objet de savoir qui se limitent à la procédure. Il pourrait, par exemple être en mesure d'accomplir une tâche sans pour autant être en mesure de l'expliquer. Pour plusieurs (Blouin, 2002 ; Carette *et al.* 2009), le fait d'entretenir des conceptions associées uniquement à des connaissances procédurales fragilise l'élève puisqu'il se retrouve démuni pour s'expliquer son erreur s'il en fait une.

Les connaissances conceptuelles quant à elles correspondent aux conceptions que les élèves développent comme une forme de représentation relationnelle des concepts centraux et des principes entourant un objet donné (schémas, réseaux sémantiques ou hiérarchiques, etc.). Comme nous l'avons vu, ces conceptions peuvent correspondre ou non à l'objet de savoir défini par l'institution productrice du savoir ou celle qui a la responsabilité de son enseignement.

Pour Rittle-Johnson et Alibali (1999) ces deux types de connaissances existent sur un continuum dont les extrémités correspondent aux aspects procéduraux et conceptuels du savoir. Cependant, elles ne sauraient être, à tout moment, distinguées. Nous devons donc faire un choix pour les distinguer de façon opératoire afin de pouvoir les observer chez les élèves et dans le rapport institutionnel dans le cas spécifique des fractions. Nous pourrons éventuellement nous intéresser aux conceptions des élèves selon qu'elles relèvent plutôt d'un caractère procédural ou conceptuel en les identifiant à travers les stratégies employées dans la réalisation de différentes tâches qui leur seront proposées. Reste maintenant à définir comment peut se manifester le caractère conceptuel ou procédural des conceptions des élèves à travers les traces écrites qu'ils laissent en situation de problèmes. Nous nous référons pour ce faire aux travaux de Tall (2008).

II. 3.2 Des mondes de pensée en mathématiques

Pour Tall (2008), les conceptions sur les fractions peuvent être imaginées comme évoluant sur plusieurs niveaux. L'auteur définit trois mondes de pensée mathématique dans lesquels peut circuler l'apprenant. Le premier est le *conceptual embodied world*, le second est le *proceptual world of symbols*, le troisième est le *formal world of definition and proof*.

> The Embodied world of perception and action, including reflection on perception and action, which develops into a more sophisticated Platonic framework.
>
> The Proceptual world of symbols, such as those in arithmetic, algebra and calculus that act as both processes to do (e.g. 4+3 as a process of addition) and concepts to think above (e.g. 4+3 as the concept of sum) […]
>
> The Formal world of definitions and proof leading to the construction of axiomatic theories (Tall, 2008, p. 7).

Dans le cadre de notre analyse, nous ne nous intéresserons qu'aux deux premiers niveaux qui correspondent à la conceptualisation normale d'élèves du primaire et du début du secondaire. Le troisième niveau étant plutôt lié aux mathématiques formelles étudiées au postsecondaire.

Si Tall (2008)[2] reconnait que les concepts mathématiques se forment en chaque monde avec certaines similarités, chacun de ces mondes implique un mode opératoire, des règles de validités et des formes de vérités qui lui sont propres. Ainsi, le *conceptual-embodied world* implique des conceptions directement perceptibles et rattachables à des objets, concrets, réels, existant dans le monde. Il est possible, par exemple, de penser à des objets mathématiques qui ont été distingués par des caractéristiques physiques (ex : la fraction $\frac{1}{2}$ correspond à l'action de diviser une chose en deux).

Par ailleurs, dans le *proceptual-symbolic world*, la répétition routinière de processus élémentaires entraine des compressions mentales successives qui s'encapsulent dans des objets pensables via des symboles. Chaque symbole renvoie ainsi, à la fois, à un concept, mais également à un ou

[2] La traduction du modèle que propose Tall (2008) est empruntée de Najar (2010).

plusieurs processus associés à ce concept. Tall (2008) nomme ces objets mathématiques composés de concepts et de processus et associés aux symboles des *procepts*. Par exemple, le symbole $\frac{1}{3}$ renvoie au concept d'une fraction ou d'un nombre rationnel, mais il renvoie également à l'action de partager une unité en trois parts égales. À partir de ces éléments, l'élève organise sa pensée autour du symbole pour expliquer l'apparition, l'organisation et la généralisation de nouveaux *procepts* ayant trait à un même objet. Dans le cas qui nous intéresse, il s'agira de l'objet fraction. Lorsqu'il se trouve dans ce niveau de pensée, l'élève n'est pas encore en mesure de concevoir le sens du symbole $\frac{a}{b}$ dans toute sa généralité et de l'utiliser pour résoudre des problèmes sans se référer à des situations ou à des actions concrètes. Cela se produira selon Tall dans le *Formal world of definitions and proof*.

II. 3.3 Liens entre la notion de connaissances conceptuelles/procédurales et les différents mondes de pensée

Selon nous, ces différents mondes que nous sommes allés chercher chez Tall (2008) rejoignent la notion de connaissances procédurales et conceptuelles que nous avons retrouvée chez Rittle-Johnson et Alibali (1999). Si les seconds nous permettent de caractériser les connaissances d'un point de vue général, le premier nous permet de les définir dans un contexte spécifiquement mathématique. Plus encore, la théorisation de Tall (2008) permet d'expliquer le fonctionnement du passage d'un niveau de pensée à un autre.

Nous pensons qu'il est possible d'associer le premier monde de Tall (2008) aux connaissances procédurales définies par Rittle-Johnson et Alibali (1999). En effet, dans le premier monde (*conceptual-embodied world*), les objets sont distingués principalement par leurs caractéristiques physiques ou encore sont reconnus comme le résultat d'une action. Les connaissances procédurales permettent ainsi d'accomplir une tâche sans nécessairement être en mesure de l'expliquer. Dans le *conceptual-embodied world* les objets mathématiques sont intégrés de manière routinière dans un contexte d'application sans être nécessairement appuyés par un raisonnement dans l'action. Dans les deux cas, le cadre de pensée est plutôt intuitif et centré sur une séquence d'actions permettant de résoudre une situation. On rejoint ainsi les processus inconscients et l'automatisation associée aux connaissances procédurales. Afin de tenir compte de ces deux notions au moment d'observer les caractéristiques du rapport institutionnel et des conceptions des élèves, nous parlerons d'une stratégie procédurale lorsque, pour résoudre une tâche, un élève applique directement une technique apprise de façon routinière sans qu'il soit requis de mettre en relation ladite technique avec d'autres techniques ou connaissance ou encore d'expliquer le raisonnement à l'écrit. Dans un contexte d'apprentissage, une telle stratégie est susceptible de se manifester dès qu'une technique est associée à une tâche particulière (considérée elle-même comme routinière) et présentée comme unique moyen pour la réaliser. Cette technique peut être présentée sans justification ou explication quant à la raison pour laquelle elle est employée dans le contexte désigné et s'automatise progressivement à mesure qu'elle est utilisée pour résoudre des tâches similaires à la première qui deviendront routinières.

Le passage du *conceptual-embodied world* au *proceptual-symbolic world* se fait à partir de ce que Tall (2008) a nommé des *embodied concepts* et des *procepts*. En intériorisant la procédure associée à un objet mathématique, l'élève arrive progressivement à lui donner une définition pragmatique verbale. Tall (2008) nomme ce type de définition *embodied concept* (la fraction $\frac{3}{4}$ peut être représentée par un carré partagé en quatre parts égales et dont trois de ces parts sont sélectionnées ; deux fractions sont équivalentes si leur représentation dans une figure continue recouvre une surface équivalente ; etc.). À mesure que de nouvelles procédures sont exercées sur ces *concepts*, l'élève arrive à établir des liens entre eux et à les catégoriser (ex : en reconnaissant que les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{50}{100}$, etc. sont équivalentes). Pour Tall (2008), l'élève développe ainsi progressivement un raisonnement déductif à partir de ces *embodied concepts*.

Par la suite, la répétition réfléchie de procédures élémentaires relatives à un concept donné, qui au départ se faisait de façon automatique, s'intériorise chez le sujet pour donner lieu, dans le monde *proceptuel*, à des concepts désignés par des symboles. Dans ce second monde, chaque objet est l'effet d'un processus. Cet objet peut être distingué au moyen d'un symbole qui représente à la fois le concept objet et le processus qui était à l'origine de sa production ou qui le caractérise. Ce double rôle du symbole, représentant, à la fois, « un concept et un processus » se nomme *procept élémentaire*. Pour Tall (2008) un *procept* est une collection de *procepts élémentaires*. Ainsi, les symboles 1/2, 2/4, 9/18, 0.5, … sont des procepts élémentaires du procept « un demi ».

Par ailleurs, tout comme nous avons associé le premier monde de Tall (2008) aux connaissances procédurales de Rittle-Johnson et Alibali (1999) et au bloc *pratico-technique* de Bosch et

Chevallard (1999), nous associons le second monde (*proceptual-symbolic world*) aux connaissances conceptuelles et au bloc *technologico-théorique* (Bosch et Chevallard, 1999). Pour Tall (2008), le *proceptual-symbolic world* implique la reconnaissance d'un ensemble de *procepts* liés à des symboles. Quand on parle de connaissances conceptuelles, on parle de représentations relationnelles entre des concepts manifestés par des schémas, des réseaux sémantiques, hiérarchiques, etc. Cela pourrait correspondre aux liens organisationnels évoqués par Tall (2008). Ainsi, toujours dans cet objectif de tenir compte de ces deux notions au moment d'observer les caractéristiques du rapport institutionnel et des conceptions des élèves, nous parlerons de stratégies conceptuelles lorsque les techniques ou les connaissances utilisées par l'élève sont mobilisées et mises en relation de façon autonome afin de résoudre la tâche. Dans un contexte d'apprentissage, une telle stratégie est susceptible de se manifester dès qu'un élève se retrouve confronté à une tâche inédite, nécessitant pour lui de faire un choix parmi des techniques connues afin de trouver celle qui sera la moins couteuse ou encore d'avoir recours à une stratégie originale, employant une combinaison de techniques et de connaissances ficelées dans une stratégie cohérente. Dans ce cas, la justification ou l'explication de la raison pour laquelle une technique est privilégiée plutôt qu'une autre est connue et comprise par l'élève.

En tenant compte de ce que nous venons de voir, nous pouvons conclure que lorsqu'une stratégie procédurale est mobilisée, le sujet conçoit les *procepts* élémentaires comme des actions isolées. Il éprouve de la difficulté à établir, de façon autonome (sans indication ou intervention), des liens entre tous les symboles, à les concevoir comme représentant d'un même objet mathématique, et surtout à faire un choix approprié pour résoudre un problème. Cet élève n'arrivera généralement pas à faire intervenir des éléments extérieurs à la situation. À l'inverse, un élève qui arrive, par lui-même, à faire des liens entre les différents *procepts élémentaires* pour les assujettir à un *procept* (comme c'est le cas dans l'exemple que nous avons donné avec la fraction $\frac{1}{2}$) est un élève qui mobilise plutôt un niveau conceptuel de pensée. Cet élève sera également capable de faire intervenir des éléments qui sont extérieurs à la situation parce qu'il sera en mesure d'associer les différents *procepts* qui lui sont présentés à d'autres qui lui sont connus.

Notons que le fait de parler d'un niveau procédural ou conceptuel relativement à une stratégie de résolution d'une tâche n'implique pas une caractéristique inhérente à la tâche ou à la technique de sa réalisation. Une même technique, peut être considérée comme conceptuelle, à un certain niveau d'enseignement, et procédurale à un niveau plus élevé, lorsque, par exemple, la technique, au fil du temps ou des années d'enseignement, sera automatisée et devient routinière. Cela implique que, pour caractériser une stratégie, du point de vue procédural ou conceptuel, nous devons tenir compte de la progression des apprentissages relativement au thème des fractions qui concerne notre recherche, et cela, telles que décrites dans les documents officiels du MEES.

II. 3.4 Le rapport institutionnel et les niveaux de pensée

Le caractère conceptuel ou procédural d'une stratégie peut être observé en fonction du rapport institutionnel puisque c'est ce même rapport institutionnel qui détermine le caractère routinier ou non des techniques qui composent ces stratégies. C'est à partir des savoirs essentiels présents dans les documents prescriptifs et des techniques mises de l'avant dans les situations d'apprentissages vécues en classe (situations proposées dans les manuels de mathématique au primaire) que nous serons à même de déterminer si une technique correspond ou non à une procédure institutionnelle automatisée.

En revenant sur les définitions que nous avons données des approches d'enseignement transmissives et socioconstructivistes, rappelons que l'approche transmissive était fondée sur une épistémologie plutôt positiviste et tendait à favoriser un ensemble de méthodes et de procédures à suivre dans un apprentissage segmenté en silo alors que l'approche par résolution de problèmes était plutôt fondée sur une épistémologie socioconstructiviste et tendait à favoriser la construction de sens dans une perspective holistique (Gagnon, 2015).

Dans cette logique, une approche transmissive aurait probablement tendance à favoriser l'automatisation de techniques institutionnalisées. Au contraire, l'approche par résolution de problème aurait probablement tendance à miser sur la recherche d'une solution originale dans laquelle des techniques autres que la technique institutionnalisée sont mobilisées. L'objectif serait alors de miser sur une compréhension du sens des savoirs.

Ainsi, un rapport institutionnel plus proche de l'approche transmissive s'illustrerait sans doute par des situations favorisant l'application directe de méthodes et de procédures enseignées et devenues routinières. Une telle approche ne laisse pas à l'élève l'initiative de réfléchir à des moyens originaux de résolution des tâches mobilisant des techniques et des éléments de savoirs implicites à la situation. Ce genre de situation correspondrait plutôt à un niveau de pensée procédural. À l'inverse, un rapport institutionnel plus proche de l'approche par résolution de problèmes s'illustrerait sans doute par des situations incitant l'élève à réfléchir et à produire des stratégies de résolution mettant en œuvre des liens entre les éléments impliqués dans la situation et des éléments extérieurs à celle-ci. Ce genre de situation correspondrait plutôt à un niveau de pensée conceptuel.

II. 3.5 Les conceptions des élèves et les niveaux de pensée

L'analyse du rapport institutionnel devrait nous permettre d'établir un certain nombre de techniques qui seront considérées routinières ou non routinières pour des élèves terminant leur 5e année du primaire au Québec. Les caractéristiques de ces techniques nous permettront de déterminer le caractère des stratégies employées par les élèves (stratégies procédurales ou conceptuelles) dans un ensemble de situations que nous aurons conçues à cet effet. Pour ce faire, nous prévoyons tout d'abord faire une analyse conceptuelle de la notion de fraction qui nous permettra de décrire les différents sens et les différentes propriétés des fractions. Cette analyse nous permettra ensuite de construire un test comportant un ensemble d'items portant sur les divers aspects conceptuels (définitions et propriétés) des fractions. Le test visera à caractériser les conceptions des élèves vis-à-vis des fractions et de leurs propriétés, et ce, en regardant si, pour réaliser une tâche, l'élève applique une stratégie procédurale ou conceptuelle, telle que définie dans les sections précédentes.

II. 3.6 Résumé des éléments soulevés dans le cadre de référence

Afin d'aider le lecteur à mieux visualiser la manière dont nous avons construit notre cadre de référence, nous présentons ici un schéma qui résume ces éléments ainsi que la manière dont nous avons choisi de les articuler pour former une structure cohérente qui soutient nos choix d'opérationnalisation et qui nous permet de poser nos questions spécifiques. Ce schéma est présenté à la figure 1 :

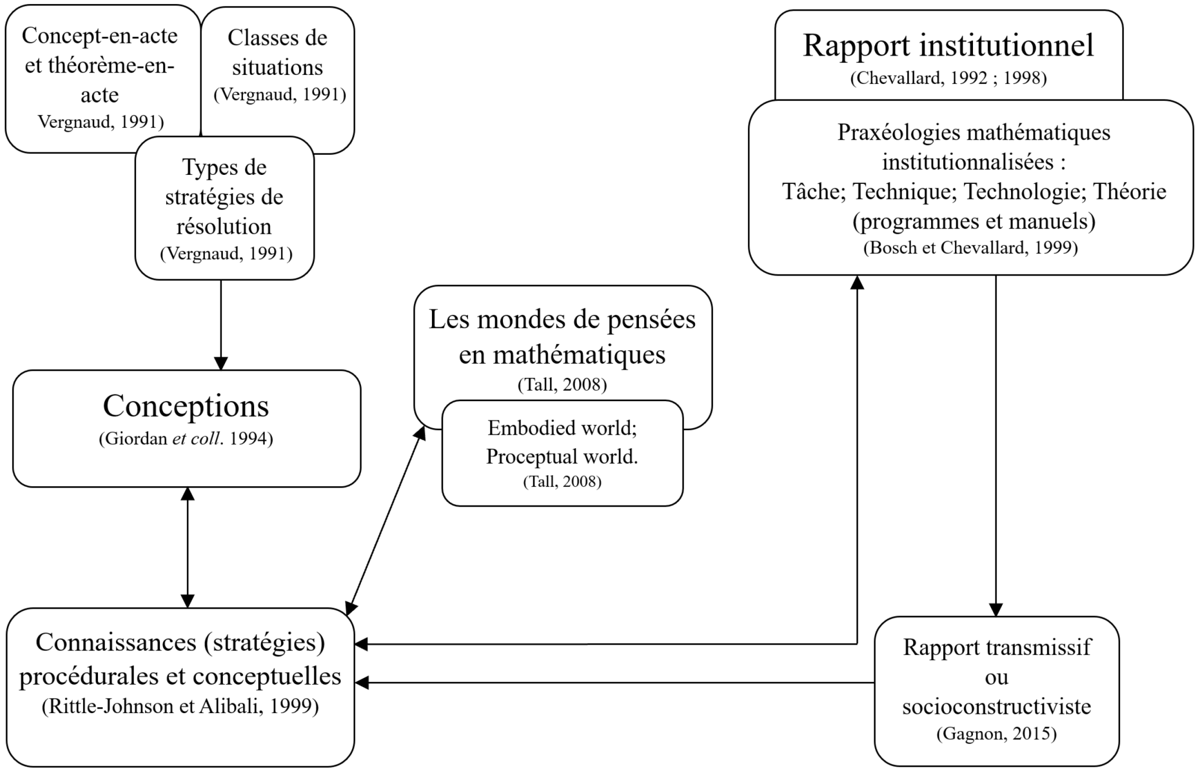


Figure 1 : Organisation résumée des différents concepts soulevés dans le cadre de référence.

Les conceptions présentées largement par Giordan et ses collaborateurs (1994) sont vues, selon la perspective de Vergnaud (1991), comme étant nécessairement composées de concepts-en-actes et de théorèmes-en-actes, eux-mêmes, apparaissant nécessairement en situation, soulevant la nécessité d'identifier des classes de situations susceptibles de faire émerger différents types de stratégies, qui formeront les témoins des conceptions des élèves. Ces stratégies peuvent revêtir un caractère plutôt procédural ou plutôt conceptuel (Rittle-Johnson et Alibali, 1999). Ces éléments sont, eux-mêmes caractérisés par les différents mondes de pensées de Tall (2008). À ce sujet, nous avons particulièrement ciblé l'« embodied world » (caractéristique du procédural) et le « proceptual world » (caractéristique du conceptuel). Cela dit, les stratégies procédurale et conceptuelle peuvent également être rattachées à la question du rapport institutionnel de Chavallard (1992 ; 1998) par l'analyse des praxéologies mathématiques (Bosch et Chevallard, 1999) dont relèvent les types de tâches associées aux différentes stratégies. Enfin, le rapport institutionnel au savoir peut être associé à une épistémologie plutôt transmissive ou socioconstructiviste. Cette épistémologie favorise un travail plutôt procédural (épistémologie transmissive) ou conceptuel (épistémologie socioconstructiviste) qui émerge dans les stratégies des élèves.

II. 4. Discussion et questions spécifiques

Afin de permettre au lecteur de mieux visualiser la manière dont notre cadre de référence nous permet de poser nos questions spécifiques, nous avons placé ici un schéma qui résume les choix d'opérationnalisation que nous avons faits à partir des concepts soulevés (figure 2) :

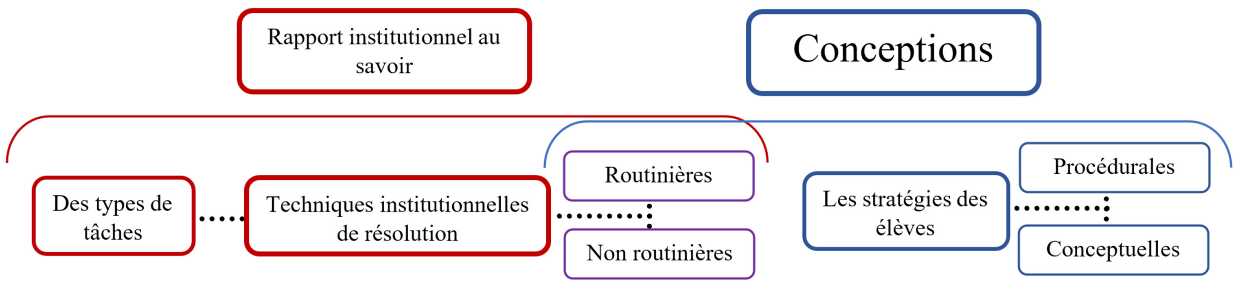


Figure 2 : Schéma d'opérationnalisation des concepts soulevés dans le cadre de référence.

Les conceptions des élèves peuvent être observées par les tracent écrites qu'ils laissent dans la résolution de certains types de situations, principalement en ce qui a trait aux types de stratégies mises en œuvre dans ces situations. De son côté, le rapport institutionnel peut être observé, entre autres, par les tâches mises de l'avant pour représenter le savoir. Ces deux éléments peuvent être mis en relation par les techniques de résolution. Ces dernières permettent de résoudre les différentes tâches observables dans les documents institutionnels et peuvent, par leur caractère routinier ou non, servir de critères afin de définir les différentes stratégies mobilisées en situation par les élèves, à savoir si elles sont plutôt procédurales ou conceptuelles.

Tout cela nous amène à formuler une hypothèse plus précise en ce qui concerne notre intention de recherche. Nous pensons que les conceptions des élèves au sujet des fractions sont susceptibles d'être influencées par le rapport institutionnel au savoir qui s'incarne à travers un caractère pouvant être soit plutôt conceptuel ou plutôt procédural. Ce rapport institutionnel peut être sujet à des conflits internes en ce qui concerne ses multiples dimensions (documents institutionnels, enseignants, matériels didactiques). Dans cette recherche cependant, nous nous limiterons à l'observation du rapport institutionnel dans la documentation qui le représente, soit les documents prescriptifs et les manuels. Pour vérifier cette hypothèse, nous formulons maintenant les questions spécifiques suivantes :

II. 4.1 Questions sur le rapport institutionnel

Quelles sont, selon les documents du PFEQ et les manuels scolaires, les connaissances et les tâches sur les fractions supposées enseignées et apprises jusqu'à la classe de 5e année du primaire?

II. 4.2 Question sur les conceptions

Comment se caractérisent les stratégies mobilisées par des élèves de 5^{e} année devant des tâches portant sur la notion de fraction, du point de vue procédural/conceptuel ?

II. 4.3 Question à propos du lien entre conceptions et rapport institutionnel

Quels liens peuvent être faits entre les attentes institutionnelles concernant l'enseignement et l'apprentissage des fractions en fin de 5^{e} année du primaire et les stratégies mobilisées par les élèves de cette classe pour résoudre des tâches impliquant les fractions?

II. 4.4 Objectifs spécifiques

Pour répondre à ces questions, nous avons formulé une série d'objectifs spécifiques :

- Dégager le caractère routinier ou non routinier de tâches (techniques) impliquant la notion de fractions prescrites par les documents institutionnels (pour des élèves de 5^{e} année).
- Dégager les techniques prévues par les documents institutionnels qui permettent de résoudre les types de tâches ciblées.
- Construire un outil de cueillette de données permettant de déterminer le caractère procédural ou conceptuel des stratégies mobilisées par les élèves.

III. Méthodologie

Notre objectif n'est pas de relever des données qui auront une valeur statistiquement représentative dans la population, mais plutôt de vérifier l'applicabilité de deux concepts qui sont généralement traités séparément. À savoir, les conceptions des élèves et le rapport institutionnel au savoir. Nous nous inscrivons donc dans un cadre exploratoire et explicatif, voire compréhensif, propre aux études de cas. Ce type de recherche est effectivement décrit par Thouin (2014, p. 280) comme l'examen d'un ou plusieurs cas particuliers d'une façon relativement approfondie. À ce titre, nous nous inscrivons dans une approche qualitative. La posture épistémologique dans laquelle nous nous inscrivons en tant que chercheurs en est une socioconstructiviste alors que nous nous intéressons à la construction de savoirs scientifiques pragmatiques, utiles dans des contextes définis (Gagnon, 2015).

III. 1. Participants à la recherche

En ce sens, nous nous sommes contentés, dans le cadre de ce projet, de mener nos observations sur un petit nombre de classes. Nous avons approché plusieurs écoles primaires de la ville de Rouyn-Noranda en présentant notre projet à des enseignantes de cinquième année pour susciter des volontaires.

Nous avons choisi la cinquième année pour éviter de prendre des élèves du premier et du second cycle. Lesquels sont plus à risque de commettre des erreurs tenant leur origine de conceptions autres que celles sur les fractions (conceptions construites à propos des entiers par exemple). Nous avons choisi des élèves plus vieux dans l'espoir que ces conceptions aient eu un impact moins significatif si elles en ont eu un. De même, nous avons évité de choisir des élèves de sixième année afin de limiter les impacts cumulés des multiples enseignements dispensés par des enseignants différents. Nous pensons donc que les effets ont été plus visibles et que les limites qu'impose l'échantillon ont été moins manifestes dans des classes de cinquième année.

Dans le cadre de ce projet, deux enseignantes ont accepté de participer avec leurs classes respectives. Les deux classes se retrouvent dans deux écoles différentes et les enseignantes n'ont pas l'occasion de se côtoyer dans le cadre de leur travail. L'une des enseignantes en est à sa vingtième année d'expérience au total avec 9 ans en cinquième année. L'autre enseignante en est à sa première année d'enseignement. Dans la classe de la première enseignante, 19 élèves sur un total de 24 ont accepté de participer. Dans la classe de la seconde, 16 sur un total de 18 ont accepté de participer, portant le total de notre échantillon à 35 élèves. Le test a été passé à la fin du mois de juin afin de nous assurer que les élèves des deux classes aient reçu le maximum des enseignements qu'ils pouvaient recevoir à propos des fractions en 5e année du primaire.

Le fait d'avoir deux classes nous a permis d'observer les nuances dans l'effet des choix d'enseignement de chaque enseignante sur le travail des élèves dans le questionnaire. Cela dit, nous nous appliqueront maintenant à décrire les étapes de mise en œuvre qui nous ont permis de répondre à chacune des questions spécifiques identifiées.

III. 2. Étapes de mise en œuvre du projet

Pour répondre aux questions spécifiques que nous avons identifiées dans le cadre de référence, nous avons établi un plan de travail et avons décomposé ce dernier en cinq étapes. Nous avons commencé par mener une analyse conceptuelle de la notion de fraction afin de bien cerner le sens de la notion de fraction d'un point de vue mathématique et didactique en nous référant à ce qu'en dit la littérature. Cette analyse conceptuelle nous a permis de concevoir une grille d'analyse des documents officiels qui traitent de l'apprentissage des fractions et une autre grille pour analyser le matériel didactique utilisé par les enseignantes. À la recommandation de Thouin (2014), nous avons prévu ces grilles pour être émergentes. Nous les avons, en ce sens, modifiées et améliorées au fur et à mesure que notre recherche a progressé. Ce travail nous a permis de construire une liste de tâches et de techniques en les catégorisant selon qu'elles appartenaient plutôt à une catégorie de techniques routinières (l'élève applique la technique de façon automatique dans des tâches qu'il reconnait) ou non routinières (l'élève doit mobiliser une technique non automatisée devant une tâche peu familière).

Ces techniques ont, elles-mêmes, servi à définir le caractère procédural (application directe de techniques routinières institutionnalisées) ou conceptuel des stratégies mobilisées par les élèves (mobilisation et mise en relation de techniques routinières et non routinières dans une mise en relation tenant compte d'une situation particulière). Ces éléments nous ont permis de répondre à notre première question spécifique. Cela nous a, par la suite, permis de préparer le terrain pour la construction du test, destiné à faire émerger les conceptions des élèves à l'égard des fractions.

Ce test comporte 11 tâches de représentation ou de comparaison de fractions réparties en 7 items. Chacune de ces tâches a été spécifiquement construite dans l'objectif de faire émerger des réponses correspondant à des stratégies mobilisant des techniques spécifiques, identifiées à l'aide de notre analyse conceptuelle et de notre analyse des documents institutionnels. L'objectif était de couvrir un ensemble relativement large de techniques possibles. Pour chaque tâche, nous avons effectué une analyse *a priori* afin de déterminer un ensemble de stratégies envisagées s'inscrivant dans l'une ou l'autre des catégories de stratégies (procédurale ou conceptuelle) que nous avons définies précisément à l'aide de notre analyse des documents institutionnels. Nous avons ensuite observé les réponses des élèves en nous basant sur ces critères. Cette étape visait à nous permettre de répondre à notre seconde question spécifique.

Enfin, ces observations ont été croisées dans un tableau quantitatif tenant compte des réponses correctes, erronées et partielles en fonction du type de stratégies mobilisé. Ces éléments nous ont permis de répondre à notre troisième et dernière question spécifique pour, finalement, être en mesure de brosser un portrait des relations pouvant se dégager entre le rapport institutionnel au savoir et les conceptions des élèves au sujet des fractions en fin de 5e année du primaire. Nous permettant ainsi de répondre à notre question générale de recherche.

III. 3. Limites du projet de recherche

Par sa faible amplitude et par les choix méthodologiques qu'il implique, ce projet de recherche comporte plusieurs limites. D'abord, l'étude du rapport institutionnel est limitée aux documents prescriptifs et aux manuels scolaires et ne prend pas en considération les autres éléments intervenant dans ce rapport institutionnel (notamment le rapport au savoir des enseignantes et le contexte d'enseignement). Par ailleurs, ce projet ne peut aspirer à une quelconque représentativité statistique puisque l'échantillon d'élèves et d'enseignantes est très petit. De plus, les deux écoles choisies sont dans la même région alors que l'effet des facteurs géographiques et socio-économiques n'est pas pris en considération. Le projet se limite à explorer l'éclairage qu'apporte la mise en relation des concepts de conceptions et de rapport institutionnel devant la persistance des erreurs et conceptions erronées des élèves qui se manifestent dans des situations impliquant des fractions. Cela dit, le choix de ne pas inclure la perspective directe des enseignants dans notre exploration du rapport institutionnel limite également, dans une certaine mesure, ce que nous pouvons interpréter de nos résultats.

Les outils de cueillette de données que nous avons choisis comportent, eux aussi, des limites. Étant donné le contexte qui diffère, il est possible que les élèves répondent différemment au test de la manière dont ils répondraient s'ils étaient soumis à une évaluation certificative. Certains élèves répondront peut-être moins sérieusement alors que d'autres ressentiront moins la pression institutionnelle et performeront peut-être mieux. Nous rappelons aussi les limites inhérentes à l'année scolaire des élèves. Lesquelles ont mené à notre choix de travailler avec des élèves de cinquième année. Nous cherchions le meilleur compromis entre le maximum de compréhension des savoirs sur les fractions et le minimum d'influence d'un enseignement extérieur à celui des enseignantes volontaires. Enfin, le choix de recueillir les données par un test crayon/papier implique lui-même des limites en ce qui concerne les élèves qui éprouveraient des difficultés en lecture et en écriture. Nous pensons toutefois que la forme que prend le test s'apparente à une forme que les élèves ont l'habitude de voir. Pour nous en assurer, les enseignantes participantes ont été consultées au moment de construire l'outil de cueillette de données.

IV. Analyse conceptuelle de la notion de fraction

Les notions de conceptions et de rapport institutionnel que nous avons définies dans les sections précédentes ont soulevé le besoin d'explorer plus en détail certains éléments appartenant à la notion de fraction. C'est donc à travers une analyse conceptuelle de cette dernière que nous pourrons définir la fraction, non seulement dans une perspective purement mathématique, mais également en ce qui concerne les différents sens de la fraction, la construction de la notion de fraction chez les élèves, les types de nombres (fraction familière, peu familière, impropre, nombre fractionnaire) et les types de représentations picturales (continues et discrètes). Tout cela nous permettra de concrétiser notre cadre de référence en appliquant spécifiquement les notions de conceptions et de rapport institutionnel au contexte des fractions.

IV. 1. Définition mathématique de la fraction

Nous décrivons dans cette section, une définition de la fraction tirée du savoir mathématique. Pour appuyer nos affirmations, nous nous sommes référés aux définitions que proposent Côté et ses collaborateurs (2002). Nous avons cependant reformulé ces définitions pour les intégrer au texte de façon plus fluide.

La fraction est une manière d'écrire un nombre rationnel. Autrement dit, tout nombre rationnel est un nombre qui peut nécessairement s'écrire sous la forme: $\left[\frac{a}{b} \text{ où } \{a, b\} \in \mathbb{Z} \text{ et } b \neq 0\right]$ (Côté *et al.* 2002, p. 79). L'écriture fractionnaire peut prendre deux formes : la fraction (ex : $\frac{1}{2}$) et les nombres fractionnaires (ex : $1\frac{1}{2}$). Lorsqu'une fraction exprime une quantité supérieure à 1, on parle de fraction impropre (ex : $\frac{3}{2}$). Cette écriture est intimement liée à l'écriture décimale. Laquelle permet de représenter, de façon exacte, tout nombre décimal (ex : 0,4; 1,5; etc.), et de façon rapprochée, tout nombre rationnel non décimal (ex : $\frac{1}{3}$ = 0,333…). Un nombre décimal peut se définir, en ce sens, comme tout nombre rationnel qui peut s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 ($\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$, $\frac{7}{20} = \frac{35}{100}$, $\frac{9}{125} = \frac{72}{1000}$, etc.).

La relation d'équivalence est donc constitutive de la notion de fraction en tant que nombre rationnel. Il s'agit d'une règle attachée au concept : pour chaque nombre $\frac{a}{b}$ où a $\neq$ 0, il existe une infinité d'équivalences $\frac{a'}{b'}$. L'équivalence entre ces nombres se représente par une relation multiplicative ($a \times b' = b \times a'$). La relation fractionnaire implique également la possibilité de former un couple $a : a'$ où $a \neq 0$. De la même manière, ce couple peut former une relation de proportionnalité avec un autre couple (ex : $b : b'$) si, et seulement si, $a \times b' = a' \times b$ (Côté *et al.* 2002, p. 81).

Enfin, la fraction en tant que nombre rationnel possède les caractéristiques associées aux nombres de son ensemble ($\mathbb{Q}$). Lesquelles diffèrent des caractéristiques des nombres appartenant à l'ensemble des entiers ($\mathbb{Z}$). D'abord, dans l'ensemble des entiers, chaque nombre possède un et un seul successeur immédiat alors qu'on ne peut définir un successeur immédiat à un nombre rationnel. Par ailleurs, la construction des nombres rationnels non entiers permet de répondre au besoin de résoudre toute équation $ax = b$ (où a et b sont entiers et a est différent de zéro) qui ne trouve pas sa solution dans $\mathbb{Z}$. Par exemple, il n'existe aucune solution dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ à l'équation $2x = 3$ (mais, il existe une solution dans $\mathbb{Z}$ à l'équation $2x = 6$; dans ce cas $x = 3$). Cet axiome permet d'assurer une solution à toute équation, précédemment nommée, $ax = b$. Cette solution est, en l'occurrence, $\frac{b}{a}$. Ainsi, dans toute équation $ax = 1$ où a est différent de zéro, il existe un inverse multiplicatif où x est équivalent à $\frac{1}{a}$.

IV. 2. Les différents sens de la fraction

La fraction est une manière d'écrire un nombre appartenant à l'ensemble des rationnels, lequel est une extension de l'ensemble des entiers qui donne une solution à toute équation ayant la forme $ax = b$ (où a et b sont entier et où x est différent de zéro). La fraction permet de représenter les nombres rationnels décimaux. C’est-à-dire les nombres pouvant s’exprimer par un quotient dont le diviseur est une puissance de deux, cinq ou dix. Elle permet également de représenter les rationnels non décimaux. Par sa nature et sa forme, la fraction est intimement liée au concept d’équivalence.

La fraction peut prendre différents sens selon différents types de situations. Plusieurs auteurs ont cherché à identifier ces significations et ces situations pour les associer à une certaine nomenclature (Kieren 1989 ; Nunes et Bryant, 1996 ; DeBlois, 2011). Les recherches consultées identifient entre 4 et 7 différents sens possibles à la fraction. La raison qui explique une telle diversité tient plutôt du caractère générique ou spécifique des catégories que de distinctions réelles dans les sens de la fraction considérés par les auteurs. Par exemple, ce que Nunes et Bryant considèrent comme le sens « partie-tout » peut être considéré par Kieren (1989), tantôt comme le sens « partie-tout », tantôt comme le sens « mesure » selon les critères qu’ils ont définis. De même, si DeBlois (2011) fait une distinction entre les sens « partie-tout » et le sens partie d’un ensemble, les autres auteurs considèrent tout de même ces distinctions en les incluant cependant à l’intérieur du sens partie-tout (Kieren, 1989 ; Nunes et Bryant, 1996).

Ces significations de la fraction ne sont pas étanches, mais correspondent plutôt à des repères. Par ailleurs, le fait qu’une situation soit identifiée plutôt à un sens ou à un autre n’empêche pas qu’elle puisse être résolue en utilisant une conception qui révèle une autre interprétation. Nous en verrons des exemples dans ce qui suit.

Le programme de formation de l’école québécoise (2006) prévoit que les élèves du primaire soient exposés sans être évalués de façon sommative à trois sens de la fraction : le sens partie-tout, le sens quotient et le sens rapport. Les autres sens étant vus plus tard dans le parcours scolaire. Cet élément constitue un choix institutionnel qui pourrait faire l’objet d’une analyse, par exemple, dans une recherche en éducation comparée. Cependant, dans le contexte de ce projet de recherche, cela servira de cadre pour déterminer les limites dans lesquels nous irons observer les conceptions des élèves. Dans ce cas-ci, nous prendrons tout de même le temps de définir brièvement les sens opérateurs et mesure puisqu’ils risquent d’apparaître, même si c’est seulement de façon implicite, dans les tâches que nous concevrons pour recueillir nos données.

IV. 2.1 Fraction partie-tout : situations et stratégies d'élèves

Le sens partie-tout correspond à la fraction vue comme un tout fractionné ou duquel on prélève ou dénombre un certain nombre de parts égales (ex : considérer les trois quarts d'un gâteau revient à fractionner ce dernier en quatre parties égales et à en sélectionner trois). On pourrait également considérer l'expression suivante : $a \times \frac{1}{b}$. Dans cette expression, le 1 désigne le tout, le b, désigne le nombre de parties en lesquelles le tout est divisé. $\frac{1}{b}$ désigne l'une de ces parties et a désigne le nombre de parties à considérer dans la fraction $\frac{a}{b}$. Le partage dans le sens partie-tout peut se faire sur une grandeur continue (longueur, surface (aire), volume) ou discrète (collection d'éléments). La signification partie-tout implique une relation constante entre les deux termes a et b. Chacun n'a de signification que par rapport à l'autre.

Dans une fraction représentée par une figure continue, la grandeur des parties dépend de la valeur du diviseur. De plus, deux fractions sont considérées équivalentes si elles représentent la même grandeur, longueur ou surface, etc., d'un tout ou si elles représentent la même quantité d'une collection. Par exemple, 7 parties d'un objet ou d'une collection divisée en 10 parties égales sont équivalentes à 14 parties du même objet ou de la même collection divisée en 20 parties égales. Ce genre de situations de comparaison de fractions pourrait ainsi révéler certaines conceptions. Par exemple, un élève qui doit comparer $\frac{7}{10}$ et $\frac{7}{20}$ pourra utiliser une procédure pour les amener sur le même dénominateur. Il pourrait également affirmer que la première est plus grande parce que la grandeur totale est séparée en moins de parts alors que l'on prend le même nombre de part pour les deux fractions.

La relation entre la partie sélectionnée et le tout peut impliquer d'identifier les parties à partir d'un tout. Houle (2016) affirme, cependant, que l'on peut aussi chercher le tout à partir des parties sélectionnées. Par exemple, il est possible d'imaginer un rectangle et d'affirmer que ce rectangle représente les $\frac{3}{5}$ d'un plus grand rectangle. On se demandera alors ce que représenterait la grandeur totale.

IV. 2.2 Fraction Quotient : situations et stratégies d'élèves

La fraction vue comme un quotient s'intéresse au nombre représentant le résultat de l'opération de la division du numérateur par le dénominateur. Cette perspective réconcilie, en quelques sortes, les écritures fractionnaire et décimale. C'est ainsi que l'on pourra écrire que $\frac{8}{4} = 2$ ou encore que $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ La fraction vue comme un quotient rejoint la signification partie-tout en ce que toutes deux impliquent un partage.

Cela dit, le sens quotient peut également impliquer un sens groupements. Par exemple, si l'on veut partager un ensemble de 12 objets à 4 personnes. Le sens partage implique de diviser l'ensemble en 4 sous-ensembles contenant chacun 3 objets et de distribuer un sous-ensemble à chacune des quatre personnes. Le sens groupement, de son côté, permet de considérer la division de cet ensemble en constituant 3 sous-ensembles contenant chacun 4 objets. Dans ce cas, chaque personne aura droit à un objet dans chaque ensemble, soit 3 objets également. Dépendamment des situations, le sens quotient peut donc être valable autant pour des collections continues que discrètes.

La fraction vue comme un quotient prend réellement tout son sens quand vient le temps de diviser une grandeur discrète par une autre grandeur discrète lorsque la première est plus petite que la seconde ou lorsqu'aucune n'est un multiple de l'autre. Dans ce cas, la situation force le fractionnement de l'unité. Par exemple, s'il y a trois biscuits à partager entre quatre personnes, le sens quotient dira que chaque personne peut recevoir $\frac{3}{4}$ d'un biscuit, soit $3 \div 4$. Un élève pourrait, cela dit, manifester une conception s'apparentant au sens partie-tout en séparant d'abord les biscuits en deux pour en distribuer une moitié à chaque personne puis en séparant les deux moitiés restantes en deux à nouveau.

IV. 2.3 Fraction rapport : situations et stratégies d'élèves

Le sens rapport implique une relation entre grandeurs de même nature. Cette relation peut en être une de partie à partie (ex. : 3 billes rouges en relation avec 4 billes bleues, pour un total de 7 billes) ou encore de partie à un tout (ex. : 3 billes rouges en relation avec un total de 7 billes rouges ou bleues). La relation partie à partie est caractéristique du sens rapport alors que l'on retrouve la relation partie à un tout dans d'autres interprétations de la fraction.

Contrairement au sens partie-tout, le fractionnement et le partage n'est pas au centre de cette signification de la fraction. Cependant, tout comme le sens partie tout, le sens rapport entretient un lien étroit avec la relation d'équivalence. Dans ce cas, on parlera de relation de proportionnalité.

Par exemple, dans une relation partie à partie, la fraction comme rapport s'exprime souvent en comparant deux couples de nombres suivant la relation exercée à l'intérieur des couples. Ainsi, si dans un sac de billes, il y a 12 billes rouges et 16 billes bleues et que, dans un autre sac, il y a 15 billes rouges et 20 billes bleues, nous pourrons considérer la relation suivante :

Dans le premier sac, il y a 12 billes rouges pour 16 billes bleues, soit 12 : 16 ou encore un rapport de 3 pour 4. Dans le second sac, il y a 15 billes rouges pour 20 billes bleues, soit 15 : 20 ou, encore une fois, un rapport de 3 pour 4. Entre ces deux ensembles, nous pouvons donc affirmer qu'il y a un rapport de proportionnalité puisque les rapports sont équivalents.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il existe plusieurs manières de mettre en relation des grandeurs de même nature. On pourra considérer la relation entre les billes rouges et les billes bleues (12 pour 16 est égal à 15 pour 20 qui est égal à 3 pour 4), la relation entre les billes bleues et les billes rouges (16 pour 12 est égal à 20 pour 15 qui est égal à 4 pour 3), ou encore, la relation entre les billes bleues ou rouges et le total des billes de l'ensemble considéré (ex. : $\frac{15}{35}, \frac{12}{28}, \frac{20}{35}, \frac{16}{28}$).

Le fait de considérer la fraction comme un rapport permet de vérifier les conceptions des élèves vis-à-vis des relations de proportions impliquant quatre nombres et non seulement deux fractions. Par exemple Ghailane (2015) propose une situation dans laquelle on doit comparer 4 pizzas pour 5 garçons et 2 pizzas pour 3 filles. Il existe plusieurs manières de résoudre une telle situation. On pourra la considérer comme une situation de partage et de comparaison. 4 pizzas séparées en 5 parties contre 2 pizzas séparées en 3 parties. On constaterait que $\frac{4}{5}$ est plus grand que $\frac{2}{3}$. Dans ce cas, l'élève constate que les garçons en ont plus et révèle une conception de la fraction proche du sens partie-tout. On pourrait, par ailleurs constater que les pizzas des garçons forment le double des pizzas des filles, mais que le nombre des garçons équivaut à moins que le double des filles. Dans ce cas, on considèrerait que 4 : 2 est plus grand que 5 : 3 et donc que les garçons ont plus de pizza.

IV. 2.4 Fraction opérateur

Lorsque l'on considère la fraction comme un opérateur, cette dernière est, avant tout, un facteur dans une équation, généralement une transformation multiplicative (ex. : la fraction $\frac{3}{4}$ est l'opérateur qui permet de passer de 12 à 9 par une multiplication). La fraction vue comme un opérateur permet ainsi de la considérer comme une fonction. On peut alors construire des images d'une figure géométrique par homothétie (Blouin, 2002). L'objectif est de modifier seulement les mesures des figures en conservant formes et proportions. Par exemple, si l'on applique un opérateur $\frac{a}{b}$ en vue d'agrandir une figure, *a* sera plus grand que *b*. À l'inverse, si l'on applique un opérateur $\frac{a}{b}$ en vue de réduire une figure, *a* sera plus petit que *b*. Le sens opérateur permet, ensuite, de transformer des collections en opérant, de la même manière qu'avec les fonctions, pour agrandir ou réduire ces collections.

Ces deux exemples démontrent un caractère particulièrement important de la signification de la fraction en tant qu'opérateur, à savoir, la possibilité d'appliquer la fraction comme un nombre dans une relation multiplicative. La fraction, en tant que nombre rationnel, peut ainsi être envisagée de manière algébrique en ce que le nombre ne représente plus seulement une quantité en tant qu'état, mais plutôt une transformation. Les problèmes de transformation à structure multiplicative sont donc plutôt typiques de la signification opérateur.

Par exemple, on pourra considérer deux quantités de billes telles que Jonathan a 9 billes et Christèle en a 12. On pourrait s'interroger sur l'opération qui pourrait amener la collection de Jonathan à égalité avec la collection de Christèle. Dans ce cas, la collection de Christèle représente les $\frac{12}{9}$ de la collection de Jonathan, ou encore les $\frac{4}{3}$. Ainsi, l'équation permettant de passer de la collection de Jonathan à celle de Christèle serait $9 \times \frac{4}{3} = 12$. Cela dit, on pourrait également se demander : quelle transformation pourrait être effectuée à la collection de Christèle pour qu'elle soit égale à la collection de Jonathan? Dans ce cas, la collection de Jonathan représente les $\frac{9}{12}$ de la collection de Christèle, ou encore les $\frac{3}{4}$. L'équation serait, alors plutôt $12 \times \frac{3}{4} = 9$. On constatera, au passage, que la fraction $\frac{4}{3}$ est la transformation inverse de la fraction $\frac{3}{4}$.

IV. 2.5 Fraction mesure

Encore une fois, cette interprétation n'est pas attendue par la progression des apprentissages au primaire, mais nous la présentons tout de même brièvement. La signification d'une fraction comme une mesure implique, pour une fraction a/b de considérer une unité de mesure (ex. : 1/b). Dans cette logique, la fraction $\frac{3}{4}$ sera considérée comme le résultat de l'itération de l'unité $\frac{1}{4}$. Dans cette logique, la fraction $\frac{3}{4}$ représente $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Cette signification permet de concevoir la fraction comme un nombre composé d'autres nombres. La fraction devient alors le résultat de l'acte de mesurer ou celui d'opérations sur la fraction unité (Blouin, 2002 ; Houle, 2016). Par exemple, 2 peut être considéré comme $\frac{8}{4}$ puisqu'on peut le décomposer en 8 x $\frac{1}{4}$. De même, $\frac{1}{5}$ peut être considéré comme deux fois l'unité $\frac{1}{10}$. Cette dernière vision de la fraction intègre une relation multiplicative à l'intérieur même de la composition du nombre.

Lorsque l'on considère la fraction comme une mesure, le tout de référence qui est privilégié n'est généralement plus extérieur au nombre. Ce dernier est souvent plutôt l'une des mesures considérées dans la situation. Ne dépendant plus d'une matérialisation visuelle (pointe de tarte, tablette de chocolat, etc.), le tout de référence est alors fixé selon la nature des relations en cause.

La fraction vue comme une mesure permet de créer un lien logique et intelligible avec l'addition de fractions. On considèrera, par exemple, l'addition de $\frac{4}{8}$ et $\frac{3}{8}$ comme l'ajout répété de $\frac{1}{8}$:

$$\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Enfin, le sens mesure se révèle également utile lorsque la fraction est supérieure à 1. Par exemple, devant la fraction $\frac{9}{4}$, on considèrera la fraction $\frac{1}{4}$ comme unité de mesure. La fraction pourra alors être interprétée comme correspondant à 9 fois l'unité de mesure identifiée.

IV. 2.6 Discussion à propos des différents sens de la fraction

Les sens de la fraction qui ont été définis ici impliquent un ensemble de situations différentes qui peuvent être résolues de plusieurs manières. Un élève arrive à résoudre une situation relevant d'un sens particulier est susceptible de témoigner d'une conception de la fraction qui comprend cette interprétation. Cela dit, comme nous l'avons vu. Pour une situation donnée, il peut exister plusieurs solutions possibles. Lesquelles peuvent suggérer des conceptions chez les élèves en fonction de l'interprétation que leur solution suggère. Lorsque nous construirons le test et lorsque nous analyserons les réponses des élèves, nous prendrons soin d'en tenir compte.

Enfin, les recherches que nous avons consultées révèlent presque unanimement que la prépondérance du sens partie-tout dans les situations d'apprentissage que vivent les élèves inhibe la possibilité pour eux de développer des conceptions variées des fractions (Carette *et al*. 2009 ; Blouin, 2002 ; Mercier et DeBlois, 2004 ; Rioux, 2003 ; Ghailane, 2015). Cette situation pourrait se révéler problématique puisque cette interprétation du sens de la fraction ne permet pas de résoudre toutes les situations impliquant cette notion et se révèle souvent plus coûteuse à appliquer. On peut, par exemple, penser à une situation dans laquelle trois biscuits doivent être partagés entre quatre amis. Un élève pourrait utiliser le sens partie-tout en partageant chaque biscuit en quatre et en distribuant une part à chaque ami. La procédure serait cependant plus longue qu'en interprétant la situation comme un quotient. Dans ce cas, l'élève pourrait considérer qu'un partage de trois biscuits à quatre amis peut se traduire par la division ($3 \div 4$), laquelle peut s'écrire sous la forme fractionnaire $\frac{3}{4}$.

IV. 3. Autres variables didactiques

Dans leur publication, Carette et ses collaborateurs (2009) parlent de ce qu'ils appellent un phénomène de familiarité. Plusieurs élèves arrivent apparemment à résoudre un ensemble de situations lorsque les nombres et les modèles de représentations leur sont familiers. Ils échouent cependant dès que les nombres et les modèles de représentation sont plus complexes ou moins communs. Pour ces auteurs, ce phénomène apparaît plus généralement chez les élèves qui concentrent leurs stratégies sur les procédures et dont les conceptions sont moins développées. Il semblerait ainsi qu'un développement de conceptions plus centrées sur les connaissances conceptuelles permettrait aux élèves de dépasser la résolution par familiarité pour résoudre un ensemble de tâches complexes impliquant différentes variables relativement inattendues.

IV. 3.1 Les types de nombres

Nous retenons de ces auteurs quatre types de nombres : les fractions familières, les fractions peu familières, les fractions impropres et les nombres fractionnaires. Pour l'équipe de Carette (2009), la capacité, pour un élève, à résoudre des situations impliquant ces différents types de nombres implique qu'ils ont construit des conceptions leur permettant d'atteindre un niveau d'abstraction et de généralité pour résoudre toutes les situations possibles et non seulement les situations familières.

Les fractions familières correspondent aux fractions que les élèves voient régulièrement. Par exemple, les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ peuvent facilement être comparée puisque l'élève reconnaît ces deux fractions et a, sans doute, en tête une banque relativement riche d'images correspondant à ces deux fractions. De plus, les fractions impliquant un dénominateur n'ayant que 2 pour diviseur premier peuvent se révéler familières dans des situations de partage. Les situations qui impliquent ces fractions peuvent être résolues à l'aide de conceptions relativement limitées telles que ce Pitkethly et Hunting (1996) ont nommé « halving » en référence à l'acte de subdiviser successivement en deux une forme.

Les fractions peu familières sont plutôt des fractions que les élèves voient moins régulièrement et qui nécessitent de bien comprendre la technique appliquée dans la situation. Par exemple, il est plus difficile pour l'élève de trouver des référents familiers à des fractions comme $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{14}$. Au moment de les comparer, il devra maîtriser une technique impliquant de *placer les fractions sur un même dénominateur pour comparer les numérateurs*.

Les fractions impropres consistent en des fractions supérieures à 1 écrites sous la forme $\frac{a}{b}$ (exemple : $\frac{3}{2}$). Les élèves qui ont développé des conceptions des fractions axées sur le sens partie-tout ont souvent été peu confrontés à ce type de nombre et éprouvent de la difficulté à généraliser les règles concernant les fractions sur ces nombres. Les nombres fractionnaires, quant à eux, consistent en des nombres rationnels dont la partie entière est représentée par un nombre entier et la partie fractionnaire par une fraction.

IV. 3.2 Les représentations picturales de la fraction

Notre revue de la littérature nous a permis de mettre en évidence deux modèles pour représenter les fractions de façon picturale (continu et discret). La représentation continue présente généralement une longueur, une surface ou un volume à diviser alors que la représentation discrète présente plutôt une collection à dénombrer. Le modèle continu peut être divisé. Il faut souvent, alors mesurer.

Il est possible de faire varier le niveau de complexité d'une situation en modifiant les modèles de représentation. Selon Houle (2016), les situations qui impliquent un partage ou une équivalence telles qu'elles existent dans le sens partie-tout peuvent impliquer des stratégies différentes selon qu'on présente un tout continu ou discret.

Les situations avec un tout continu impliquent généralement le partage de ce dernier en tenant compte, à la fois du nombre de parties et de leur taille. La difficulté de ce type de situation est dépendante de la forme que l'on souhaite partager et du nombre de parties que l'on veut obtenir. Par exemple, il est plus difficile de séparer un triangle équilatéral en 4 parts égales qu'un carré et il est plus difficile de séparer ce carré en 5 parts égales qu'en 4. Par ailleurs, dans le cas où le tout est déjà séparé, le nombre de parts peut également influencer la difficulté de la situation puisqu'il est plus facile de trouver $\frac{2}{3}$ d'une forme divisée en 3 que de trouver $\frac{2}{3}$ de la même forme divisée en 12. Cette dernière difficulté laisse voir un lien entre les situations traitant d'un tout continu et les situations traitant d'un tout discret. En effet, le tout continu déjà séparé est susceptible d'être traité comme une quantité discrète.

Si, justement, nous portons notre attention aux grandeurs discrètes, le niveau de difficulté dépend du nombre de parties définies par la fraction mis en relation avec le nombre d'éléments dans l'ensemble observé. Par exemple, trouver les $\frac{2}{3}$ d'un ensemble de 3, de 6 ou de 7 objets ne représente pas le même niveau de difficulté et implique des opérations fort différentes. Houle (2016) identifie 4 stratégies différentes que l'on peut voir apparaître lorsque l'élève traite de quantités discrètes : la partition sur des touts continus (ex. : partager une surface selon le dénominateur et sélectionner un nombre de parts correspondant au numérateur), le double comptage (ex. : dans une collection, dénombrer une grandeur correspondant au dénominateur et sélectionner une grandeur correspondant au numérateur dans cette première sélection ; répéter jusqu'à épuisement de la collection), les stratégies fondées sur une conception rapport (pour deux grandeurs de même nature, considérer une relation partie à partie), les stratégies fondées sur une conception quotient (considérer la relation entre le numérateur et le dénominateur de la fraction comme une division).

IV. 3.3 Discussion à propos des variables didactiques

Dans cette section, nous avons relevé différentes variables susceptibles d'influencer les stratégies des élèves au moment de résoudre différentes tâches impliquant les fractions. Nous avons ainsi soulevé différents types de nombres associés aux fractions (fractions, familières, peu familières, impropres et nombres fractionnaires). De même, nous avons identifié différentes représentations picturales de la fraction (continue et discrète).

Ces différentes variables ont été utilisées dans la construction du test qui a servi à recueillir les traces écrites des élèves afin de diversifier les tâches et créer un certain équilibre entre elles. Cela dit, par souci de faisabilité et afin de restreindre nos observations à des éléments ciblés, nous avons fait un choix parmi ces variables. Dans le test, nous avons ainsi considéré la différence entre les fractions propres et les fractions impropres en intégrant des fractions plutôt familières et d'autres, moins familières. Afin de limiter l'étendue de nos observations, nous avons fait le choix de ne pas intégrer les nombres fractionnaires. Nous avons également considéré la différence entre la représentation continue et la représentation discrète. Toutefois, la représentation continue ne sera représentée que par des surfaces et des longueurs, nous éliminons ainsi la possibilité de considérer des activités portant sur le partage de volumes.

IV. 4. Discussion à propos de l'analyse conceptuelle

L'analyse conceptuelle nous a permis de définir la fraction d'un point de vue mathématique. Elle a, par ailleurs, permis de faire ressortir cinq différents sens de la fraction, dont trois, enseignés au primaire (partie-tout, quotient, rapport). Au regard de la documentation, l'un de ces trois sens semble largement dominant dans les conceptions des élèves (partie-tout). Ces éléments nous ont permis d'ajouter les différentes interprétations possibles du sens de la fraction aux connaissances qui pourront être intégrées aux stratégies des élèves pour résoudre les tâches du test que nous avons conçu.

Enfin, l'analyse conceptuelle nous a permis de dégager un certain nombre de variables didactiques à intégrer dans notre test. Nous avons ainsi choisi de répartir ces variables à travers les différents items de notre test. Les variables retenues impliquent deux types de fractions, les fractions propres et impropres. De même, elles impliquent trois types de représentation, dont deux types de représentation continue (longueur et surface) et les représentations discrètes (collections).

V. Attentes relatives à l'apprentissage des fractions au primaire dans les documents institutionnels et dans les manuels d'apprentissages

V. 1. Les attentes du PFEQ

Notre cadre de référence nous a amenés à définir ce qui constitue une stratégie procédurale et une stratégie conceptuelle de résolution. L'analyse conceptuelle nous a permis de dégager des connaissances particulières associées à la notion de fraction ainsi que de définir un modèle de construction de cette notion chez les élèves. Nous visons maintenant à définir plus en détail les techniques supposées enseignées et apprises par les élèves en portant une attention particulière au caractère routinier ou non de ces dernières au regard du rapport institutionnel. Rappelons qu'une technique est jugée routinière à partir du moment où l'institution juge qu'elle a été suffisamment travaillée par les élèves et qu'ils la maitrisent au point où elle leur est devenue disponible au moment de réaliser la tâche pour laquelle elle est destinée. Pour ce faire, nous prévoyons nous fonder sur les attentes du programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) (MÉQ, 2006) ainsi que sur la progression des apprentissages en mathématiques au primaire (PDA) (MELS, 2009). Ces dernières nous donnent effectivement des indications en ce qui concerne les attentes relatives à la capacité d'un élève d'accomplir une tâche donnée à un niveau donné, et ce, de façon autonome. Par exemple, le PFEQ indique qu'il est attendu que l'élève soit en mesure d'accomplir la tâche « Représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection » (MÉQ, 2006, p. 134 ; MELS, 2009, p. 6), et ce, de façon autonome à la fin de la 4e année. Pour nous, cela implique que les techniques qui ont été enseignées pour résoudre ce type de tâches avant et pendant la 4e année peuvent être considérées comme routinières. Le tableau 1 montre les types de tâches identifiées par le PFEQ et la PDA et le niveau auquel il est attendu qu'un élève soit en mesure de réaliser ces tâches de façon autonome. Nous incluons également le niveau à partir duquel chaque type de tâches commence à être enseigné. Toute tâche dont l'autonomie dans la réalisation est attendue après la fin de la 5e année sera réputée impliquer des techniques non routinières pour les élèves que nous observons.

Tableau 1
Attentes du PFEQ relatives à l'autonomie des élèves devant différents types de tâches sur les fractions

Types de tâches	Enseignée à partir de :	L'élève est autonome à la fin de :
Sens et écriture des nombres		
1. Reconnaître des fractions se rapportant à des éléments du quotidien (représentations concrètes ou imagées).	1ère	2e
2. Représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection.	1ère	6e
3. Associer une fraction à une partie d'un tout (parties isométriques ou parties équivalentes) ou d'un groupe d'objets et vice versa	3e	4e
4. Reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport)	3e	Secondaire 2.
5. Distinguer le rôle du numérateur de celui du dénominateur	3e	4e
6. Lire et écrire une fraction	3e	4e
7. Comparer une fraction à 0, à ½ ou à 1	3e	4e
8. Vérifier l'équivalence de deux fractions	3e	6e
9. Associer un nombre décimal ou un pourcentage à une fraction	4e	6e
10. Ordonner des fractions ayant un même dénominateur	4e	5e
11. Ordonner des fractions, le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre (ou des autres)	5e	6e
12. Ordonner des fractions ayant un même numérateur	5e	6e
13. Situer des fractions sur un axe de nombres (droite numérique)	5e	6e
Sens des opérations sur des nombres		
1. Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa	5e	6e
Opérations sur des nombres		
1. Construire un ensemble de fractions équivalentes	3e	6e
2. Réduire une fraction à sa plus simple expression	5e	6e
3. Additionner et soustraire des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre	5e	6e
4. Multiplier un nombre naturel par une fraction	5e	6e

Notre objectif maintenant est d'identifier un ensemble de techniques enseignées au cours du primaire pour résoudre des tâches impliquant les fractions et de classer ces techniques selon que nous les considérons comme routinières ou non pour des élèves de fin de 5e année au regard du rapport institutionnel. Ainsi, nous avons cherché à mettre en relation ces types de tâches que le programme nomme « savoirs essentiels » avec des tâches tirées de manuels scolaires destinés à l'enseignement primaire. Pour ce faire, nous nous sommes fondés sur 6 manuels d'activités mathématiques publiés au cours des 10 dernières années et s'adressant à des élèves de niveau primaire, dont deux au premier cycle, à savoir « Math et Matie 2e année : cahiers d'apprentissage B, 2e éd. Éditions » (Bilodeau, Dumont et Loubier, 2014) et « Mathéo et les mathématiques au quotidien : 2e année du primaire : cahier d'apprentissage » (Boublil *et al.* 2018). Nous en avons également sélectionné deux au deuxième cycle, à savoir « Zoom sur les mathématiques au quotidien : 4e année du primaire : cahiers d'apprentissage B et C » (Bergeron *et al.* 2018) et « Caméléon : mathématique : 4e année primaire : cahiers d'apprentissage A et B » (Bergeron et Sauvageau, 2014). Enfin, nous en avons sélectionné deux au troisième cycle, à savoir « Décimale : mathématique : 5e année primaire : cahiers de savoirs et d'activités A » (Fortier et Leblanc, 2013) ainsi que « Les Irréductibles : mathématique : 5e année primaire : cahier de savoirs et d'activités A et B » (Lord et Bergeron, 2020). Notons que les deux manuels sélectionnés pour le 3e cycle correspondent respectivement aux manuels utilisés par les élèves des deux classes participantes (Classe 1 : Les irréductibles ; Classe 2 : Décimale). En ce qui concerne les autres cycles, nous avons cherché à sélectionner les manuels et les éditions les plus récemment publiés en fonction de leur disponibilité. Les techniques que nous identifions dans les tableaux à venir ont été repérées dans l'un ou l'autre de ces manuels. De manière générale, nous avons identifié des types de tâches et des techniques qui se retrouvaient à plusieurs reprises dans les manuels selon le cycle consulté. Lorsque des techniques proposées ou suggérées par les corrigés de ces manuels étaient associées à des savoirs dont il était attendu par le programme que l'élève soit autonome vis-à-vis ceux-ci en fin de cinquième année, nous les avons considérées comme des techniques routinières. Lorsqu'il n'était pas attendu que l'élève soit autonome devant ces savoirs, nous avons considéré ces techniques comme non routinières.

Nous attirons l'attention du lecteur sur les trois catégories de tâches prévues par le PFEQ dans le tableau 1. À savoir les tâches impliquant le « sens et écriture des nombres », les tâches impliquant le « sens des opérations sur des nombres » et les tâches impliquant les « opérations sur des nombres » (MÉQ, 2006, p. 134-136). Un premier constat implique les 13 premières tâches portant sur le « sens et écriture des nombres ». Nous avons choisi de partager ces tâches en deux grandes classes.

La première classe intègre les tâches de représentation : « reconnaître, représenter, associer à une partie d'un tout, reconnaître différents sens, distinguer numérateur et dénominateur, lire et écrire une fraction, situer sur un axe de nombres ». Nous entendons par tâches de représentation toute tâche dans laquelle une fraction *a/b* doit être représentée à travers une grandeur continue ou discrète *n*. La plupart du temps, cette grandeur *n* est un multiple de *a* ou *b*. La seconde classe implique, entre autres, les tâches de comparaison : « Vérifier l'équivalence, comparer, ordonner ». Nous entendons par tâches de comparaison toute tâche dans laquelle deux ou plusieurs fractions *a/b* doivent être comparées entre elles directement ou par le biais d'une grandeur continue ou discrète *n*. Le choix des nombres, mais également, d'autres variables dans ces deux classes de tâches influencent les techniques à mobiliser. La plupart du temps, les dénominateurs de deux fractions à comparer sont tels que l'un est multiple de l'autre. C'est à ces deux classes de tâches que nous prévoyons nous intéresser.

Par ailleurs, dans le PFEQ les tâches associées à la section « opérations sur des nombres » (MÉQ, 2006, p. 135-136) impliquent toutes des techniques de résolution dont l'autonomie dans l'application n'est pas attendue avant la 6e année. Ces techniques non routinières peuvent permettre de résoudre les tâches de représentations et les tâches de comparaison de façon beaucoup plus économique que les techniques routinières. Par exemple, un élève peut tenter de comparer les fractions 2/4 et 3/8 en représentant deux collections de 8. L'une est partagée de telle façon que deux items sur quatre sont sélectionnés, soit quatre items sur huit. L'autre est partagée de telle façon que trois items sur huit sont sélectionnés. Cette technique est cependant laborieuse et peut, par le nombre d'étapes qu'elle implique, mener à plusieurs erreurs de manipulation. Une autre technique, moins laborieuse cette fois, pourrait être de placer ces deux fractions sur un dénominateur commun, soit en réduisant l'une des deux fractions lorsque cela est possible ou en trouvant une fraction équivalente avec un dénominateur commun, dans ce cas-ci : $\frac{2}{4} = \frac{4}{8} > \frac{3}{8}$.

V. 2. Identification et catégorisation des techniques enseignées de la première à la cinquième année du primaire

Les techniques que nous avons identifiées ont généralement un domaine de validité qui se restreint à des contextes définis par certaines variables didactiques. En effet, certaines techniques ne peuvent être employées que lorsque certaines caractéristiques sont présentes dans les tâches de représentation ou de comparaison. Nous retenons premièrement deux types de représentation du tout de la fraction. La représentation continue consiste en une surface une longueur ou un volume. La représentation discrète consiste plutôt en une collection d'objets discrets dont la quantité est clairement définie.

Nous nous intéressons, deuxièmement, au type de fractions (fractions propres et fractions impropres). Nous entendons par fraction propre toute fraction inférieure à 1 et toute fraction égale à $1 = \frac{a}{a}$ (avec a non nul). De même, nous entendons par fraction impropre toute fraction supérieure à 1. De plus, nous nous intéressons à la relation entre les grandeurs impliquées dans la situation. Par exemple, certaines techniques de représentation ne s'appliquent que lorsque le dénominateur est égal au nombre à représenter. D'autres ne s'appliquent qu'avec des fractions dont le dénominateur n'a que 2 comme diviseur premier. Pareillement, certaines techniques de comparaison ne s'appliquent que lorsque le dénominateur d'une des fractions à comparer est le multiple du dénominateur de l'autre.

Les prochaines sections servent à décrire les praxéologies mathématiques (tâche, technique, technologie-théorie) (Bosch et Chevallard, 1999, p. 83) repérées dans les six manuels que nous avons observés en ce qui concerne les deux grandes classes de tâches que nous avons identifiées à partir du PFEQ. À savoir, les tâches de représentation et les tâches de comparaison. Les techniques associées à chaque tâche seront classées routinières ou non d'après les informations fournies par le document institutionnel. Les tâches de représentation sont codées R^i, et celles de comparaison sont codées C^i. Les techniques qui leur sont associées sont respectivement codées r_i^i , c_i^i. Chaque technique est justifiée à l'aide d'un discours rationnel correspondant à un savoir mathématique désigné par le bloc *technologico-théorique*.

Enfin, sauf exception qui, dans chaque cas, sont explicitement mentionnées et justifiées, chaque type de tâche nommé dans les prochaines sections apparait dans notre catégorisation parce que nous l'avons identifié à plusieurs reprises dans plusieurs des manuels que nous avons consultés. De plus, afin de donner des exemples plus en lien avec notre outil de cueillette de donnée, les exemples de tâches que nous donnons, quoique par leur nature même s'apparentant nécessairement aux différentes tâches repérées dans les manuels, ont été créés de toutes pièces par nous.

V. 2.1 Tâches de représentation d'une fraction a/b à travers une grandeur n.

Dans cette section, nous avons défini six types de tâches pouvant impliquer la représentation de fractions et auxquelles des élèves de fin de cinquième année sont susceptibles d'avoir été exposés au cours de leur parcours scolaire. Pour chacune de ces tâches, nous identifions au moins une technique de résolution et nous classons chaque technique selon qu'elle est routinière ou non pour des élèves de fin de cinquième année, et ce, selon les définitions retenues, dans notre cadre théorique, pour ces deux catégories. Notons que certaines techniques ne sont applicables que si certaines caractéristiques sont présentes dans les tâches. Ces caractéristiques sont notées après chaque tâche ou après chaque technique le cas échéant.

Tâche $\boldsymbol{R^1}$: *« Prélèvement de a objets dans une collection de b objet »* (pour une fraction propre *a/b* représentée de façon discrète) **:**

- **Exemple de tâche :** Voici une collection de quatre objets. Prélève les trois quarts de cette collection ; Voici des billes rouges et bleues. Regroupe ces billes de manière qu'il y ait toujours trois billes rouges pour quatre billes bleues.
- **Technique $\boldsymbol{r_1^1}$:** Prélever *a* objets dans une collection dénombrant *b* objets (sens partie-tout) ou encore prélever *a* objets en relation avec *b* objets (sens rapport).
  - **Exemple 1 (partie-tout) :** Pour représenter la fraction 3/4 dans un carré déjà partagé en quatre parts égales, sélectionner trois parts.
  - **Exemple 2 (rapport) :** Pour représenter un rapport de trois pour quatre dans une collection de sept objets, noircir trois objets.
- **Justification :** Une fraction peut donner le sens d'une partie d'un tout où le numérateur représente les parts à considérer et le dénominateur représente le tout. Une fraction peut également donner le sens d'un rapport de proportion où une grandeur est mise en relation avec une autre. Enfin, une fraction peut représenter le quotient de deux entiers naturels.

Tâche $\boldsymbol{R^2}$: *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »* (pour une fraction propre *a/b* ; *b* n'a que le nombre 2 comme diviseur premier, ex : 2, 4, 8, 16, etc.) :

- **Exemple de tâche :** Voici un carré de 4 cm de côté. Trouve 1/2 de ce carré ; Trois biscuits sont partagés à quatre amis. Trouve la fraction qui représente ce que chaque ami obtient.

- **Technique routinière r_1^2 (halving) :** Partager une forme ou une collection disposée de façon symétrique en deux, puis, partager de façons successives chaque part en deux jusqu'à obtenir un nombre de parts correspondant au dénominateur. Sélectionner le nombre de parts désiré en fonction du numérateur.
    - **Exemple :** Pour représenter la fraction 3/4, tracer un carré et partager successivement ce carré en deux à l'horizontale, puis à la verticale pour former quatre petits carreaux. Sélectionner trois ce ces carreaux.
- **Justification :** Partager chaque part d'une forme ou d'une collection symétrique en deux à partir du centre permet d'assurer la conservation de l'équivalence des parts.

Tâche R^3 : *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* (pour une fraction *a/b* propre ou impropre ; représentation continue ou discrète (*n* est multiple de *b*)) :

- **Exemples de tâche :** Voici une collection de 8 objets (12 objets, 16 objets, etc). Trouve les 3/4 de cette collection ; Partage ce cercle (ce carré, ce rectangle) en trois parts égales pour y représenter la fraction 4/6 ; Combien font les 5/4 d'une collection de 20 objets?
- **Technique routinière r_1^3 (double comptage) :** Pour une fraction propre *a/b* d'un tout comprenant *n* objets, prendre *a parts* chaque fois que l'on dénombre *b* parts dans le tout *n* (fonctionnement uniquement pour des fractions propres lorsque *n* est multiple de *b*).
    - **Exemple :** Pour représenter les 3/4 de douze, tracer une collection de douze cercles puis sélectionner trois cercles chaque fois que quatre cercles sont dénombrés. Neuf cercles seront sélectionnés au total.
- **Technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution)** : Pour une fraction *a/*b associée à un tout *n* multiple de *b*, *partager* le tout *n* pictural en *b* parts égales pour identifier la taille d'une part (continue ou discrète) de grandeur 1/*b*. Produire ensuite un nombre *a* de parts de grandeur 1/*b*.
    - **Exemple :** Pour représenter les 3/4 de douze, tracer une collection de douze cercles, partager la collection en quatre groupes de trois puis sélectionner trois de ces groupes, soit 9 cercles.
- **Technique non routinière r_3^3 (raisonnement par proportionnalité) :** Pour une fraction *a/b* relative à un tout *n*, utiliser une stratégie s'apparentant au calcul : $n \div b \times a$. Diviser

l'entier *n* par *b*. Multiplier le résultat obtenu par a (en 5^e année, *n* doit être un multiple de *b*).

- **Exemple :** Pour représenter les 3/4 de douze, diviser douze par le dénominateur (quatre) pour obtenir trois. Multiplier ensuite trois par le numérateur (trois) pour obtenir neuf.

- **Technique non routinière r_4^3 (raisonnement par fractions équivalentes) :** Pour une fraction *a/b* relative à un tout *n*, trouver l'entier k tel que $n = k \times b$. Multiplier a et b par l'entier *k* pour identifier la fraction équivalente $\frac{k \times a}{k \times b}$. La fraction *a/b* est équivalente à $k \times a$ parts.
  - **Exemple :** Pour représenter les 3/4 de douze, chercher la fraction ayant douze pour dénominateur qui serait équivalente à 3/4. S'il faut multiplier le dénominateur (quatre) par trois pour obtenir une fraction ayant douze pour dénominateur, il faut multiplier le numérateur (trois) par trois également pour obtenir la fraction équivalente 9/12. La réponse est donc le numérateur de cette nouvelle fraction.
- **Justification :** Lorsqu'on partage une grandeur donnée (représentant le tout, continu ou discret) en *b* parts égales, chaque part représente 1/*b* du tout. En reproduisant (*a*) fois une part de grandeur 1/*b*, on obtient une grandeur de taille $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. La fraction (a*k)/(b*k) est équivalente à a/b, et est égale à (a*k)/n. Pour la représenter, il est possible de prendre (a*k) parts, équivalant chacune à 1/n.

Tâche R^4 : ***« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée »*** (pour une fraction *a/b* propre ou impropre ; représentation continue ou discrète) :

- **Exemple de tâches :** La fraction 3/4 est représentée par une collection de 12 objets. Il faut retrouver le tout de cette collection.
- **Techniques routinière r_1^4 (Partage et prélèvement/distribution) :** Partager la représentation (discrète ou continue) en *a* parts égales pour identifier la taille d'une part de grandeur 1/*b*. Ajouter ou enlever ensuite (selon que la fraction soit propre ou impropre) à la grandeur donnée des parts de taille 1/*b* chacune, de manière à avoir *b* parts de grandeur 1/*b* chacun.

- **Exemple :** Pour déterminer le tout lorsque 3/4 valent neuf, tracer une collection de neuf cercles, partager la collection en trois groupes de trois, puis produire un groupe de trois supplémentaire pour en obtenir quatre.

- **Technique non routinière r_2^4 (Raisonnement par proportionnalité) :** Pour une fraction *a/b* relative à un nombre *n* utiliser une stratégie s'apparentant au calcul : $n \div a \times b$. Diviser l'entier *n* par *a*. Multiplier le résultat obtenu par *b* (en 5e année, *n* doit être un multiple de *a*).
  - **Exemple :** Pour déterminer le tout lorsque 3/4 valent neuf, diviser neuf par le numérateur (trois) pour obtenir trois. Multiplier ensuite ce résultat par le dénominateur (quatre) pour obtenir douze.
- **Technique non routinière r_3^4 (Raisonnement par fractions équivalentes) :** Pour une fraction *a/b* donnée représentant une grandeur *n* donnée, trouver l'entier k tel que $n = k \times a$. Multiplier *a* et *b* par l'entier *k* pour identifier la fraction équivalente $\frac{k \times a}{k \times b}$. La valeur du tout est équivalente à $k \times b$ parts.
  - **Exemple :** Pour déterminer le tout lorsque 3/4 valent neuf, chercher la fraction ayant neuf pour numérateur qui serait équivalente à 3/4. S'il faut multiplier le numérateur (trois) par trois pour obtenir une fraction ayant neuf pour numérateur, il faut multiplier le dénominateur (quatre) par trois également pour obtenir la fraction équivalente 9/12. La réponse est donc le dénominateur de cette nouvelle fraction.
- **Justification :** Pour une grandeur donnée (discrète ou continue), représentant une fraction *a/b*, cette grandeur représente (*a*) fois le 1/*b* du tout. Le 1/*b* est alors considéré comme une unité de mesure. On partage alors la grandeur donnée en (*a*) parts, pour trouver à quoi correspond le (1/*b*). Comme $b \times \frac{1}{b} = 1$ (qui représente le tout). On ajoute ou on enlève alors à la grandeur donnée des parts de grandeur 1/*b* chacune, de manière à avoir *b* part de (1/*b*). La fraction (a*k)/(b*k) est équivalente à a/b, et est égale à n/(k*b). Pour la représenter, il est possible de prendre (k*b) parts, équivalant chacune à 1/n.

Tâche R^5 : ***« Réduction de fraction »*** (pour une fraction *a/b* propre ou impropre ; *a* et *b* ont un diviseur commun) :

- **Exemple de tâche :** Représenter la fraction 6/8 dans une collection de quatre objets ; réduire la fraction 4/6.
- **Technique non routinière r_1^5:** Pour une fraction *a/b*, vérifier si *a* et *b* ont un diviseur commun. Diviser *a* et *b* par leur plus grand diviseur commun ou par chacun des diviseurs communs à *a* et *b* jusqu'à obtenir une fraction irréductible *c/d*. Partager l'entier *n* représentant le tout selon *d* et sélectionner *c* part.
  - **Exemple :** Pour réduire la fraction 6/8, déterminer un diviseur commun à six et huit (dans ce cas-ci, le plus grand diviseur commun est deux). Diviser six et huit par ce même diviseur (deux) pour obtenir la fraction 3/4.
- **Justification :** Une fraction *a/b* peut être réduite en une fraction équivalente si *a* et *b* ont un diviseur commun.

Tâche R^6 : *« Partage et positionnement sur une droite numérique »* (Pour une fraction *a/b* propre ou impropre) :

- **Exemple de tâche :** Positionner la fraction 3/4 sur un axe subdivisé selon une unité fixée.
- **Technique non routinière r_1^6 :** Pour une fraction propre *a/b*, partager la longueur entre 0 et 1 pour obtenir *b* parts égales. Dénombrer *a* parts à partir de 0 (de gauche à droite). Ajouter des parts de même taille après 1 pour des fractions impropres.
  - **Exemple 1 (Technique routinière : fraction propre) :** Pour représenter la fraction 3/4 sur un axe des nombres, partager la longueur entre zéro et un en quatre parts égales en traçant trois traits. Dénombrer trois parts à partir de zéro en comptant de gauche à droite.
  - **Exemple 2 (Technique non routinière : fraction impropre) :** Pour représenter la fraction 5/4 sur un axe des nombres, partager la longueur entre zéro et un en quatre parts égales en traçant trois traits. Partager ensuite la longueur entre un et deux de la même façon. Dénombrer cinq parts à partir de zéro en comptant de gauche à droite.
- **Justification :** La droite numérique est un ensemble continu et dense de points munis d'une adresse (abscisse) réelle. À chaque point de la droite numérique correspond un et un seul nombre réel. Sur une droite numérique, les fractions dites propres se retrouvent entre 0 et

1 alors que les fractions impropres se retrouvent après 1. La droite numérique est un modèle continu de longueur. L'égalité des parts dépend de leur longueur.

V. 2.2 Tâches de comparaison de grandeurs impliquant des fractions *a/b*

Dans cette section, nous avons défini six types de tâches pouvant impliquer la comparaison de fractions et auxquelles des élèves de fin de cinquième année sont susceptibles d'avoir été exposés au cours de leur parcours scolaire. Pour chacune de ces tâches, nous identifions au moins une technique de résolution et nous classons chaque technique selon qu'elle est routinière ou non pour des élèves de fin de cinquième année, et ce, selon les définitions retenues, dans notre cadre théorique, pour ces deux catégories. Encore une fois, certaines techniques ne sont applicables que si certaines caractéristiques sont présentes dans les tâches. Les conditions d'applications sont également mentionnées directement après la tâche ou la technique concernée le cas échéant. Par ailleurs, plusieurs de ces techniques reprennent des éléments des techniques de représentation pour permettre de comparer la grandeur des fractions. Cela dit, les descriptions et les variantes des techniques nommées concernent le cas spécifique des tâches de comparaison.

Tâche $\boldsymbol{C^1}$: *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »* (pour des fractions *a/b* propres ou impropres) :

- **Exemple de tâche :** Comparer les fractions 3/4 et 2/3 en comparant la surface respective recouverte par chacune dans deux rectangles identiques ; Comparer les fraction 2/4 et 3/8 alors qu'elles sont associées à une collection de 16 objets.
- **Technique routinière $\boldsymbol{c_1^1}$ (pour une figure continue) :** Comparer les parts des figures représentant chacune des fractions à comparer (en les mettant côte à côte, en utilisant des transparents, en faisant des images mentales, etc.). La figure dont les parts représentent la grandeur la plus importante correspond à la plus grande fraction.
    - **Exemple :** En comparant les fractions 3/4 et 2/3 dans deux carrés de même taille positionnés côte à côte, remarquer que la surface recouverte par la fraction 3/4 est plus grande que la surface recouverte par la fraction 2/3.
- **Technique routinière $\boldsymbol{c_2^1}$ (pour une collection discrète) :** Choisir une collection correspondant à un multiple de tous les dénominateurs des fractions à comparer. Représenter chaque fraction dans la collection à l'aide des techniques de *partage* ou de

double comptage mentionnées dans les tâches de représentation. La collection comprenant le plus d'objets sélectionnés représente la plus grande fraction. (Pour deux fractions dont les dénominateurs sont tels que le plus grand dénominateur est multiple de l'autre).

  - **Exemple :** En représentant les fractions 2/4 et 3/8 dans une collection de seize objets, constater que 2/4 correspond à huit objets et que 3/8 correspond à six objets.

- **Justification :** Lorsque deux fractions sont exprimées relativement à un tout équivalent, la plus grande fraction est celle représentant la plus grande part considérée par rapport au tout. De plus, pour deux fractions de même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Tâche C^2 : ***« Comparaison via les points de repère 1/2 et 1 »*** (pour des fractions *a/b* propres ou impropres) :

- **Exemple de tâche :** Comparer les fraction 3/4 (supérieure à une demie) et 3/8 (inférieure à une demie) ; Comparer les fraction 3/4 (inférieure à un) et 3/3 (égale à un).
- **Technique routinière c_1^2 :** Situer les fractions à comparer par rapport à 1/2, ou par rapport à 1. Si dans une fraction, le numérateur est plus petit, égal ou plus grand que la moitié du dénominateur, alors la fraction est respectivement, plus petit, égal, ou plus grand que 1/2. Si dans une faction, le numérateur est plus petit, égal ou plus grand que le dénominateur, alors la fraction est respectivement, plus petit, égal, ou plus grand que 1.
- **Justification :** Il est possible de comparer deux grandeurs *a* et *b* en relation avec une grandeur *c*. Si *a* est plus grand que *c* et si *b* est plus petit que *c*, alors, *a* est plus grand que *b*.

Tâche C^3 : ***« Comparaison de fractions ayant le même dénominateur »*** (pour des fractions *a/b* propres ou impropres) **:**

- **Exemple de tâche :** Comparer les fractions 3/4 et 2/4.
- **Technique routinière c_1^3 :** Comparer les fractions selon la règle suivante : Pour deux fractions ayant le même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.
  - **Exemple :** Pour comparer les fractions 3/4 et 2/4, comparer les numérateurs. Deux est plus petit que trois. 2/4 est donc plus petit que 3/4.

- **Justification :** Pour deux fractions ayant le même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.

Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »* (pour des fractions *a/b* propres ou impropres, les dénominateurs des fractions sont tels que l'un est multiple de l'autre) :

- **Exemple de tâche :** Comparer les fraction 3/4 et 11/16 ; comparer les fractions 3/5 et 8/10.
- **Technique non routinière c_1^4 et c_2^4 :** Ramener les deux fractions au même dénominateur en déterminant, pour l'une des deux, une fraction équivalente, et ce, soit par multiplication (**c_1^4**), soit par réduction (**c_2^4**). Comparer ensuite les numérateurs des deux fractions.
  - **Exemple de technique non routinière c_1^4 (fractions équivalentes par multiplication) :** Pour comparer les fraction 3/5 et 8/10, multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction 3/5 par deux pour obtenir la fraction équivalente 6/10. Comparer ensuite les numérateurs des fractions 8/10 et 6/10. 8/10 est plus grand que 6/10.
  - **Exemple de technique non routinière c_2^4 (fractions équivalentes par réduction) :** Pour comparer les fraction 3/5 et 8/10, diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction 8/10 par deux pour obtenir la fraction équivalente 4/5. Comparer ensuite les numérateurs des fractions 4/5 et 3/5. 4/5 est plus grand que 3/5.
- **Justification :** La fraction (a*k)/(b*k) est équivalente à a/b. Une fraction *a/b* peut être réduite en une fraction équivalente si *a* et *b* ont un diviseur commun. Pour deux fractions ayant le même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.

Tâche C^5 : *« Comparaison de fractions ayant le même numérateur »* (pour des fractions *a/b* propres ou impropres) **:**

- **Exemple de tâche :** Comparer les fractions 3/4 et 3/5.
- **Technique non routinière c_1^5 :** Comparer les fractions selon la règle suivante : pour deux fractions ayant le même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur
- **Justification :** Pour deux fractions ayant le même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.

Tâche C^6 : *« Comparer deux fractions telles que le numérateur de l'une est multiple du numérateur de l'autre »*[3] (pour des fractions *a/b* propres ou impropres) :

- **Exemple de tâche :** Comparer les fractions 3/4 et 6/9.
- **Technique c_1^6 :** Ramener les deux fractions au même numérateur en déterminant, pour l'une des deux, une fraction équivalente, et ce, soit par réduction, soit par multiplication. Comparer ensuite les dénominateurs des deux fractions.
  - **Exemple :** Pour comparer les fractions 3/4 et 6/9, multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction 3/4 par deux pour obtenir la fraction équivalente 6/8. Comparer ensuite les dénominateurs des fractions 6/9 et 6/8. 6/8 est plus grand que 6/9.
- **Justification** : La fraction (a*k)/(b*k) est équivalente à a/b. Pour deux fractions ayant le même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.

V. 3. Discussion à propos de l'analyse des documents institutionnels.

Dans cette section, nous avons défini les attentes institutionnelles en ce qui concerne les techniques et les connaissances enseignées pour résoudre deux classes de tâches impliquant les fractions (tâches de représentation et tâches de comparaison). Pour chacune de ces classes, nous avons défini des techniques jugées routinières et d'autres jugées non routinières selon le cadre théorique de notre recherche. Ces éléments peuvent maintenant être mis en relation avec notre cadre de référence et notre analyse conceptuelle.

Rappelons d'abord que, dans notre cadre de référence, nous avions conclu qu'une stratégie procédurale consistait en l'application directe d'une technique sans chercher à la mettre en relation avec d'autres techniques ou d'autres connaissances. De même, une stratégie conceptuelle consiste en une mobilisation et une mise en relation autonome de techniques et de connaissances en les ficelant dans une stratégie cohérente et en étant en mesure de les verbaliser pour justifier leur utilisation. À partir de cette conclusion et à partir des autres éléments soulevés dans notre analyse

[3] Cette tâche et la technique qui lui est associée ne sont pas explicitement mentionnées dans la progression des apprentissages et ne semblent pas non plus faire partie de l'enseignement systématique des fractions au primaire dans les manuels. Toutefois, par sa similarité avec d'autres techniques, nous croyons qu'elle est à la portée des élèves de fin de 5e année en la plaçant dans les tâches non routinières.

conceptuelle et dans notre analyse des documents institutionnels, nous avons établi deux ensembles de critères qui peuvent permettre de définir une stratégie conceptuelle.

Premièrement, dans cette analyse des documents institutionnels, nous avons dégagé un ensemble de techniques routinières et non routinières susceptibles d'être mobilisées par les élèves dans des tâches de représentation et de comparaison de fractions. Afin de déterminer si la stratégie employée peut être qualifiée de conceptuelle ou de procédurale, il est ainsi attendu que ces techniques soient mobilisées et mises en relation de façon autonome par les élèves.

Deuxièmement, dans notre cadre de référence, nous avons vu qu'un niveau de pensée conceptuel impliquait d'être en mesure de fournir une justification de la technique ou de la stratégie employée. Ainsi, un élève qui mobilisera une technique non routinière et qui sera en mesure d'en verbaliser le fonctionnement par une justification fournie dans une phrase écrite structurée sera également réputé avoir mobilisé une stratégie conceptuelle. Dans ce cas, l'explication donnée doit faire appel à au moins deux connaissances en lien avec les fractions. Ces dernières doivent être décrites de façon explicite et autonome par l'élève dans le contexte particulier de la tâche. Un élève qui appliquerait ladite technique sans être en mesure d'en expliquer le fonctionnement ou de justifier le choix de son utilisation sera considéré comme ayant appliqué une stratégie procédurale. Ce dernier critère implique un enjeu didactique particulier qui concerne l'hypothèse du contrat didactique puisque sa mobilisation dépend largement des exigences auxquelles les élèves ont été accoutumés. Dans les manuels utilisés par la classe 1 (Lord et Bergeron, 2020), des tâches impliquant la notion de fraction et demandant une justification écrite de la réponse apparaissent à deux reprises (Les *Irréductibles A* : p, 39 ; Les *Irréductibles B* : p. 68). Dans les manuels utilisés par la classe 2 (Fortier et Leblanc, 2013), de telles tâches n'apparaissent pas du tout. Il est donc possible que le fait de demander des explications écrites aux élèves s'écarte du contrat didactique auxquels ils ont été habitués, et ce, particulièrement pour la classe 2. Cependant, les deux enseignantes participantes ont affirmé exiger aux élèves des explications verbales à l'oral sur une base régulière. Nous pensons donc qu'il est raisonnable de demander des explications écrites aux élèves en tenant compte des contraintes déjà existantes et mentionnées dans notre méthodologie. Contraintes associées aux capacités des élèves en lecture et en écriture.

Enfin, nous venons de définir deux caractéristiques de ce que nous appellerons une stratégie conceptuelle pour résoudre des tâches de représentation et de comparaison de fractions en fin de

5^e année du primaire (nous en faisons une synthèse dans la section suivante). Notre objectif est maintenant de présenter à des élèves de ce niveau un test comportant des tâches pouvant être résolues par différents types de stratégies afin de déterminer de quelle manière et dans quelle mesure ils mobilisent les différentes techniques qui leur ont été enseignées. La prochaine section sera consacrée à l'analyse *a priori* des tâches que nous avons conçues pour ce test et à l'analyse des traces écrites des élèves.

VI. Outil de cueillette de données et analyse

Les sections précédentes nous ont permis de définir deux ensembles de critères pouvant permettre de caractériser une stratégie conceptuelle pour résoudre des tâches de représentation et de comparaison de fractions en fin de 5^e année du primaire, et ce, en tenant compte du rapport institutionnel. Nous avons ainsi répondu à notre première question spécifique qui concernait les attentes institutionnelles. Notre objectif est maintenant de déterminer comment les techniques identifiées dans la section précédente peuvent être mobilisées par les élèves dans des stratégies procédurales ou conceptuelles. Cela nous permettra de répondre à notre seconde question spécifique qui portait, cette fois-ci, sur les conceptions des élèves à propos des fractions.

Nous rappelons ici les deux critères qui peuvent, selon nous, permettre de catégoriser les stratégies des élèves. Une stratégie sera considérée conceptuelle si elle répond à au moins l'un des deux critères suivants :

1. La stratégie implique la mobilisation autonome et la mise en relation d'au moins deux techniques associées à la représentation ou à la comparaison de fractions.
2. La stratégie implique la mobilisation autonome d'une technique non routinière accompagnée d'une justification verbale écrite faisant appel à au moins une autre connaissance liée aux fractions et décrite de façon explicite et autonome par l'élève dans le contexte particulier de la tâche.

À l'inverse, une stratégie procédurale implique plutôt l'application directe, dans un contexte prédéterminé, d'une technique apprise de façon routinière.

En ce qui concerne l'outil en question, les données sont recueillies au moyen d'un test papier crayon (voir Annexe I). Pour chaque situation, l'élève a au moins une demi-page pour ses démarches. On demande à l'élève de laisser des traces de ses recherches sur la feuille. L'élève peut biffer et utiliser les images qui sont proposées comme bon lui semble. Le test est d'une durée de 50 minutes.

L'un de nos objectifs en construisant ce test consiste à nous assurer que les tâches de représentation et de comparaison qui sont présentées aux élèves sont variées. Pour ce faire, nous avons tenu compte d'un ensemble de variables didactiques tirées de l'analyse conceptuelle de la notion de fraction que nous avons présentée dans la section IV.

Ainsi, dans les tâches que nous avons construites, nous avons distingué deux types de représentation de la fraction : picturale (par exemple, un carré dont $\frac{1}{4}$ est colorié) et symbolique (par exemple $\frac{1}{4}$).

En ce qui concerne la représentation picturale, deux types de modèles sont pris en compte : continu et discret. Ces deux types de modèles sont prévus pour être répartis équitablement à travers les situations (trois situations privilégiant des représentations discrètes et trois privilégiant des représentations continues, une situation représentant des grandeurs, à la fois discrètes et continues). Lorsque nous présentons des figures ou des collections imagées aux élèves, nous visons certains objectifs :

- Vérifier la compréhension de l'élève de l'équivalence des parts en variant la taille des parts découpées sur des représentations continues (exemple : une forme partagée en parties non équivalentes que l'élève doit repartager)
- Varier la forme et le découpage des figures dans les représentations continues afin d'éviter un phénomène de familiarité et une contamination des situations entre elles (exemple : changer de forme quand on change de tâche ; couper la forme en suivant les diagonales ou les médianes ou en utilisant un instrument de mesure)
- Utiliser des formes facilement partageables pour un élève et choisir des dimensions appropriées pour le partage (exemple : un carré de 6 cm ou un cercle de 360° pour être partagé en 3 ou en 6 parts)
- Choisir la quantité d'objets dans une collection afin de permettre ou non à l'élève d'appliquer directement certaines techniques ciblées lors de l'analyse des documents

institutionnels (exemple : correspondant au multiple du numérateur et/ou du dénominateur).

Ensuite, nous distinguons 5 interprétations possibles de la fraction (Kieren, 1993) : le sens partie-tout, le sens rapport, le sens quotient, le sens opérateur et le sens mesure. Toutefois, les attentes du PFEQ pour les classes du primaire se limitent à trois : le sens partie-tout, le sens partage et le sens rapport. Nos situations visent à privilégier ces trois sens. Les items 1, 2 et 4 privilégient le sens partie-tout. Les items 3 et 7 privilégient le sens partie-tout avec la possibilité d'interpréter la fraction comme une mesure. L'item 5 suggère le sens quotient, mais peut également être interprété selon les sens rapport et partie-tout. Enfin, l'item 6 privilégie également le sens quotient, mais avec la possibilité d'interpréter la fraction comme un opérateur ou une mesure. La variation du sens donné à la fraction permet également d'éviter une trop grande familiarisation de l'élève avec les tâches du test et une contamination des situations entre elles.

Enfin, nous portons une attention particulière au type de fractions utilisées en fonction des types de tâches à résoudre. Ainsi, dans le contexte où une fraction doit être représentée via un tout continu ou discret, nous considérons avec attention toute fraction jusqu'à $\frac{1}{16}$ dotées d'un dénominateur ayant 2 pour seul diviseur premier ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$). En effet, lorsqu'elles sont impliquées dans des tâches de représentation, ces fractions peuvent toutes être représentées à l'aide de la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*. Dans un tel contexte, de telles fractions seront considérées comme étant familières pour les élèves. Par ailleurs, nous avons également vu dans notre analyse des documents institutionnels que le caractère propre ou impropre d'une fraction dans les tâches de représentation et de comparaison est également susceptible d'influencer les techniques employées par les élèves. Nous entendons par fraction propre toute fraction inférieure à 1 et par fraction impropre toute fraction supérieure à 1. Nous tiendrons également compte de différentes relations qu'il peut y avoir entre les données de la situation (dénominateurs multiples entre eux, même numérateurs, fractions réductibles, grandeur *n* multiple du dénominateur de la fraction à représenter, etc.). En effet, ces relations peuvent avoir un impact sur la possibilité ou non d'utiliser certaines techniques dans une situation.

Dans les prochaines sections, nous faisons l'analyse *a priori* de chacune des tâches que nous avons construites. Nous expliquons ainsi nos choix didactiques et nous définissons les stratégies attendues ainsi que la manière de les interpréter. Les tâches choisies peuvent être résolues, soit par des stratégies nécessitant l'application directe d'une seule technique parmi celles identifiées (stratégies procédurales), soit des stratégies plus élaborées faisant intervenir une mobilisation et une mise en relation de plusieurs techniques (stratégies conceptuelles). Dans le cas des stratégies faisant intervenir une seule technique, si cette dernière est non routinière, nous avons prévu à plusieurs moments de donner la possibilité à l'élève de verbaliser le fonctionnement de cette dernière dans une explication écrite. Si l'explication respecte les attentes que nous avons fixées (fait appel à une autre connaissance sur les fractions, est décrite de façon autonome et tient compte du contexte de la tâche), la stratégie sera considérée comme conceptuelle. Nous notons également quelles techniques sont attendues dans chaque stratégie envisagée. Une stratégie peut ainsi être procédurale routinière ou procédurale non routinière selon la technique qu'elle implique. Les stratégies conceptuelles impliquent, quant à elles, nécessairement plusieurs techniques ou connaissances. Enfin, pour chaque tâche, nous projetons les principaux obstacles devant lesquels les élèves risquent de se retrouver.

De plus, pour chaque tâche, les réponses des élèves sont directement présentées et analysées après chaque analyse *a priori*. Nous observons d'abord si les traces écrites révèlent une réponse correcte, erronée ou partielle. Une réponse sera considérée partielle lorsque les traces écrites de l'élève laissent voir l'application de techniques complètes ou partielles, mais qu'aucune réponse finale, correcte ou erronée, n'est visible ou encore si une réponse est donnée, mais que les traces écrites permettant d'arriver à cette réponse ne sont pas complètes. Nous déterminons si la stratégie employée peut être qualifiée de procédurale ou de conceptuelle selon les critères que nous nous sommes fixés et nous nous intéressons aux choix des élèves en ce qui concerne le caractère routinier ou non des techniques employées. Enfin, nous tentons d'expliquer les erreurs les plus notables des élèves afin de dégager des tendances éventuelles qui pourraient apparaître.

VI. 1. Tâche de représentation (fraction 10/16)

Question a de l'item 1

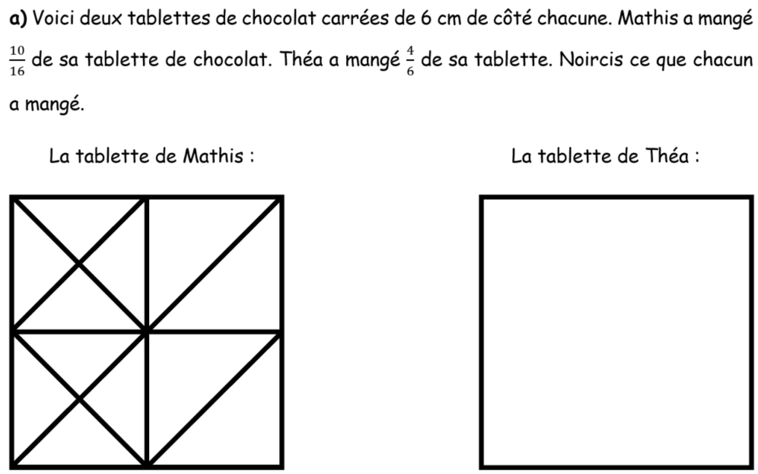


Figure 3: Item 1a

Pour cette question, nous analysons chacune des deux tâches (représentation de la part de Mathis et de celle de Théa) séparément. Cette section concerne la part de Mathis.

Dans cette section nous présentons les caractéristiques de la première tâche et nous donnons deux stratégies attendues pour représenter la fraction 10/16 dans un carré déjà partagé en parts de différentes tailles. Nous présentons ensuite les obstacles qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons et analysons les traces écrites des élèves.

Tableau 2
Caractéristiques de la première tâche de l'item 1a

Type de tâche : Représentation		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Fraction	Fraction réductible avec deux pour seul diviseur premier au dénominateur (10/16)	Vérifier si l'élève peut représenter une fraction familière et s'il utilise la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction »* ou encore la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*.
Figure	Un carré déjà partagé en deux types de parts.	Vérifier quel type de subdivision du carré l'élève utilise (petit triangle, grand triangle ou autre).
Représentations	Passage du symbolique au pictural continu.	Variation des modes de représentation dans le test.

Sens	Partie-tout	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 1.1 Stratégies et obstacles attendus

La première tâche de l'item 1a peut être résolue par une stratégie procédurale ou par une stratégie conceptuelle. La stratégie conceptuelle identifiée implique la mobilisation et la mise en relation de plusieurs techniques associées à la représentation de fraction.

Stratégie 1 : procédurale routinière

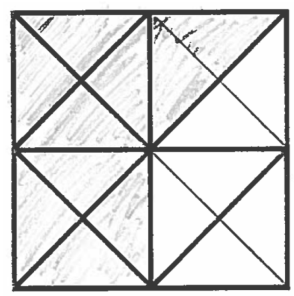


Figure 4 : Premier exemple de stratégie pour la représentation de 10/16

Pour la fraction 10/16, l'élève repartage les grands triangles en deux pour former un total de 16 petits triangles. Il sélectionne ensuite 10 de ces triangles.

Cette stratégie implique la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*.

Stratégie 2 : conceptuelle

$$\frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8}$$

La tablette de Mathis :

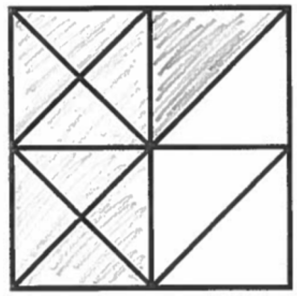


Figure 5 : Second exemple de stratégie attendue pour la représentation de 10/16

Pour la fraction 10/16, l'élève procède d'abord à une réduction de la fraction (10/16 = 5/8). Il sélectionne ensuite 5 triangles équivalents à des huitièmes dans le carré. Dans une telle réponse, la stratégie implique la mobilisation autonome et la mise en application de deux techniques :

Nous considérons que cette stratégie est conceptuelle, car elle implique la mobilisation autonome de la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction »*. Cette technique doit ensuite être mise en relation avec la technique routinière r_1^1 associée à la tâche R^1 *« Prélèvement de a objets dans une collection de b objet »*.

Difficulté prévue :

Difficulté à représenter une fraction dans un carré déjà subdivisé en parts (triangles) de dimensions différentes (Utilisation d'une technique ayant un domaine de validité restreint pour représenter la fraction 10/16 dans la figure présentée : la technique routinière r_1^1 associée à la tâche R^1 *« Prélèvement de a objets dans une collection de b objet »*).

VI. 1.2 Traces écrites des élèves

Tableau 3
Traces écrites des élèves pour la première tâche de l'item 1a

Stratégies	Correctes	Erronées	Partielles	Total
Stratégie 1 (procédurale)	26	3	-	29
Stratégie 2 (conceptuelle)	3	-	-	3
Stratégie autre	-	3	-	3

Total	29	6	0	35

La majorité des élèves a été en mesure de représenter la fraction 10/16 à l'aide de la figure suggérée. Seuls trois élèves ont utilisé la stratégie conceptuelle que nous avions envisagée dans notre analyse *a priori* (S1-2-3). Tous trois provenaient de la classe 1. Tous les autres élèves qui ont fourni une réponse correcte ont utilisé la stratégie procédurale prévue (S4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-17-18-19 ; D3-4-5-6-7-9-10-11-14-15-16).

Réponses correctes

Réponse de l'élève S1 :

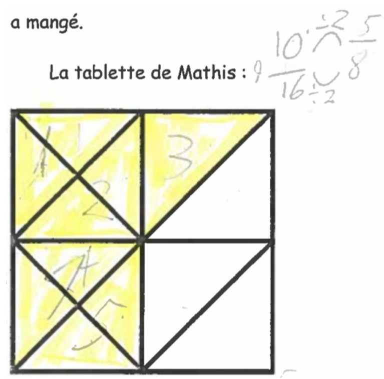


Figure 6: Réponse de l'élève S1 dans la tâche 1 de l'item 1a

Réponse de l'élève S4 :

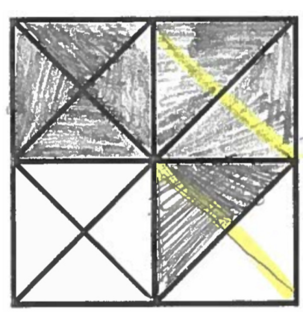


Figure 7: Réponse de l'élève S4 dans la tâche 1 de l'item 1a

L'élève commence par réduire la fraction avant de sélectionner des parts correspondant à des huitièmes. Nous avons considéré cette stratégie comme étant conceptuelle. L'élève S4, pour sa part, choisit de repartager les triangles afin de former des parts correspondant à des seizièmes. Nous avons considéré cette stratégie comme étant procédurale et routinière.

Réponses erronées

Un élève (D8) a effectivement repartagé les grands triangles en deux pour former des petits triangles, mais n'a pas sélectionné le bon nombre de parts.

Réponse de l'élève D8 :

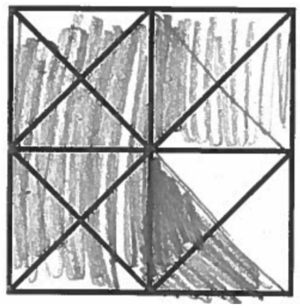


Figure 8 : Réponse de l'élève D8 dans la tâche 1 de l'item 1a

Cet élève a réussi à représenter convenablement la fraction 4/6 dans la deuxième partie de la question 1a), ce qui semble indiquer qu'il est en mesure d'utiliser correctement la technique r_2^3 (partage et prélèvement). Nous soupçonnons donc que cette erreur ait été causée par une tentative de comparer les deux grandeurs dans la question 1b.

Une autre réponse erronée (S16) présente des traces de repartage en deux sur certains des petits triangles :

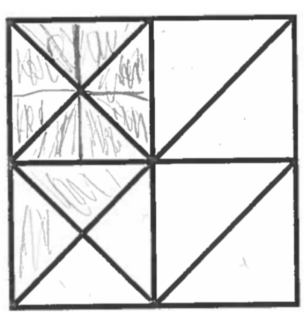


Figure 9: Réponse de l'élève S16 dans la tâche 1 de l'item 1a

L'élève S16 semble avoir sélectionné toute une section correspondant à 8 demi-triangles. Il sélectionne ensuite deux petits triangles à côté. Il semble ainsi avoir sélectionné 10 parts de tailles non équivalentes. Le total des parts correspond bien à 16. L'erreur semble ici être liée à la compréhension de la notion d'équivalence des parts.

Un autre élève (D1) n'a sélectionné que 6/16 de la figure correspondant à la tablette de Mathis :

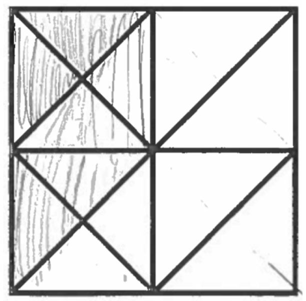


Figure 10 : Réponse de l'élève D1 dans la tâche 1 de l'item 1a

Les traces écrites de l'élève D1 laissent voir un repartage en deux des quatre grands triangles qui n'étaient pas déjà partagés. De plus cet élève a également réussi à représenter correctement la fraction 4/6 dans la figure d'à côté. Nous soupçonnons ainsi qu'il ait pu commettre une erreur d'interprétation de la situation et représenter la partie de chocolat restante plutôt que la partie mangée.

Par ailleurs, trois élèves (D2-12-13) ont utilisé une stratégie erronée fondée uniquement sur la technique routinière r_1^1 associée à la tâche R^1 *« Prélèvement de a objets dans une collection de b objet »*. Cette dernière ne pouvait mener à une réponse correcte. Les élèves qui ont utilisé cette stratégie ont sélectionné 10 parts indépendamment de leurs tailles et sans chercher à faire correspondre le nombre total de parts avec le dénominateur de la fraction.

Réponse de l'élève D12 :

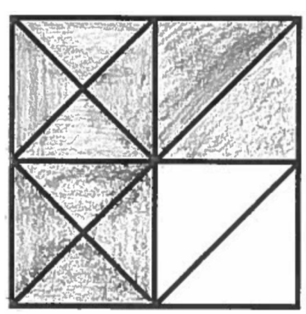


Figure 11 : Réponse de l'élève D12 dans la tâche 1 de l'item 1a

Cela dit, sur trois élèves qui ont proposé une représentation semblable à celle de l'élève D12 pour la fraction 10/16, deux ont été en mesure de répondre correctement à la deuxième partie de la question et de représenter la fraction 4/6 en utilisant la technique r_2^3 (partage et prélèvement) laquelle est plus complexe à mobiliser que la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*. Ce phénomène pourrait s'expliquer par l'interprétation qu'ont fait ces deux élèves du contrat didactique, ne se donnant pas le droit de partager une figure qui a déjà été partagée.

VI. 1.3 Discussion à propos de l'item 1a (part de Mathis)

Pour la première tâche de l'item 1a, une très forte majorité d'élèves (83%) a été en mesure de représenter correctement la fraction 10/16 dans un carré déjà partagé. La plupart d'entre eux (90%) ont utilisé une stratégie procédurale fondée sur une technique routinière. Sur toute la classe, très peu (9%) ont mobilisé une stratégie conceptuelle, mais tous ceux qui l'ont fait ont fourni une réponse correcte. Enfin parmi les six élèves qui ont fourni une réponse erronée (17%), dans la moitié des cas au moins, l'erreur semble davantage avoir été causée par une mauvaise interprétation de la tâche ou des règles implicites entourant cette dernière que par une mauvaise conceptualisation de la fraction. Seuls deux élèves (6%) semblent avoir démontré de la difficulté avec la notion d'égalité des parts.

Ces observations dans cette première tâche tendent à indiquer que les élèves privilégient l'application d'une stratégie procédurale fondée sur une technique routinière plutôt que la mobilisation d'une stratégie conceptuelle lorsque la tâche peut être résolue indifféremment par les deux types de stratégie.

VI. 2. Tâche de représentation (fraction 4/6)

Question a) de l'item 1.

a) Voici deux tablettes de chocolat carrées de 6 cm de côté chacune. Mathis a mangé $\frac{10}{16}$ de sa tablette de chocolat. Théa a mangé $\frac{4}{6}$ de sa tablette. Noircis ce que chacun a mangé.

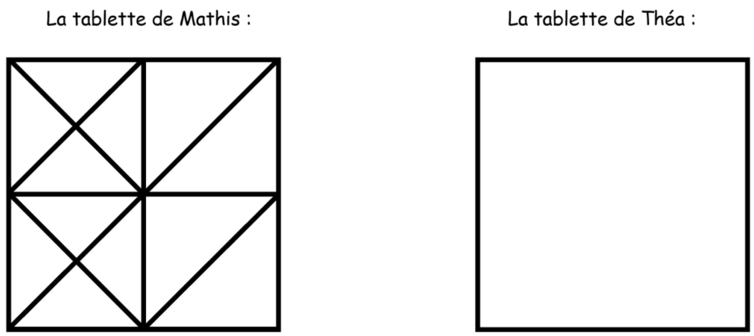


Figure 12 : Item 1a

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de la deuxième tâche contenue dans l'item 1. C'est-à-dire, la représentation de la part de Théa.

Nous présentons également une stratégie procédurale et une stratégie conceptuelle permettant de représenter la fraction 4/6 dans un carré non préalablement partagé. Nous présentons ensuite les obstacles qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons et analysons les traces écrites des élèves.

Tableau 4
Caractéristique de seconde tâche de l'item 1a

Type de tâche : Représentation		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Fraction	Fraction réductible (4/6).	Vérifier si l'élève peut représenter une fraction dans une représentation continue en évitant la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*. Donner la possibilité à l'élève d'utiliser la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction »* pour simplifier l'action de partage.
Figure	Un carré non partagé mesurant 6 cm de côté.	Vérifier si l'élève arrive à appliquer correctement la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement) en évitant la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*.

Représentations	Passage du symbolique au pictural continu.	Variation des modes de représentation dans le test.
Sens	Partie-tout	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 2.1 Stratégies et obstacles attendus

La seconde tâche de l'item 1a peut être résolue par une stratégie procédurale ou par une stratégie conceptuelle. La stratégie conceptuelle identifiée implique la mobilisation et la mise en relation de plusieurs techniques associées à la représentation de fraction.

Stratégie 1 : procédurale routinière

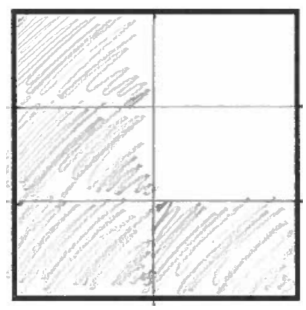


Figure 13 : Premier exemple de stratégie attendue pour la représentation de 4/6

Pour représenter la fraction 4/6, l'élève partage la forme en trois parts égales à l'horizontale ou à la verticale puis en deux dans l'autre sens (ou inversement) pour former 6 parts égales. Il sélectionne ensuite 4 parts. (variante : l'élève partage la forme en 6 parts égales à l'horizontale ou à la verticale et sélectionne 4 parts).

Cette stratégie implique la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* (l'élève ne peut utiliser la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »* avec succès dans cette situation).

Stratégie 2 : conceptuelle

$$\frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$$

La tablette de Théa :

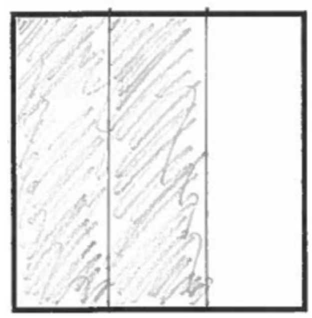


Figure 14 : Second exemple de stratégie attendue pour la représentation de 4/6

Dans cette stratégie, l'élève réduit la fraction (4/6 = 2/3) et représente la fraction 2/3. Dans ce cas, il partagera le carré en 3 à l'horizontale ou à la verticale et sélectionnera 2 parts.

Cette stratégie est conceptuelle puisqu'elle implique la mobilisation autonome de la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction »*. Cette technique doit ensuite être mise en relation avec la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*.

<u>Difficultés prévues :</u>

1. Utilisation d'une technique ayant un domaine de validité restreint pour représenter la fraction 4/6 (la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*).
2. Difficultés à partager un carré en trois ou en six parts en préservant l'égalité des parts.

VI. 2.2 Traces écrites des élèves

Tableau 5
Traces écrites des élèves pour la seconde tâche de l'item 1a

Stratégies	Correctes	Erronées	Partielles	Total
Stratégie 1 (procédurale)	21	2	1	24
Stratégie 2 (conceptuelle)	-	-	-	0
Stratégie autre	-	11	-	11
Total	21	13	1	35

Si une forte majorité des élèves avait réussi à représenter adéquatement la fraction 10/16, seuls 60% d'entre eux ont réussi cette fois-ci à représenter correctement la fraction 4/6 (S2-3-7-9-11-12-13-17-18-19 ; D1-3-5-8-9-10-12-13-14-15-16). Tous les élèves qui ont réussi ont utilisé la stratégie procédurale que nous avions prévue. Aucun élève ne semble avoir tenté la stratégie conceptuelle. Parmi les élèves qui ont présenté une réponse erronée, deux ont mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 et onze ont mobilisé une stratégie autre.

Réponses correctes

Réponses des élèves S9 et D15 :

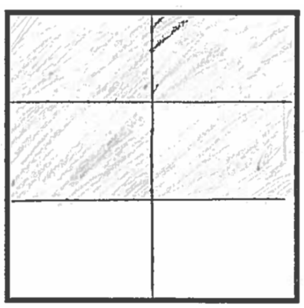


Figure 15 : Réponse de l'élève S9 dans la tâche 2 de l'item 1a

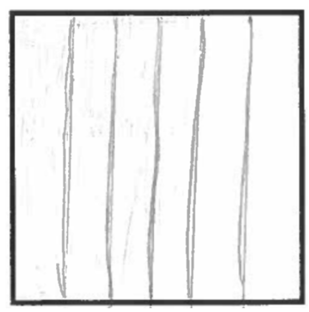


Figure 16 : Réponse de l'élève D15 dans la tâche 2 de l'item 1a

L'élève S9 partage la forme en trois, puis repartage en deux pour former six parts. Il sélectionne ensuite quatre parts. L'élève D15 choisit plutôt de partager la forme en six pour sélectionner quatre parts. Ces deux stratégies ont été considérées procédurales routinières.

Réponses erronées

Parmi les élèves qui semblent avoir utilisé une stratégie impliquant la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement), deux (S4-16) ont fourni une réponse erronée :

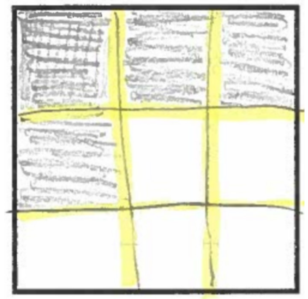


Figure 17 : Réponse de l'élève S4 dans la tâche 2 de l'item 1a

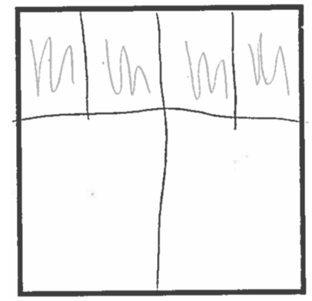


Figure 18 : Réponse de l'élève S16 dans la tâche 2 de l'item 1a

Le premier élève (S4) semble avoir utilisé une méthode de partage systématique en 3 à la verticale et à l'horizontale. Il a ainsi obtenu un total de 9 parts égales plutôt que 6. Le second élève (S16) a bel et bien obtenu 6 parts, mais ces dernières n'étaient pas équivalentes.

Dix autres élèves (S5-6-10-14-15 ; D2-4-6-7-11) ont mobilisé la technique routinière r_1^2 (halving) pour réaliser la représentation. Voici deux exemples de telles réponses.

Réponses des élèves S6 et S14 :

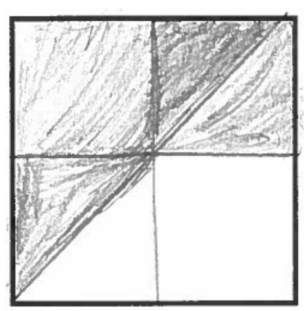


Figure 19 : Réponse de l'élève S6 dans la tâche 2 de l'item 1a

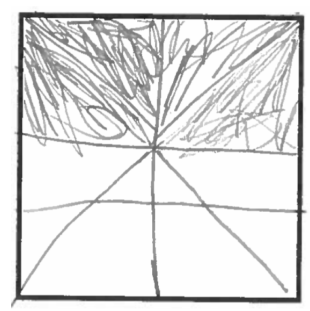


Figure 20 : Réponse de l'élève S14 dans la tâche 2 de l'item 1a

Une telle technique ne pouvait mener à une bonne réponse. Parmi les élèves qui l'ont utilisée, certains ont négligé la taille des parts (élève S6). D'autres ont plutôt négligé le nombre total de parts (élève S14).

Un élève semble chercher une fraction équivalente à la fraction 4/6 en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2.

Réponse de l'élève S1 :

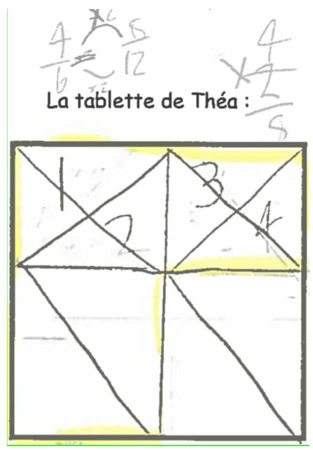


Figure 21 : Réponse de l'élève S1 dans la tâche 2 de l'item 1a

L'élève S1 trouve avec succès la fraction 8/12, équivalente à 4/6. Pour nous, il est possible que l'élève ait, sans succès, cherché à trouver une fraction équivalente à 4/6 ayant 16 pour dénominateur afin de lui permettre, par la même occasion, de répondre à la question b) de l'item 1. Il est également possible que l'élève ait éprouvé de la difficulté à partager la figure en trois ou en six parts égales et qu'il ait cru qu'il serait plus facile de le faire avec une fraction équivalente ayant un dénominateur plus grand. L'élève choisit néanmoins de travailler avec la fraction 8/12. Cela dit, au moment de représenter cette fraction, il n'a pas été en mesure d'appliquer correctement la technique T_4^1. La notion de parts équivalentes n'est pas respectée.

Réponses partielles

Enfin, un seul élève (S8) semble avoir laissé une réponse partielle en utilisant la stratégie procédurale prévue.

Réponse de l'élève S8 :

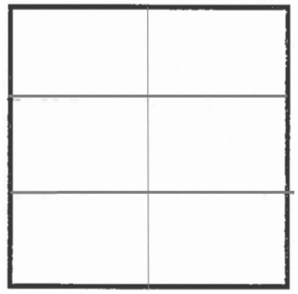


Figure 22 : Réponse de l'élève S8 dans la tâche 2 de l'item 1a

Ce dernier a tracé correctement le découpage de la fraction 4/6 à l'aide de lignes très pâles, mais n'a noirci aucune case. Cet élève n'a par ailleurs, pas répondu à la tâche de comparaison qui formait la deuxième partie de l'item 1. Puisqu'il ne manquait plus qu'à noircir quatre des six carreaux formés, nous soupçonnons que l'élève était en mesure de réaliser cette tâche, mais qu'il ne l'a pas complétée parce qu'il cherchait en même temps une façon de comparer facilement les deux images.

VI. 2.3 Discussion à propos de l'item 1a (part de Théa)

Pour cette seconde tâche de l'item 1a, une majorité d'élèves a, encore une fois, été en mesure de représenter correctement la fraction 4/6 dans un carré non partagé. Cette majorité était toutefois beaucoup moins forte que pour la tache précédente (60% contre 83% dans la première tâche). Cette fois-ci cependant, c'est la totalité des élèves qui a utilisé une stratégie procédurale.

Au contraire de la tâche précédente, les réponses erronées que nous avons observées semblent majoritairement provenir de l'application procédurale d'une technique routinière inappropriée à la situation (77% des réponses erronées impliquaient la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*). La notion d'égalité des parts et le nombre de parts étaient moins souvent respectés que dans la première tâche (37% des élèves n'ont pas respecté l'égalité des parts dans cette tâche contre 6% dans la première tâche).

Ces observations dans cette seconde tâche tendent à appuyer celles faites dans la première. Les élèves semblent à nouveau privilégier l'application de stratégies procédurales fondées sur des techniques routinières plutôt que la mobilisation d'une stratégie conceptuelle lorsque la tâche peut être résolue indifféremment par les deux types de stratégie. Plus encore, pour une proportion importante des élèves (29%), l'application procédurale d'une technique routinière inadaptée à la situation (r_1^2) est apparue comme la stratégie la plus appropriée pour représenter la fraction 4/6, et ce, même si cela impliquait le non-respect du nombre total de parts ou de l'égalité des parts. Pourtant, neuf de ces élèves (90%) avaient montré une sensibilité pour ces deux notions au moment de représenter la fraction 10/16 (S5-6-10-14-15 ; D4-6-7-11).

VI. 3. Tâche de comparaison (fractions 10/16 et 4/6)

Question b) de l'item 1 :

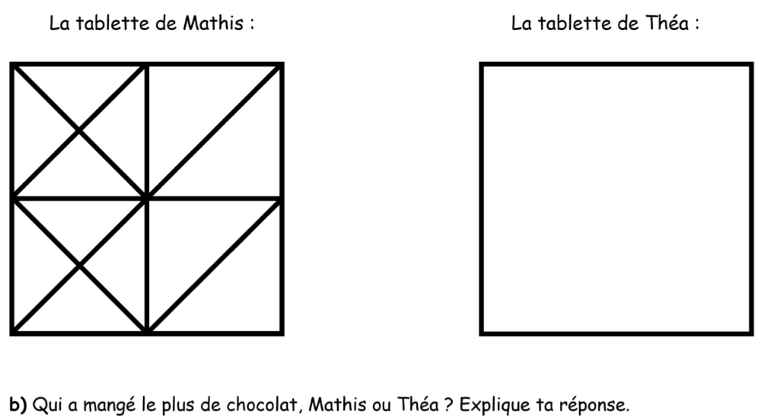


Figure 23 : Item 1b

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de la troisième tâche contenue dans l'item 1. C'est-à-dire, la question b) qui correspond à une comparaison des deux fractions précédemment représentées. Nous présentons également une stratégie procédurale et trois stratégies conceptuelles attendues pour comparer les fractions 10/16 et 4/6 avec ou sans l'utilisation des figures. Nous présentons ensuite les obstacles qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons les traces écrites des élèves.

Tableau 6
Caractéristiques de la tâche associée à l'item 1b

Types de tâches : Comparaison		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Fractions	Dénominateurs non multiples entre eux.	Vérifier la capacité de l'élève à mobiliser et mettre en relation certaines des techniques suivantes pour comparer deux fractions : la technique routinière c_1^2 associée à la tâche C^2 *« Comparaison via les points de repère 1/2 et 1 »* ; la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction »* ; la technique non routinière r_4^3 associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* ; la technique non

		routinière c_1^5 associée à la tâche C^5 *« Comparaison de fractions ayant le même numérateur »*
Figures	Deux carrés de même taille.	Permettre l'utilisation de la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*
Représentation	Picturale et symbolique.	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Partie-tout	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 3.1 Stratégies et obstacles attendus :

L'item 1b peut être résolu par une stratégie procédurale ou par différentes stratégies conceptuelles. Toutes les stratégies conceptuelles identifiées impliquent la mobilisation et la mise en relation de plusieurs techniques associées à la comparaison de fraction.

Stratégie 1 (Reprise de la représentation initiale) : procédurale routinière

Exemple de traces écrites :

L'élève fait un raisonnement tenant compte de la taille des parts (ex. : Les parts de Théa couvrent une plus grande surface que les parts de Mathis).

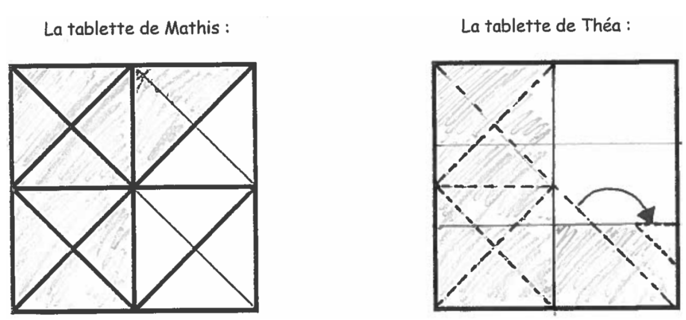


Figure 24 : Exemple de stratégie attendue pour la comparaison des fractions 10/16 et 4/6

Dans cette stratégie, l'élève peut tenter de redessiner en partie ou en totalité l'une des figures en la superposant sur l'autre ou il peut simplement se faire une image mentale de cette superposition. Dans le cadre de cette analyse, une réponse issue d'une telle stratégie sera considérée comme correcte si la comparaison des figures et la justification qui la soutient sont correctes, et ce, même si l'élève n'a pas su représenter correctement les deux fractions dans les deux tâches précédentes. Cela ne s'applique cependant pas dans le cas où la représentation rendrait la comparaison trop évidente[4]. Dans l'exemple donné précédemment, on peut voir qu'une partie de la figure de gauche a été retracée sur la figure de droite pour tenter de faire correspondre les surfaces noircies des deux figures. Sur la figure de droite, on peut voir que le triangle en bas à droite correspondant à 2/16 (ou 1/8) recouvre une surface moins grande que le rectangle sur lequel il est superposé qui correspond, lui, à 1/6.

Cette stratégie implique la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.

__**Stratégie 2 : conceptuelle**__

Exemple de trace écrite :

> L'élève constate que Mathis et Théa ont, tous les deux un peu plus que la moitié (5/8 et 4/6). Il compare les fractions 1/8 et 1/6. Il raisonne ensuite selon la règle suivante : lorsque deux fractions ont un même numérateur, la fraction ayant le plus petit dénominateur est la plus grande.

Pour mobiliser une telle stratégie, l'élève peut décomposer les fractions en faisant apparaître un équivalent à 1/2 (par exemple : $\frac{5}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ et $\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$). Pour ce faire, l'élève peut utiliser la fraction réduite 5/8 ($\frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8}$). L'élève peut également combiner un travail graphique et numérique en repérant que chaque figure représente plus de la moitié de la tablette de chocolat. L'élève peut ensuite comparer la fraction 5/8 à la fraction 4/6 à l'aide du point de repère 1/2. Il constate que les deux fractions correspondent à une part de plus qu'une demie. Il compare ainsi la taille de ces différentes parts en comparant les dénominateurs. Dans ce cas, il compare les fractions 1/8 $<$ 1/6. L'élève peut également procéder d'abord à la décomposition des fractions et, ensuite, procéder à une réduction.

Cette stratégie est conceptuelle puisqu'elle nécessite la mobilisation et la mise en relation autonome de plusieurs techniques. Par exemple, l'élève doit mobiliser la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction »*. Il doit ensuite mettre cette dernière en relation avec la technique routinière c_1^2 associée à la tâche C^2 *« Comparaison via les points de repère 1/2 et 1 »*. Enfin, à partir du travail fait à l'aide des deux techniques précédentes, l'élève peut mobiliser et mettre en œuvre la

[4] Voir la figure 28 : Réponse de l'élève S6 à l'item 1b).

technique non routinière c_1^5 associée à la tâche C^5 *« Comparaison de fractions ayant le même numérateur »*

<u>Stratégie 3 : conceptuelle</u>

Exemple de traces écrites possibles :

Réduction 1 : $\frac{10}{16} \div \frac{2}{2} = \frac{5}{8}$

Réduction 2 : $\frac{4}{6} \div \frac{2}{2} = \frac{2}{3}$

Équivalence 1 : $\frac{5}{8} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{24}$

Équivalence 2 : $\frac{2}{3} \times \frac{8}{8} = \frac{16}{24}$

Comparaison : $\frac{15}{24} < \frac{16}{24} \rightarrow$

Réponse : Théa

Plusieurs avenues sont possibles pour mobiliser une telle stratégie. Par souci de concisions, nous nous contenterons ici d'un seul exemple, mais toute stratégie visant la comparaison des fractions 10/16 et 4/6 via des fractions équivalentes correspondantes ayant un dénominateur commun peut être associée à celle-ci. Dans une telle stratégie, l'élève peut réduire les deux fractions à leur plus simple expression ($\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$). Il cherche ensuite une fraction équivalente pour 10/16 et une autre pour 4/6 afin que les deux fractions à comparer aient le même dénominateur. Pour trouver le multiplicateur approprié, l'élève multiplie les dénominateurs l'un par l'autre ($3 \times 8 = 24$). Il peut également multiplier successivement chaque fraction par 2, 3, 4, etc. Pour la fraction 5/8, il trouve ainsi la fraction équivalente 15/24 et pour la fraction 2/3, il trouve la fraction équivalente 16/24. Il compare ces deux fractions. Lorsque deux fractions ont un même dénominateur, la plus grande fraction est celle ayant le plus grand numérateur.

Une telle stratégie est conceptuelle puisqu'elle nécessite la mobilisation autonome des techniques non routinière c_1^4 et c_2^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*. De plus, la tâche est construite telle que la technique nécessite plusieurs étapes de manipulation des fractions qui doivent être réalisées suivant une mise en relation en temps réel au cours de la résolution de la tâche.

<u>Stratégie 4 : conceptuelle</u>

Exemple de traces écrites possibles :

Recherche de fractions équivalentes pour la fraction 10/16 : $\frac{10}{16} = \frac{20}{32} = \frac{40}{64}$

Recherche de fractions équivalentes pour la fraction 4/6 : $\frac{4}{6} = \frac{20}{30} = \frac{40}{60}$

Comparaison : $\frac{20}{32} < \frac{20}{30}$ ou $\frac{40}{64} < \frac{40}{60}$ → Réponse : Théa

Pour mobiliser cette stratégie, l'élève doit chercher une fraction équivalente pour la fraction 10/16 et une autre pour la fraction 4/6 de façon telle que les deux fractions à comparer auront le même numérateur. Pour se faire, il peut commencer par chercher une fraction équivalente à 10/16 en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2 ou par 4. À partir de la fraction trouvée, l'élève peut chercher un multiplicateur à la fraction 4/6 qui permettrait d'obtenir le même numérateur que celui trouvé pour les fractions équivalentes à 10/16 (dans le cas d'une fraction ayant 20 pour numérateur $4 \times 5 = 20$; dans le cas d'une fraction ayant 40 pour numérateur $4 \times 10 = 40$).

Une telle stratégie est conceptuelle puisqu'elle implique la mobilisation autonome de la technique non routinière c_1^6 associée à la Tâche C^6 *« Comparer deux fractions telles que le numérateur de l'une est multiple du numérateur de l'autre »*. De plus, la tâche est construite de telle manière que la technique nécessite plusieurs étapes de manipulation des fractions qui doivent être réalisées suivant une mise en relation en temps réel au cours de la résolution de la tâche.

Difficultés prévues :

1. Difficulté à comparer les fractions 10/16 et 4/6 car les dénominateurs ne sont pas tels que l'un est multiple de l'autre (de même pour les numérateurs).
2. Difficulté à comparer des surfaces partagées en différentes formes de différentes dimensions.
3. Difficultés à identifier les différents multiples et diviseurs communs de 10, 16, 4 et 6, soit les numérateurs et dénominateurs des deux fractions.

VI. 3.2 Traces écrites des élèves

Tableau 7
Traces écrites des élèves pour l'item 1b

Stratégies/réponses	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total
Stratégie 1 (procédurale)	6	18	2	-	26
Stratégie 2 (conceptuelle)	-	-	1	-	1
Stratégie 3 (conceptuelle)	-	1	-	-	1
Stratégie 4 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie autre	-	6	-	-	6

Aucune stratégie	-	-	-	1	1
Total	6	25	3	1	35

Seul un peu plus du sixième des élèves a réussi à donner une réponse correcte fondée sur la stratégie choisie. Tous ceux qui ont donné une réponse correcte (S4-11-19 ; D1-14-16) ont utilisé la stratégie procédurale que nous avions prévue. Parmi ceux-ci, nous distinguons ceux qui avaient réussi à représenter les deux fractions dans la première partie de l'item 1 (11-19 ; D14-16) de ceux qui ont échoué à représenter l'une d'entre elles (S4 ; D1). La majorité des élèves (69%) qui ont utilisé la stratégie 1 n'ont pas su comparer correctement les deux figures ou fournir une justification adéquate (S6-9-10-12-14-16-17-15 ; D2-4-6-7-8-9-10-11-12-15). Deux élèves n'ont fourni qu'une réponse partielle pour justifier une réponse qui semblait correcte (S2-7). Par ailleurs, 20% des élèves (S1-3-5-13-18 ; D3-13) ont tenté de mobiliser une stratégie employant d'une façon ou d'une autre les techniques c_1^4 ou c_2^4 associées à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*. 86% d'entre eux (S1-5-13-18 ; D3-13), cependant, n'ont appliqué la technique qu'une seule fois de façon procédurale sans chercher à mettre en relation le résultat obtenu avec une autre manière d'appliquer la technique. Un seul d'entre eux (14%) (S3) semble avoir mobilisé cette technique à un niveau conceptuel tout en donnant une réponse erronée. Un autre élève (D5) semble avoir utilisé une stratégie mobilisant des techniques appartenant à la stratégie 2 en donnant une réponse adéquate, mais n'a laissé qu'une réponse partielle. Un élève, enfin, n'a pas répondu à la question (S8).

17% des élèves ont donné une réponse correcte fondée sur des représentations adéquates (S2-7-11-19 ; D14-16). Ces derniers ont tous utilisé la stratégie 1 (procédurale) appliquant la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*. Certains ont mentalement cherché à superposer les morceaux, d'autres ont tracé des lignes pâles sur l'une ou l'autre des deux représentations pour tenter de superposer les figures. Dans tous les cas, la justification faisait état, soit de la technique de retraçage ou de superposition, soit d'un raisonnement fondé à la fois sur le nombre et la taille des parts.

Réponses correctes

Réponse de l'élève S11 :

« *ses Théa qui a manger pluse de chocolat car j'ai séparer avec des ling le chocola […] [sic]* ».

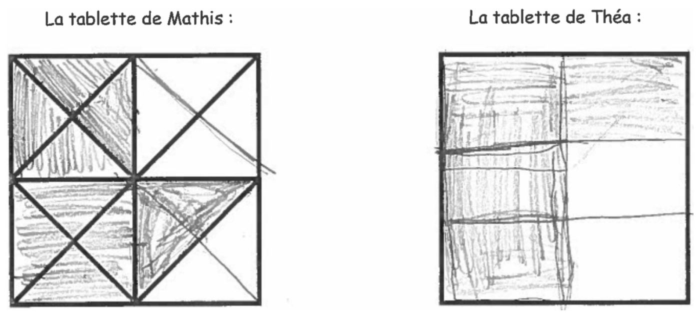


Figure 25 : Réponse de l'élève S11 à l'item 1b

L'élève S11 semble avoir tenté de retracer une partie du partage de la tablette de Mathis (à gauche) en la superposant sur le partage effectué sur la tablette de Théa (à droite). La justification de l'élève vient confirmer que la stratégie employée est fondée sur une comparaison des deux figures correspondant à des représentations continues.

Parmi les élèves qui ont réussi à appliquer correctement la stratégie 1, deux élèves n'avaient pas réussi à représenter convenablement l'une des deux fractions dans les figures qui avaient été proposées dans la première partie de l'item 1 (S4-D1).

Réponse de l'élève S4 :

« *mathis parce que si tu compare les deux tablettes de chocolat enssemble ou que tu plis la feuille en deux tu veras que ses mathis qui en mange le plus* »

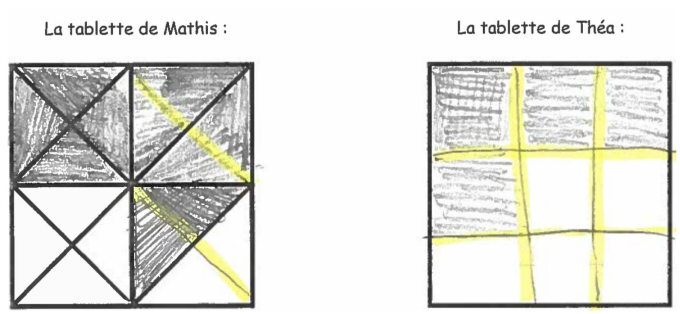


Figure 26 : Réponse de l'élève S4 à l'item 1b

L'élève S4 a commis une erreur dans la représentation de la fraction 4/6 qui rend la comparaison sensiblement plus facile puisque la surface des parts noircies dans la tablette de Mathis (à gauche) est évidemment plus grande que la surface des parts noircie dans la tablette de Théa (à droite). Tout de même, la stratégie 1 est appliquée adéquatement.

<u>Réponses erronées</u>

Certains élèves (S9-12-17) ayant bien représenté les deux fractions dans l'item 1a semblent également utiliser la stratégie 1, cette fois sans succès, en tentant de trouver une part équivalente de forme différente.

Réponse de l'élève S9 :

« *Les deux ont mangé autant de chocolat parce que si tu coupes les deux petits triangles qui dépassent de la moitié et que tu les mets ici ça fait égale [sic]* ».

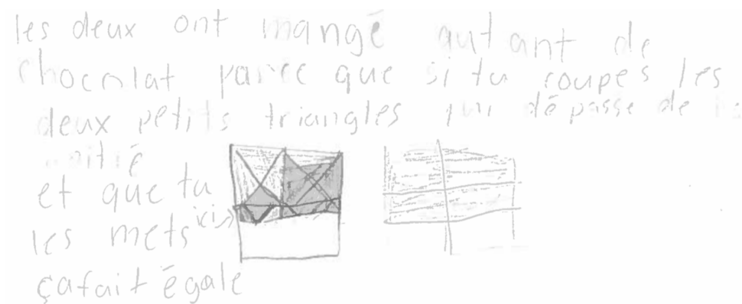


Figure 27 : Réponse de l'élève S9 à l'item 1b

L'élève (S9) tente de comparer les deux figures, mais conclut plutôt que les deux fractions sont égales en redistribuant deux seizièmes de la fraction de Mathis sur une surface en longueur.

Plusieurs élèves (S14-16 ; D8-9-10-12-15), éprouvant sans doute de la difficulté à comparer des parts de taille et de formes différentes, ont plutôt choisi de s'en tenir à une comparaison du nombre de parts.

Réponse de l'élève D10

« *Mathis il en a manger 10 et Théa 4*. »

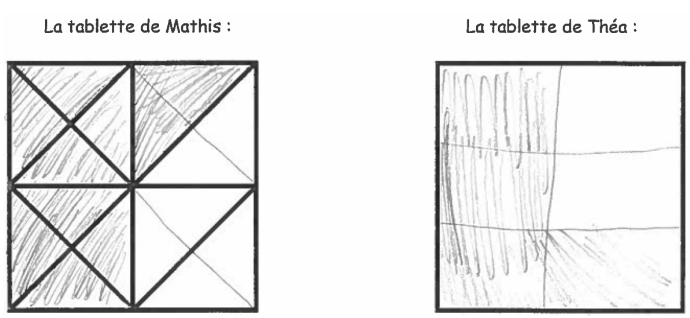


Figure 28 : Réponse de l'élève D10 à l'item 1b

Les représentations des fractions étaient parfois adéquates, parfois non. Comme l'illustre la réponse de l'élève D10, ces élèves ont plutôt fourni une justification s'appuyant sur le nombre de parts indépendamment de leur dimension et de leur forme respective malgré le fait qu'ils avaient pris soin de respecter ces dimensions dans les tâches de représentation.

Certains élèves semblent avoir commis des erreurs dues à la précision des lignes tracées au moment du partage de la barre de Théa (D4-6-7) lorsqu'ils ont tenté d'utiliser la stratégie 1.

Réponse de l'élève D4 :

« *Théa à cause qu se bout son plus gros que mathis* »

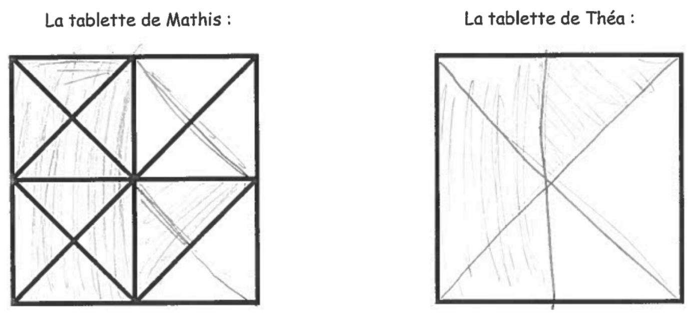


Figure 29 : Réponse de l'élève D4 à l'item 1b

L'élève D4 fait un partage et une sélection qui auraient dû l'amener à conclure à l'égalité des surfaces noircies. Cependant, le tracé de l'élève amène certaines parts sélectionnées à être plus grandes qu'elles ne le devraient dans la tablette de Théa (à droite). Lorsqu'il affirme que les morceaux de Théa sont plus gros, l'élève fait ainsi peut-être référence à la part au centre gauche de la tablette de Théa qui est deux fois plus grosse que les autres parts. On peut également voir que le triangle noirci en haut à droite de la barre de Théa est sensiblement plus grand que le triangle noirci en bas à gauche de la tablette de Mathis alors que si le partage avait été précis, ces deux parts auraient été de taille égale. Enfin, il reste à noter que les élèves qui ont commis ce genre d'erreur n'ont généralement pas tenu compte du nombre de parts et s'en sont tenu simplement à une estimation de la surface totale noircie dans chacune des figures.

Toujours dans le cadre de la stratégie 1, certains élèves (S6-10-15 ; D2-11) ont fourni des représentations des deux fractions à ce point similaires et faciles à comparer que nous soupçonnons que la difficulté à comparer des parts de taille et de formes différentes les ait poussés à modifier la représentation des fractions pour rendre la comparaison visuelle évidente.

Réponse de l'élève S6 :

« *Ils ont égale il equivaux a la même chose* »

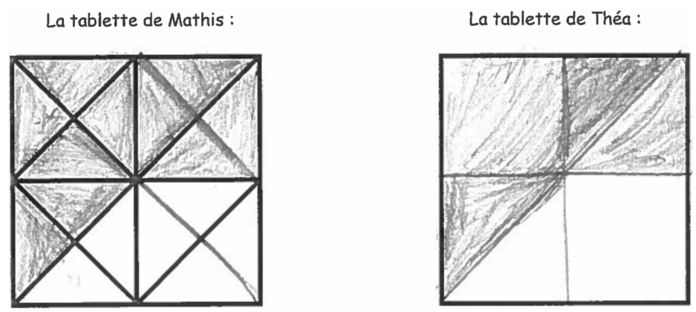


Figure 30 : Réponse de l'élève S6 à l'item 1b

L'élève S6 reproduit, dans le second carré, un partage extrêmement similaire à celui fait dans le premier carré sans tenir compte de l'égalité des parts. Notions dont il avait tenu compte lors du partage du premier carré.

D'autres élèves (S1-5-13-18 ; D3-13) ont plutôt choisi une stratégie impliquant une seule application de la technique c_1^4 associée à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »* sans chercher à la réappliquer sur les nouvelles données apparues. Ces élèves ont, par exemple, réduit une seule fraction ou trouvé une seule fraction équivalente. Nous avons classé ces réponses dans une catégorie à part nommée « Stratégie autre (procédurale) » comme c'est le cas avec l'exemple de l'élève S13.

Réponse de l'élève S13 :

« *Mathis car 10/16 est + gros que 4/6* »

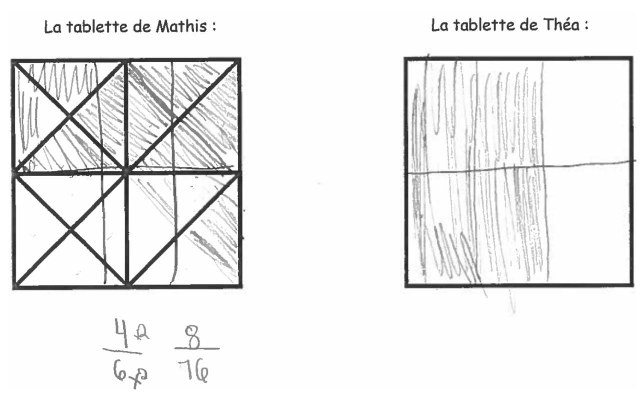


Figure 31 : Réponse de l'élève S13 à l'item 1b

L'élève S13 cherche une fraction équivalente à la fraction 4/6. Il conclut qu'elle est égale à 8/16. Nous soupçonnons que cette erreur de calcul soit due à l'interprétation du contrat didactique par l'élève qui a l'habitude qu'on lui propose des fractions dont le dénominateur de l'une est multiple du dénominateur de l'autre.

Il est intéressant de noter que certains des élèves ayant tenté d'appliquer une stratégie fondée sur la technique non routinière c_1^4 (S1 ; D13) ont laissé voir une certaine surprise d'avoir à comparer deux fractions dont le dénominateur de l'une n'est pas le multiple de l'autre. Par exemple, l'élève D13 écrit : « Mathis parce que si on veux mettre 4/6 sur 10/16 ça ne fonctionne pas [sic] ». Cela peut s'expliquer par le fait qu'il n'est pas attendu par le rapport institutionnel que des élèves de fin de 5^{e} année soient en mesure de comparer de telles fractions de façon autonome. Malgré tout, ces élèves ont vraisemblablement été exposés, au moins de façon procédurale, à toutes les techniques permettant de le faire.

Enfin, un élève (S3) semble avoir réussi à mettre en relation les étapes de la stratégie 3 avec les données de la situation tout en ayant commis des erreurs au moment de l'application de la technique non routinière c_1^4.

Réponse de l'élève S3 :

« *Théa car j'ai trouvé que 1/8 de 12 sa ma donnée 1,15 j'ai fait* $\times 5$ *sa a fait 6 donc 1/2. Ensuite j'ai séparé la tablette de Théa en 6 et son nombre dépassait la moitié* ».

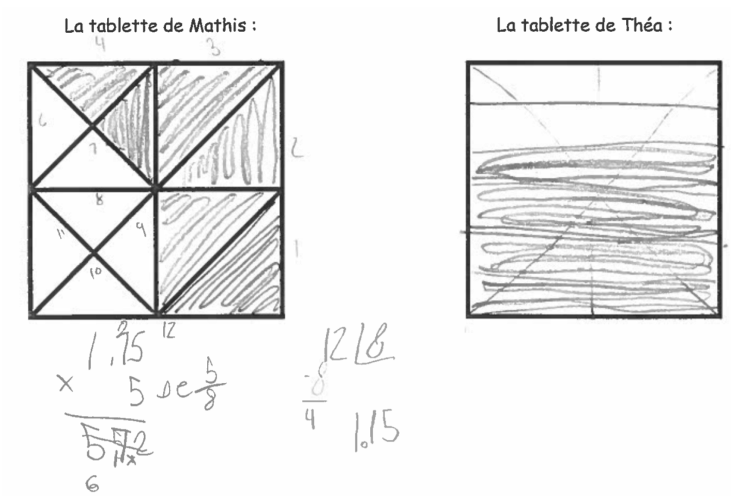


Figure 32 : Réponse de l'élève S3 à l'item 1b

L'élève S3 semble faire des liens entre les différentes actions de la technique utilisée et les données de la situation pour les mettre en relation dans une stratégie cohérente. L'élève commet cependant des erreurs dans l'application des algorithmes de multiplication et de division avec réponses décimales. L'élève réduit la fraction 10/16 pour obtenir 5/8. Il trouve ensuite la fraction 8/12, équivalente à la fraction 4/6. Il cherche ensuite à trouver 1/8 de 12 (ou encore $\frac{1}{8} \times 12$) pour pouvoir multiplier cette valeur par le numérateur de la fraction 5/8 et comparer le résultat au numérateur de la fraction 8/12 cette action revient à placer les deux fractions sous le dénominateur 12. Pour se faire, il divise 12 par 8. L'élève commet cependant une erreur de calcul dans la division et obtient 1,15 plutôt que 1,5. Il tente de multiplier ce nombre par 5 et, devant la difficulté à appliquer la technique, il estime que la réponse est à peu près égale à 6/12 ou à 1/2. Il compare cette fraction trouvée (sans tenir compte de la tablette de Mathis) à la fraction 4/6 représentée par la tablette de Théa.

<u>Réponses partielles</u>

Un seul élève (D5) semble avoir mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 2 que nous avions prévue dans l'analyse *a priori*. La justification, bien que partielle, amène l'élève à se prononcer sur laquelle des deux fractions est la plus grande.

Réponse partielle de l'élève D5 :

« *Je pense que c'est Théa parce que 4/6 = 2/3 et que 10/16 = 2,5/4* »

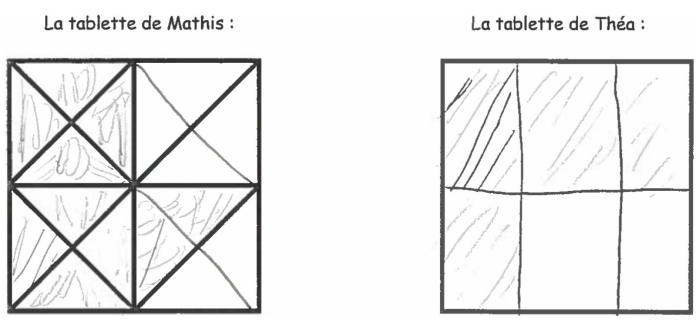


Figure 33 : Réponse de l'élève D5 à l'item 1b

L'élève D5 commence par réduire les deux fractions et il accepte de travailler avec des nombres décimaux. Il obtient la fraction 2/3 après avoir réduit la fraction 4/6 et il obtient la fraction 2,5/4 après avoir réduit la fraction 10/16. Sans expliquer son raisonnement, l'élève conclut que 2/3 est plus grand que 2,5/4. L'élève semble estimer la réponse à partir des fractions réduites. Il y a peu de chance que l'élève ait simplement choisi de comparer individuellement les numérateurs ou les dénominateurs puisqu'il choisit la fraction ayant le plus petit numérateur et le plus petit dénominateur comme étant la plus grande. On sait également que deux techniques qui lui ont été enseignées auraient pu l'amener vers cette réponse. La première est la technique routinière c_1^2 associée à la tâche C^2 *« Comparaison via les points de repère 1/2 et 1 »*. Dans ce cas-ci, 2/3 = 1/2 + 0,5/3 et 2,5/4 = 1/2 + 0,5/4. Il est vraisemblable que l'élève ait pu le constater puisqu'il a choisi de travailler avec des nombres décimaux. La seconde est la technique non routinière c_1^5 associée à la tâche C^5 *« Comparaison de fractions ayant le même* *numérateur »* qui pouvait lui permettre de déduire que 0,5/4 est plus petit que 0,5/3 et ainsi, que la fraction 2/3 était la plus grande. D'autres raisonnements auraient pu être utilisés, mais ceux-ci sont fondés sur des éléments qui ont été enseignés à l'élève. Dans tous les cas, ils forment une stratégie conceptuelle originale. Cela dit, nous gardons à l'esprit ici que l'élève avait une chance sur deux d'avoir raison après sa réduction des deux fractions. La justification donnée ne nous permettait donc pas de définir suffisamment clairement la compréhension qu'a pu avoir cet élève de la situation.

VI. 3.3 Discussion à propos de l'item 1b

Les tendances observées dans les deux premières tâches de l'item 1 semblent se poursuivre alors que les stratégies jugées procédurales se révèlent à nouveau fortement dominantes dans les traces écrites des élèves. Une forte majorité d'élèves (83%) s'est révélée incapable de comparer les deux fractions proposées, et ce, même en appliquant directement la technique procédurale envisagée.

Dans cette tâche, une proportion d'élèves sensiblement plus grande que dans les deux tâches précédentes a mobilisé une technique non routinière (23% comparé à respectivement 9% et 3% pour les deux autres tâches). Toutefois, six de ces élèves (75%) n'ont appliqué la technique qu'une seule fois de façon procédurale, sans chercher à mettre en relation les actions de la technique avec les données apparaissant au cours de la résolution de la tâche. Dans tous les cas, ces élèves ont obtenu une réponse incorrecte. Les deux élèves qui ont su mettre en relation différentes techniques en tenant compte des données de la tâche pour les mettre en relation ont commis des erreurs dans l'application des techniques qui ont mené à une réponse incorrecte. Nous pensons que ce phénomène pourrait être en partie dû au fait que la progression des apprentissages en mathématiques au primaire vise de façon spécifique le type de tâches : « Ordonner des fractions, le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre (ou des autres) » (MÉLS, 2009 p. 7).

VI. 3.4 Discussion à propos de l'item 1

Dans les trois tâches formant l'item 1, une écrasante majorité d'élèves (91% ; 97% ; 74%) a privilégié l'application de stratégies procédurales employant des techniques routinières. Si dans les deux tâches de représentation, le choix d'employer une stratégie procédurale ou conceptuelle avait peu d'impact sur le cout de la résolution, il n'en était pas de même dans la tâche de comparaison. En effet, le choix de comparer en employant une stratégie procédurale nécessitait une précision de partage et un retraçage méthodique des parts en manipulant les formes de différentes tailles. Tout manquement à cette procédure mettait l'élève à risque de commettre une erreur dans la comparaison des surfaces noircies dans les deux figures à comparer. À l'inverse, un raisonnement rapide fondé sur la mobilisation et la mise en relation de plusieurs techniques à la portée d'un élève de fin de 5e année permettaient de déterminer relativement rapidement et avec certitude laquelle des deux fractions était la plus grande. Nous notons tout de même le fait que 8 élèves sur un total de 35 (23%) ont tenté de mobiliser une stratégie, soit conceptuelle soit impliquant une technique non routinière pour la résolution de la tâche de comparaison, rendant ainsi la stratégie moins couteuse. Nous notons également que 3 élèves (9%) ont su mobiliser adéquatement une stratégie conceptuelle lors des tâches de représentation, et ce, même si ce choix ne rendait pas nécessairement la stratégie moins couteuse. Cela pourrait indiquer une certaine potentialité chez les élèves de dépasser le travail d'ordre procédural pour atteindre un travail de niveau conceptuel plus profond. Nous verrons si cette indication se maintient, augmente ou diminue dans les traces écrites des autres items.

Cela dit, à ce stade, nous soupçonnons que cette préférence des élèves pour les stratégies procédurales et pour les techniques routinières puisse être au moins partiellement causée par la familiarité des élèves avec les techniques routinières et par des choix institutionnels orientant l'apprentissage des techniques vers un niveau procédural plutôt que conceptuel.

VI. 4. Tâche de comparaison des fractions 2/4 et 3/8 via une grandeur 16.

Item 2 :

À Pâques, on a organisé une chasse aux œufs, il y avait 16 œufs à trouver. Tu en as retrouvé les $\frac{2}{4}$ et ton ami en a retrouvé les $\frac{3}{8}$. Qui a retrouvé le plus d'œufs?

Explique ta réponse.

Figure 34 : Item 2

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de la tâche contenue dans l'item 2 qui consiste en une comparaison de fractions, le dénominateur de l'une est le multiple du dénominateur de l'autre. Nous présentons également trois stratégies attendues pour la résoudre. Nous présentons ensuite les obstacles qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons les traces écrites des élèves.

Tableau 8
Caractéristiques de la tâche associée à l'item 2

Types de tâches : Comparaison		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**

Fractions	Dénominateurs, l'un est le multiple de l'autre. Une fraction égale et une inférieure à 1/2.	Vérifier la capacité de l'élève à appliquer directement différentes techniques routinières et non routinières de comparaison.
Figures	Discrètes (16) (optionnel)	Permettre l'utilisation d'une technique routinière de comparaison (la technique c_2^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.
Représentation	Symbolique et picturale (optionnel)	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Partie-tout	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 4.1 Stratégies et obstacles attendus :

L'item 2 peut être résolu en appliquant une technique routinière ou une technique non routinière. Dans le cas des techniques non routinières, nous avons considéré le type de justification qui l'accompagnait. Une justification raisonnée et soutenue intégrant différentes connaissances sur les fractions en les reliant à la technique non routinière implique, pour nous, une stratégie conceptuelle.

Stratégie 1 : procédurale routinière

Exemple de traces écrites :

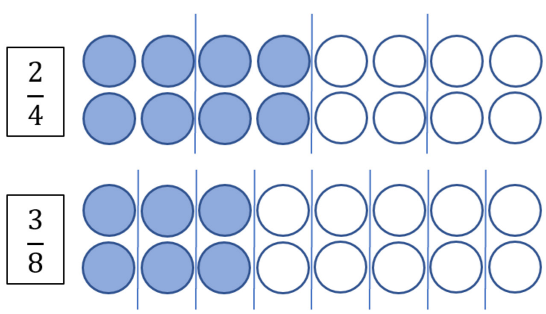


Figure 35 : Premier exemple de stratégie attendue pour la comparaison des fractions 2/4 et 3/8

Dans une telle stratégie, l'élève reproduit la collection de 16 objets de façon picturale et la partage en 4 ou en 8 groupes selon la fraction qu'il souhaite représenter. Il sélectionne ensuite le nombre de groupes correspondant au numérateur de la fraction. Il compare enfin le nombre total d'objets contenus dans les groupes sélectionnés pour chaque fraction et obtient 8 œufs pour la fraction 2/4 et 6 œufs pour la fraction 3/8. Pour effectuer la stratégie, l'élève peut choisir de représenter une seule fois la collection de 16 objets et la partager de deux façons différentes ou il peut choisir de représenter deux fois la collection comme c'est le cas dans l'exemple donné ici.

Cette stratégie implique l'utilisation de la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.

<u>Stratégie 2 : procédurale ou conceptuelle</u>

<u>2.1 Cas d'une stratégie procédurale</u>

Exemple de traces écrites :

« J'ai retrouvé 8 œufs et mon ami n'en a que 6. J'ai retrouvé plus d'œufs ».

$\frac{3}{8}$ de 16	$\frac{2}{4}$ de 16	
$16 \div 8 = 2$	$16 \div 4 = 4$	$6 < 8$
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 4 = 8$	

Figure 36 : Second exemple de stratégie attendue pour la comparaison des fractions 2/4 et 3/8

Dans une telle stratégie, l'élève cherche à déterminer numériquement le nombre d'œufs que chacune des fractions représente à l'aide d'une relation proportionnelle. Il établit ainsi que 3/8 de 16 œufs correspond à 6 œufs en divisant 16 par 8 et en multipliant ensuite par 3. De même, il détermine que 2/4 de 16 œufs correspond à 8 en divisant 16 par 4 et en multipliant ensuite par 2. Il compare ensuite les deux entiers obtenus. Dans le cas d'une stratégie procédurale, si l'élève donne une explication, il se contente de résumer de façon sommaire son raisonnement ou donne simplement la réponse en l'appuyant avec le calcul.

Cette stratégie implique l'utilisation de la technique non routinière r_3^3 (raisonnement par proportionnalité) associée à la tâche R^3 « *Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné* »

<u>2.2 Cas d'une stratégie conceptuelle</u>

Exemple de traces écrites :

« Pour trouver 3/8 de 16 œufs, je dois diviser 16 en 8 parts pour savoir combien d'œufs j'ai avec 1/8. 1/8 = 2 œufs. J'ai trois parts de 1/8. Je fais donc $2 \times 3 = 6$. *Pour trouver 2/4 de 16 œufs, je dois diviser 16 par 4 pour savoir combien d'œufs j'ai avec 1/4. 1/4 = 4 œufs. J'ai deux parts de 1/4. Je fais donc* $4 \times 2 = 8$. *J'ai plus d'œufs avec 2/4 qu'avec 3/8 ».*

Dans une telle stratégie, l'élève reprend essentiellement la technique décrite dans le cas d'une stratégie procédurale, mais il verbalise son raisonnement en associant le dénominateur de chaque fraction au total de la collection dans la situation et explique pourquoi il le fait en affirmant chercher la valeur d'une seule part. Il associe ensuite le numérateur au nombre de parts recherchées en le distinguant du nombre d'œufs et multiplie le numérateur par le nombre de parts correspondant la une seule part. Il compare enfin les deux grandeurs.

Une telle stratégie implique la verbalisation de la technique non routinière r_3^3 (raisonnement par proportionnalité) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* en justifiant son application par différentes connaissances associées aux fractions (association du total au dénominateur et des parts au numérateur ; recherche de la valeur d'une seule part pour multiplier). Nous considérons donc une telle stratégie comme étant conceptuelle.

<u>Stratégie 3 : procédurale ou conceptuelle :</u>

<u>3.1 Cas d'une stratégie procédurale</u>

Exemple de traces écrites :

« J'ai multiplié la fraction ».

$$\frac{2\times 2}{4\times 2} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{4}{8} > \frac{3}{8}$$

Figure 37 : Troisième exemple de stratégie attendue pour la comparaison des fractions 2/4 et 3/8

Dans une telle stratégie, l'élève cherche à placer les fractions sur un même dénominateur pour les comparer. Le moyen le plus simple est de multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction 2/4 par 2 afin d'obtenir la fraction 4/8. Il est alors possible de comparer seulement les numérateurs de la fraction 4/8 et de la fraction 3/8. L'élève pourrait également choisir de placer les deux fractions sous le dénominateur 16. Pour ce faire, il pourrait avoir à trouver d'abord le multiplicateur respectif approprié pour trouver une fraction équivalente à la fraction 2/4 ainsi qu'une fraction équivalente à la fraction 3/8.

Cette stratégie implique l'utilisation de la technique c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*.

3.2 Cas d'une stratégie conceptuelle

Exemple de traces écrites :

« J'ai placé les fractions sur le même dénominateur. Pour trouver un dénominateur commun, j'ai fait $8 = 2 \times 4$. *Ensuite, j'ai multiplié le numérateur et le dénominateur de la fraction 2/4 par 2. J'ai obtenu la fraction 4/8 qui est plus grande que 3/8 parce que le dénominateur est le même et le numérateur est plus grand »*.

Dans une telle stratégie, l'élève reprend essentiellement les étapes de la technique présentée dans la stratégie procédurale, mais il les verbalise en les mettant en relation avec des connaissances sur les fractions (règle de production de fractions équivalentes ; comparaison de fractions de mêmes dénominateurs). Pour nous, une telle stratégie verbalisée ainsi est conceptuelle.

Difficultés prévues :

Difficulté à partager à la fois en quatre et en huit une même collection contenant 16 objets.

VI. 4.2 Traces écrites des élèves

Tableau 9
Traces écrites des élèves pour l'item 2

Stratégies	Correctes	Erronées	Partielles	Total
Stratégie 1 (procédurale routinière)	6	1	-	7
Stratégie 2.1 (procédurale)	-	4	-	4
Stratégie 2.2 (conceptuelle)	-	-	-	0
Stratégie 3.1 (procédurale)	19	1	1	21
Stratégie 3.2 (conceptuelle)	2	-	-	2
Stratégie autre	1	-	-	1
Total	28	6	1	35

Dans cette tâche, une écrasante majorité d'élèves (80%) a réussi à comparer adéquatement les deux fractions (D1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16 ; S1-2-3-5-8-9-10-11-13-15-17-18). Sur ces vingt-huit élèves, six ont utilisé la stratégie 1 et tous provenaient de la classe 1 (S5-9-10-11-15-17). Aucun élève n'a réussi à appliquer correctement la stratégie 2. Vingt et un élèves au total ont choisi d'utiliser la stratégie 3 (S2-3-8-13-18 ; D1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16). Parmi ceux-ci, seuls deux ont verbalisé une réponse qui nous a permis de qualifier la stratégie de conceptuelle (S3-8). De plus, seuls cinq de ces 21 élèves ont mobilisé la stratégie la moins couteuse en plaçant la fraction 2/4 sur le dénominateur 8 plutôt que de placer les deux fractions sur le dénominateur 16 (S3-13 ; D6-13-16). Il est intéressant de noter que tous les élèves de la classe 2 ont réussi cet item en utilisant la même stratégie et qu'ils l'ont mobilisé à un niveau procédural. Enfin, un élève semble avoir mobilisé une stratégie conceptuelle que nous n'avions pas envisagée (S1). Parmi les élèves qui ont mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 1, un seul a donné une réponse erronée (S4). Quatre élèves ont mobilisé la stratégie 2 de façon incorrecte (S7-12-14-19). Un seul élève semble avoir utilisé la stratégie 3 de façon erronée et un autre semble avoir mobilisé une stratégie que nous avons jugée partielle (S6).

Réponses correctes :

Parmi les élèves qui ont réussi en employant la stratégie 1 (procédurale routinière), certains ont choisi de représenter les deux fractions dans une collection représentée une seule fois (S10-17) alors que d'autres ont plutôt choisi de représenter la même collection deux fois, soit une fois pour chaque fraction (S5-9-11-15).

Exemples de réponses correctes issues de la stratégie 1 :

Réponse de l'élève S17 :

« moi parce que j'ai retrouver 8 œuf et mon amie il a retrouvé 6 œuf »

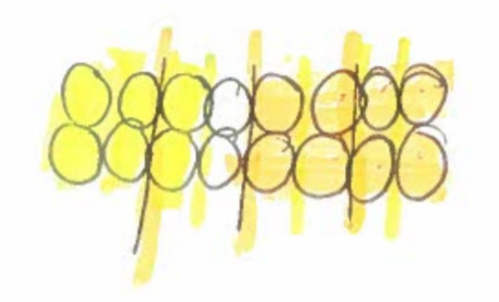


Figure 38 : Réponse de l'élève S17 à l'item 2

Réponse de l'élève S11 :

« Ses moi car j'ai séparer les œuf et jan es 8 et mon amie 6. »

Figure 39 : Réponse de l'élève S11 à l'item 2

L'élève S17 choisit de représenter les deux fractions dans une seule collection de 16 objets. L'élève trace des traits au surligneur pour former huit groupes de deux et sélectionne ensuite trois de ces groupes (à gauche de la figure). Il trace ensuite des traits au crayon pour former quatre groupes de quatre et sélectionne deux de ces groupes (à droite de la figure). L'élève S11 produit plutôt deux collections de 16 objets pour représenter chacune des fractions à comparer.

Parmi les élèves qui ont réussi à comparer des deux fractions en appliquant la stratégie 3, certains ont choisi de placer les fractions sur le dénominateur 16 (S2-8-18; D1-2-3-4-5-7-8-9-10-11-12-14-15), alors que d'autres ont utilisé le dénominateur 8 (S3-13 ; D6-13-16).

Exemples de réponses correctes issues de la stratégie 3 :

Réponse de l'élève D1 :

« Moi parce que $\frac{2\times4}{4\times4}=\frac{8}{16}$ *et* $\frac{3\times2}{8\times2}=\frac{6}{16}$ *»*

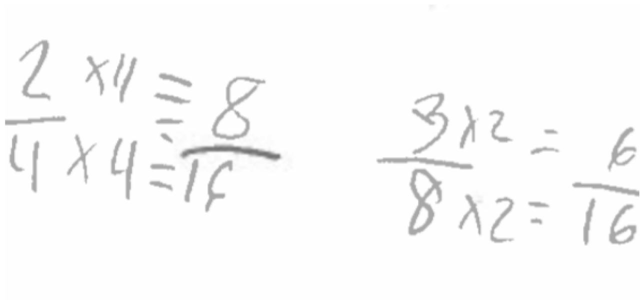


Figure 40 : Réponse de l'élève D1 à l'item 2

Réponse de l'élève S8 :

« J'ai mis 2/4 sur le plus gros dénominateur (8) et ça m'a donnée 4/8, ensuite j'ai pris 4/8 et je l'ai mis sur 16 car il y avait 16 œufs. Ça m'a donnée 8/16. Ensuite, j'ai mis 3/8 sur 16 et ça m'a donné 6/16, donc j'ai retrouvé plus d'œufs que mon ami ($\frac{6}{16} < \frac{8}{16}$) *».*

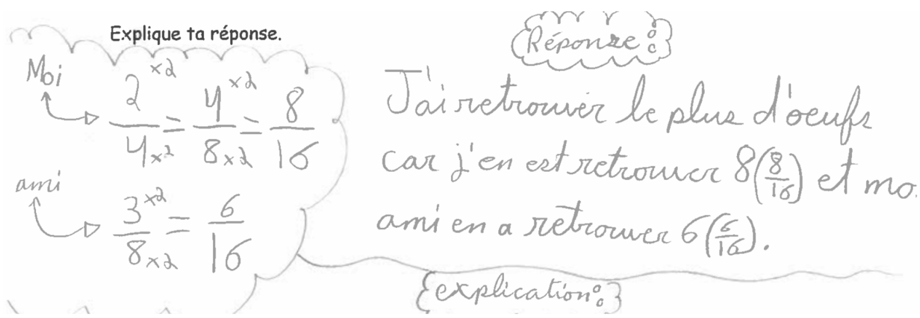


Figure 41 : Réponse de l'élève S8 à l'item 2

L'élève D1 choisit de multiplier le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions pour faire correspondre le dénominateur au total de la collection de 16 objets. Une telle stratégie nous est apparue plutôt procédurale. L'élève S8, commence plutôt par placer la fraction 2/4 sur le dénominateur 8 en formant la fraction 4/8. Il ne s'arrête cependant pas là et choisit de placer les deux fractions sur le dénominateur 16 pour les représenter dans la collection. Il compare ensuite les deux fractions placées sur 16. L'élève accomplit toutes ces étapes en les verbalisant dans une explication écrite dans laquelle il affirme être à la recherche d'un dénominateur commun et associe ces dénominateurs au total de la collection dans la situation. Cette stratégie nous est apparue plutôt conceptuelle.

Enfin, un élève semble avoir mobilisé une stratégie autre que nous qualifierions de conceptuelle pour cette tâche (S1).

Réponse de l'élève S1 :

« Moi car j'ai trouver le plus d'œuf grâce à ma fraction (2/4) tandis que mon ami avais une fraction plus petite (3/8) ».

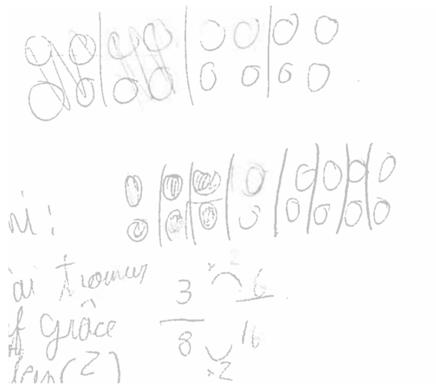


Figure 42 : Réponse de l'élève S1 à l'item 2

L'élève S1 semble mobiliser la technique routinière c_1^1 prévue dans la stratégie 1 pour représenter la fraction 2/4 en représentant une collection de 16 objets partagés en quatre groupes dont deux sont sélectionnés. Au moment de représenter la fraction 3/8, il semble commencer avec une procédure similaire en représentant également une collection de 16 objets, mais cette fois-ci, il détermine la fraction équivalente de façon numérique et la représente dans la collection partagée. Il est également possible que l'élève ait commencé par la représentation picturale et qu'il ait utilisé la technique d'équivalence pour vérifier sa démarche. Dans tous les cas, l'élève semble mobiliser de façon autonome la technique r_4^3 (raisonnement par fractions équivalentes) et la mettre en relation avec la première technique mentionnée.

<u>Réponses erronées :</u>

Nous avons relevé un total de six stratégies d'élèves qui se sont révélées erronées dont une issue de la stratégie 1, quatre autres issues de la stratégie 2 et une enfin issue de la stratégie 3. L'élève qui a employé la stratégie 1 semble avoir bien représenté les grandeurs, mais n'a comparé que le nombre de groupes encerclés sans tenir compte du nombre d'objets dans chaque groupe.

Réponse erronée de l'élève S4 :

« Mon ami parce que plus que ses petit plus qu'il en as » :

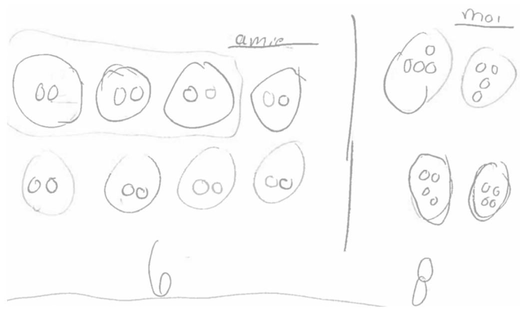


Figure 43 : Réponse de l’élève S4 à l’item 2

L’élève S4 représente adéquatement la situation et identifie même le nombre total d’objets pour son ami et lui-même. Cependant, au moment de donner sa réponse, il conclut que son ami a retrouvé plus d’œufs que lui, et ce, même si le schéma montre que l’ami a moins d’œufs au total (6 pour l’ami contre 8 pour lui). Nous soupçonnons que l’élève n’ait finalement dénombré que les groupes et non le contenu de ces groupes, commettant ainsi une erreur dans l’application de la technique.

Parmi les élèves qui ont employé la stratégie 2, un élève semble avoir inversé les numérateurs des deux fractions au cours de l’application de la technique.

Réponse erronée de l’élève S7 :

« J’ai trouvé le plus d’œufs car 12 est plus grand que 7 »

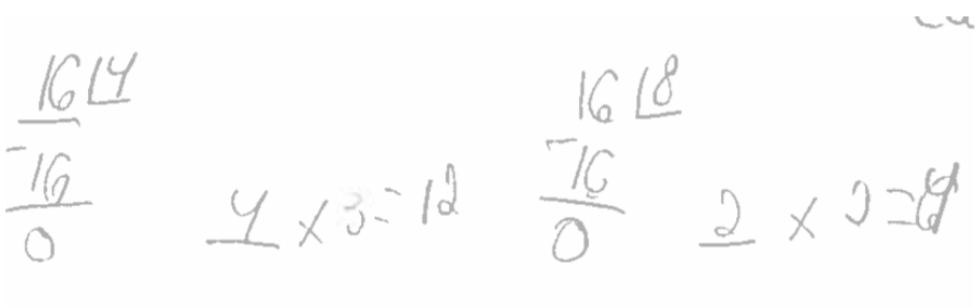


Figure 44 : Réponse de l’élève S7 à l’item 2

L’élève S7 semble chercher le bon multiplicateur pour placer chaque fraction sur le dénominateur 16. Il divise ainsi 16 par 4 et par 8 pour trouver ces multiplicateurs. Cependant, au moment de multiplier le numérateur des deux fractions pour les comparer, l’élève applique respectivement les mauvais multiplicateurs aux mauvais numérateurs. Il en résulte qu’il ne compare pas les bonnes grandeurs. Cette erreur semble due à une confusion dans la gestion des données à travers les étapes de la technique appliquée. Lesquelles étapes semblent autrement bien appliquées.

Trois autres élèves (S12-14-19) ayant une stratégie s'apparentant à la stratégie 2 semblent avoir éprouvé de la difficulté à appliquer correctement la technique visant à déterminer le nombre d'œufs représentés par chaque fraction.

Réponse erronée de l'élève S12 :

> « J'ai trouvé 8 œufs et mon ami 2 parce que, j'ai fait 16÷4=8 donc 8 pour moi et 16÷8 pour mon ami donc 2 pour lui ».

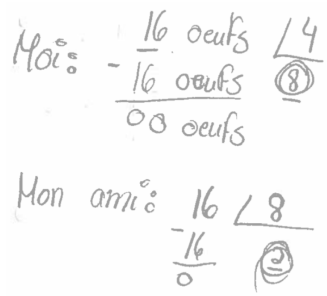


Figure 45 : Réponse de l'élève S12 à l'item 2

L'élève S12 semble essayer de déterminer le nombre d'œufs correspondant à chacune des fractions. Dans la première division, il conclut que 16 divisé par 4 donne 8. Pour nous, une telle erreur pourrait être due à une confusion dans l'application de la technique et à la familiarité de l'élève avec la fraction 2/4 qu'il reconnait comme étant équivalente à la moitié. Pour la seconde fraction, l'élève semble reproduire la même technique en oubliant de faire l'étape suivante de la technique qui impliquerait une multiplication du résultat obtenu par le numérateur de la fraction ($2 \times 3 = 6$). De telles erreurs pourraient s'expliquer par le fait que l'élève a appliqué de façon procédurale une technique sans exactement comprendre la relation qui unissait les valeurs dans la situation.

Enfin, un élève semble avoir utilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 3, mais laisse voir une erreur dans son raisonnement.

Réponse de l'élève S16 à l'item 2.

> « 3/8 = 1/4. 2/4 = 1/2. Alors j'en ai trouver + ».

Dans sa stratégie, l'élève associe la fraction 3/8 à la fraction 1/4 (ou il estime qu'elle est à peu près égale à cette fraction). Il associe ensuite la fraction 2/4 à la fraction 1/2. L'élève semble ainsi tenter d'illustrer un raisonnement selon lequel 3/8 est inférieur à une demie. Sa réponse finale est la bonne, mais son raisonnement reste toutefois erroné puisque la fraction 3/8 est aussi près de la fraction 1/4 que de la fraction 1/2.

Réponses partielles

Finalement, un seul élève semble avoir présenté une réponse que nous avons jugée partielle (S6).

Réponse de l'élève S6 :

« Moi parce que si tu le mais sur le même nombre donéminateur Il sera plus grand ».

L'élève S6 donne une justification qui pourrait indiquer qu'il comprend laquelle des deux fractions est la plus grande, mais il ne fournit aucune trace écrite pour montrer la procédure et prouver son affirmation.

VI. 4.3 Discussion à propos de l'item 2.

Cet item visait à déterminer si les élèves étaient en mesure d'appliquer des techniques de comparaison de fractions, s'ils allaient les mobiliser à un niveau procédural ou conceptuel et, le cas échéant, quels types de techniques seraient privilégiés. Il s'avère qu'une écrasante majorité d'élèves (80%) a réussi à comparer les deux fractions présentées dans la situation. Parmi ces élèves, une majorité également assez forte (21 sur 28 ou 75%) a préféré appliquer une stratégie fondée sur une technique non routinière. Très peu d'entre eux cependant (5 sur 21 ou 24%) ont choisi la stratégie la plus économique en termes de temps et d'efforts à fournir dans la résolution. Ils ont été encore moins nombreux (3 sur un total de 35 ou 9%) à mobiliser une stratégie de niveau conceptuel pour effectuer cette comparaison. Parmi eux, un élève semble avoir mobilisé et mis en relation deux techniques de comparaison dans une stratégie que nous n'avions pas envisagée alors qu'il a lié les représentations symboliques et picturales.

En ce qui concerne la stratégie la moins couteuse, la majorité des élèves qui ont appliqué la stratégie 3, ont cherché à placer les deux fractions sur le dénominateur 16 alors qu'il semble moins couteux de placer seulement la fraction 2/4 sur le dénominateur 8

La préférence des élèves pour la stratégie impliquant la technique non routinière dans un contexte procédural pourrait s'expliquer par le fait que cette technique a été davantage mise de l'avant dans l'enseignement récemment reçu par les élèves. Dans ce cas, particulier, il est possible que l'enseignante de la classe 2 ait mis davantage l'accent sur la technique de la stratégie 3. De plus, le fait que tous les élèves de la classe 2 aient mobilisé la technique à un niveau procédural pourrait indiquer que l'enseignement privilégié s'est fait davantage à ce niveau qu'au niveau conceptuel.

Rappelons cependant que le contrat didactique en ce qui concerne la manière de justifier pourrait également expliquer de telles réponses si les élèves ont intégré une règle implicite selon laquelle les traces de calcul suffisent habituellement à justifier la réponse. Les enseignantes avec lesquelles nous avons travaillé ont cependant affirmé exiger régulièrement une verbalisation à l'oral des traces écrites chez leurs élèves et nous avons repéré des tâches exigeant de telles justifications dans l'un des manuels avec lesquels ces élèves ont été en contact. Il se trouve, à ce propos, que le manuel dans lequel il n'y avait aucune tâche exigeant des explications était le manuel utilisé dans la classe 2. Il nous semble en ce sens que le fait d'encourager les élèves à justifier leurs raisonnements mathématiques verbalement et à l'écrit pourrait contribuer à leur capacité à mobiliser les techniques apprises dans des stratégies conceptuelles. Enfin, rappelons que les capacités des élèves en écriture exercent une influence sur leur capacité à rendre un raisonnement mathématique à l'écrit. Nous pensons cependant que cet élément, à lui seul, ne peut expliquer les résultats que nous avons observés dans cet item puisque c'est presque l'ensemble de tous les participants qui a omis de le faire ou a échoué l'entreprise. Dans le cas de la classe 2, la totalité des élèves était dans cette situation.

VI. 5. Tâche de positionnement de fractions sur une droite numérique

Item 3 :

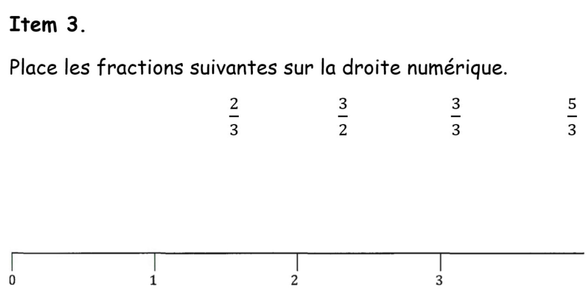


Figure 46 : Item 3

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de l'item 3 qui comporte quatre tâches de positionnement de fraction sur une droite numérique. Chacune de ces tâches peut être résolue par des stratégies procédurales ou conceptuelles. Nous les présentons directement après la présentation des caractéristiques de l'item 3. Nous présentons ensuite individuellement les résultats pour le positionnement de chaque fraction.

Tableau 10
Caractéristiques des tâches associées à l'item 3

Types de tâches : Représentation (Positionnement de fraction sur une droite numérique)		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Fractions	Fractions propres et impropres. Trois fractions de même dénominateur dont une est un nombre entier, une fraction telle que le dénominateur de l'une n'est pas multiple d'une autre.	Permettre à l'élève de mobiliser la technique non routinière r_1^6 associée à la tâche R^6 *« Partage et positionnement sur une droite numérique »* dans une stratégie procédurale ou conceptuelle.
Figures	Continue (modèle de longueur) avec trois graduations correspondant respectivement à 1, 2 et 3 entiers. Un espace de 3 cm sépare chaque graduation pour faciliter le partage.	Permettre l'utilisation d'une technique non routinière de représentation (la technique r_1^6 associée à la tâche R^6 *« Partage et positionnement sur une droite numérique »*) avec des fractions propres et impropres.
Représentation	Symbolique et picturale	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Partie-tout et mesure	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 5.1 Stratégies et obstacles attendus

Les tâches de l'item 3 peuvent être résolues par l'application d'une seule technique non routinière. Nous considérons une telle stratégie comme étant procédurale. Il est cependant possible de mobiliser plusieurs techniques afin de positionner correctement les fractions. Nous considérons de telles stratégies comme étant conceptuelles.

Stratégie 1 procédurale

Exemple de traces écrites :

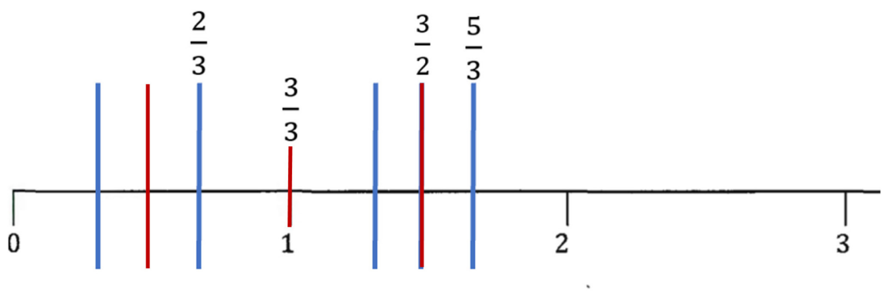


Figure 47 : Exemple de stratégie procédurale attendue pour l'item 3

Dans de telles stratégies, la longueur entre 0 et 1 peut d'abord être partagée en trois pour former des tiers. La fraction 2/3 peut être placée vis-à-vis la ligne indiquant le deuxième tiers tracé à partir de zéro. La fraction 3/3 peut quant à elle être placée vis-à-vis le 1 puisque ce dernier correspond à trois unités de mesure formant un entier. L'élève peut ensuite chercher à placer les fractions impropres. Lesquelles nécessitent deux types de partage différents entre le 1 et le deux sur la droite numérique. Pour placer la fraction 5/3, l'élève peut compter 5 fois la mesure du tiers en utilisant la règle. De même, pour placer la fraction 1/2, il peut choisir de partager la longueur entre 0 et 1 en 2 parts égales puis de compter trois fois cette mesure pour atteindre la fraction recherchée.

Cette stratégie implique l'application de la technique non routinière r_1^6 associée à la tâche R^6 *« Partage et positionnement sur une droite numérique »*.

<u>Stratégie 2 conceptuelle :</u>

Exemple de traces écrites :

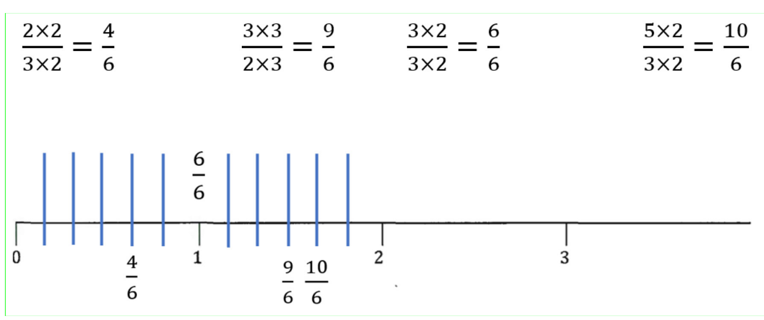


Figure 48 : Second exemple de stratégie attendue pour l'item 3

Dans une telle stratégie, l'élève cherche à transformer les fractions pour obtenir une méthode de partage commune à toutes les fractions. L'action la plus simple consiste dans ce cas à placer toutes les fractions sur le dénominateur 6. L'élève partage ensuite la longueur entre 0 et 1 en 6 parties égales pour obtenir une longueur correspondante à 1/6. Il fait de même pour la longueur entre 1 et 2. Il place ensuite chacune des fractions données sur la droite numérique en dénombrant à partir de 0 un nombre de partitions (de longueur 1/6) égal au numérateur de la fraction à placer. Pour les deux fractions impropres, il est possible de voir apparaître une stratégie de décomposition semblable celle évoquée dans la stratégie 2.

Une telle stratégie nécessite la mobilisation autonome de la technique non routinière r_4^3 (raisonnement par fractions équivalentes) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* qui doit être appliquée à plusieurs reprises et ensuite mise en relation avec les différentes données de la tâche pour produire des fractions de même dénominateur et ensuite partager la droite numérique suivant ce dénominateur commun identifié. Cette étape implique elle-même la mise en relation avec une autre technique, à savoir la technique non routinière r_1^6 associée à la tâche R^6 *« Partage et positionnement sur une droite numérique »*.

<u>Stratégie 3 conceptuelle (fractions 3/2 et 5/3 seulement)</u>

Exemple de traces écrites :

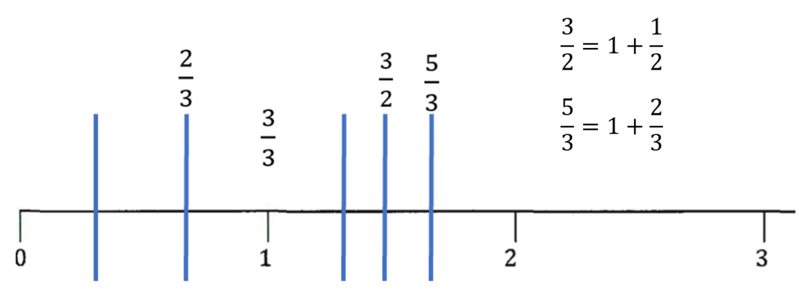


Figure 49 : Premier exemple de stratégie conceptuelle attendue pour l'item 3

Dans une telle stratégie, l'élève choisi plutôt de décomposer au préalable la fraction 5/3 en 1 + 2/3 et partage la longueur entre 1 et 2 en trois parts égales pour placer la fraction vis-à-vis la ligne indiquant la deuxième unité de mesure après le 1. Pour placer la fraction 3/2, l'élève procède également à une décomposition telle que 3/2 = 1 + 1/2. Il peut ensuite repartager l'espace compris entre 1 et 2 pour former des demies. Il peut alors placer la fraction vis-à-vis la ligne de partage qui correspond à une unité de mesure (demie) de plus que 1.

Une telle stratégie nécessite la mobilisation autonome d'une technique de décomposition de fractions. Cette dernière est mise en relation avec la technique non routinière r_1^6 associée à la tâche R^6 *« Partage et positionnement sur une droite numérique »* en tenant compte des particularités associées aux données de la tâche. Il s'agit donc pour nous d'une stratégie conceptuelle.

Difficultés prévues

1. Difficulté à partager le modèle de longueur proposé en tenant compte à la fois des fractions dont le dénominateur est 3 et des fractions dont le dénominateur est 2.
2. Difficulté à positionner les fractions relativement à l'ordre de grandeur exprimé par les valeurs (1, 2 et 3) sur la droite (par exemple, placer une fraction propre avant le 1 et une impropre après le 1).

VI. 5.2 Traces écrites des élèves

Tableau 11
Traces écrites pour le positionnement de la fraction 2/3 sur une droite numérique

Stratégies/réponses	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total
Stratégie 1 (procédurale non routinière)	2	-	-	-	2
Stratégie 2 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie autre	-	29	3	-	32
Aucune stratégie	-	-	-	1	1
Total	2	29	3	1	35

Tableau 12
Traces écrites pour le positionnement de la fraction 3/3 sur une droite numérique

Stratégies/réponses	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total
Stratégie 1 (procédurale non routinière)	2	-	-	-	2
Stratégie 2 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie autre (procédurale)	3	29	-	-	32
Aucune stratégie	-	-	-	1	1
Total	5	29	1	1	35

Tableau 13
Traces écrites pour le positionnement de la fraction 5/3 sur une droite numérique

Stratégies/réponses	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total

Stratégie 1 (procédurale non routinière)	2	-	-	-	2
Stratégie 2 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie 3 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie autre	-	31	1	-	32
Aucune stratégie	-	-	-	1	1
Total	2	31	1	1	35

Tableau 14
Traces écrites pour le positionnement de la fraction 3/2 sur une droite numérique

Stratégies/réponses	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total
Stratégie 1 (procédurale non routinière)	-	2	-	-	2
Stratégie 2 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie 3 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie autre	-	31	1	-	32
Aucune stratégie	-	-	-	1	1
Total	0	33	1	1	35

Dans les tâches de l'item 3, seuls deux élèves (6%) ont réussi à positionner la fraction 2/3. Ces deux mêmes élèves (S1-8) ont également réussi à positionner les fractions 3/3 et 5/3. Tous deux provenaient de la classe 1. Un seul élève a réussi à placer la fraction 3/2 et il n'a réussi à placer aucune autre fraction (S14). Comme cet élève n'a laissé aucune trace écrite de partage ou de calcul, nous avons qualifié cette stratégie de partielle et l'avons placée dans la catégorie procédurale autre. La presque totalité des élèves a utilisé des stratégies similaires pour toutes les fractions. Seul un élève semble avoir adapté la stratégie employée pour l'une des fractions (S1), laquelle l'a amené à une réponse erronée pour la fraction 3/2. Par ailleurs, une écrasante majorité des élèves (83%) a fourni une réponse qui nous a semblé être fondée sur une conception erronée de la correspondance entre un nombre rationnel et la droite numérique (S4-5-6-7-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19 ; D1-2-4-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16). Trois élèves (S2-3 ; D3) n'ont réussi à positionner adéquatement que la fraction 3/3 en la plaçant vis-à-vis le 1 sur la droite numérique. Enfin, un élève n'a fourni aucune réponse ni aucune trace écrite (D5).

Réponses impliquant des stratégies attendues

Comme nous l’avons vu, seuls deux élèves ont présenté des réponses impliquant l’application correcte d’une stratégie attendue pour cette tâche. Tous deux ont choisi d’appliquer une stratégie s’apparentant à la stratégie 1 (S1-8). Nous les présentons ici.

Réponse de l’élève S8 :

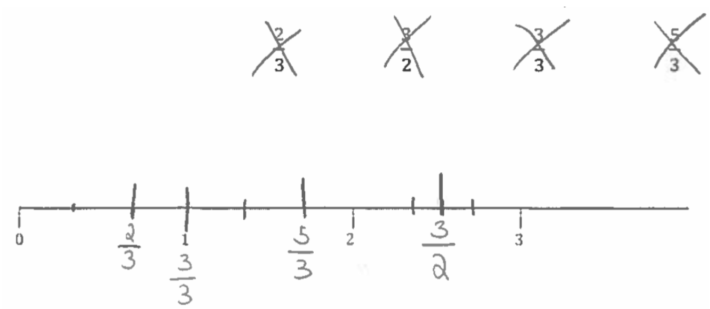


Figure 50 : Réponse de l’élève S8 à l’item 3

L’élève S8 partage l’espace entre 0 et 1 en trois unités de mesure et il fait de même pour l’espace entre 1 et 2. Il dénombre ensuite un nombre d’unités correspondant au numérateur de chaque fraction ayant 3 pour dénominateur. Cela dit, au moment de représenter la fraction 3/2, l’élève dénombre deux entiers, puis une demie plutôt que trois demies. Il inscrit ainsi la fraction à égale distance entre le 2 et le 3. Pour nous, une telle erreur pourrait avoir été causée par une confusion au moment d’appliquer la technique avec une fraction de dénominateur différent. Il est également possible que l’élève entretienne une conception partielle à propos de la demie selon laquelle elle se retrouverait toujours « au milieu ». Dans ce cas, il aurait placé la fraction entre le 3 et le 2 sur la droite numérique en prenant le numérateur et le dénominateur pour des extrémités.

L’élève S1 semble également utiliser correctement la stratégie 1 pour positionner les fractions 2/3, 3/3 et 5/3, mais semble avoir adopté une stratégie différente pour positionner la fraction 3/2. :

Réponse de l’élève S1 :

« J’ai placé les fractions facilement et j’ai transformé une fraction »

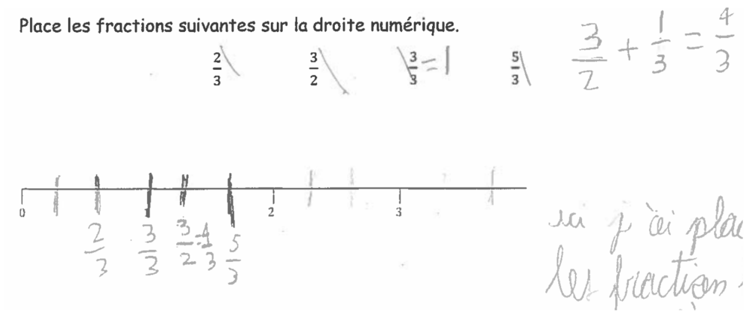


Figure 51 : Réponse de l'élève S1 à l'item 3

L'élève S1 semble effectivement utiliser la stratégie 1 (procédurale) pour les trois fractions ayant 3 pour dénominateur. Cependant, arrivé à la fraction 3/2, l'élève tente de « transformer » la fraction. Nous soupçonnons que ce choix pourrait être dû à une certaine confusion de la part de l'élève entre cette tâche et d'autres types de tâches vues auparavant dans le test ou au cours de son année scolaire (exemple : construire un ensemble de fractions équivalentes ; comparer deux fractions ; additionner deux fractions). Pour transformer la fraction 3/2, l'élève ajoute 1/3 et conclut que le résultat est égal à 4/3. L'élève semble ainsi confondre les fractions 3/2 et 3/3 et il semble également confondre l'addition de fraction et la recherche de fractions équivalente. Ce dernier avait pourtant réussi à trouver des fractions équivalentes dans les items précédents. Nous pensons qu'une telle réaction de la part de l'élève pourrait être due au fait qu'il a l'habitude de rencontrer des situations où les fractions sont telles que le dénominateur de l'une est multiple du dénominateur de l'autre comme cela est prescrit par les documents institutionnels pour la comparaison de fraction. Or, cette situation est plutôt une situation de représentation. Nous avons placé cette stratégie dans la catégorie procédurale autre.

Nous soulignons ici que, parmi tous les élèves, aucun n'a réussi à positionner correctement la fraction 3/2. Cette fraction apparait pourtant d'emblée plus simple à positionner que la fraction 5/3 qui, elle, a été placée de façon correcte par deux élèves. Nous soupçonnons que cette difficulté puisse avoir été causée par le fait que la fraction 3/2 a un dénominateur différent des trois autres fractions ce qui forçait les élèves à adapter la stratégie utilisée.

Réponses fondées sur une conception erronée de la correspondance entre nombres rationnels et droite numérique

Par ailleurs, une écrasante majorité d'élèves a employé, d'une façon ou d'une autre, une stratégie qui ne respectait pas le fonctionnement d'une droite numérique. La plupart des élèves ont tenté de mettre en relation le numérateur ou le dénominateur des fractions avec les nombres affichés sur la droite (S4-5-6-

7-9-10-15-16-17-18-19 ; D1-2-4-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16). D'autres ont plutôt considéré la longueur allant de 0 à 3 comme un entier à partager (S11-12-13).

Réponse de l'élève S4 :

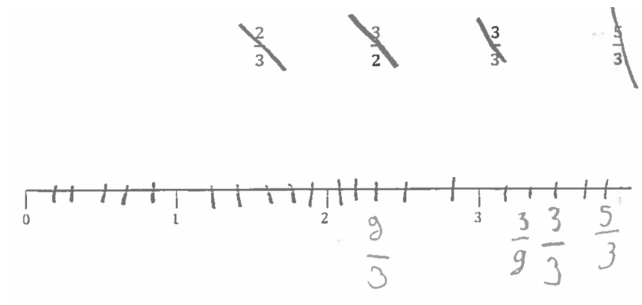


Figure 52 : Réponse de l'élève S4 à l'item 3

Réponse de l'élève S12 :

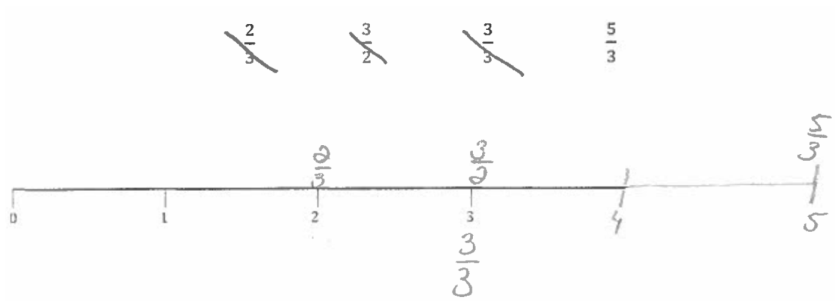


Figure 53 : Réponse de l'élève S1 à l'item 3

L'élève S4 partage l'espace entre chaque nombre en six unités de longueur. Il place ensuite les fractions 2/3, 3/3 et 3/2 à droite du nombre correspondant au numérateur en comptant un nombre de graduations égal au dénominateur de la fraction. Dans le cas de la fraction 5/3, l'élève place la fraction deux graduations plus loin que la fraction 3/3. Il est possible que l'élève ait tenté de placer la fraction à une distance égale à deux fois 1/3 de plus que 3/3.

L'élève S12 semble plutôt considérer que la longueur entre 0 et 1 correspond à l'unité 1/3. Il place ainsi 2/3 vis-à-vis le 2, 3/3 vis-à-vis le 3 et il prolonge la longueur pour placer la fraction 5/3 vis-à-vis un 5 qu'il a tracé lui-même. Il place tout de même 3/2 vis-à-vis la même marque que la fraction 3/3. Il semble ainsi changer d'estimation et associer la longueur entre 0 et 1 à la fraction 1/2. Il applique alors la même logique que précédemment, il dénombre 3 graduations à partir de 0 et positionne la fraction.

De telles traces écrites aussi nombreuses peuvent s'expliquer, d'une part, par le fait qu'il n'est pas attendu que les élèves soient en mesure de placer des fractions de façon autonome sur une droite numérique en fin de 5e année. Cela dit, si la plupart des élèves plaçaient la fraction 5/3 après la fraction 3/3 sur la droite, ils étaient également très nombreux à placer la fraction 3/2 avant ou directement vis-à-vis la fraction 3/3. Cela peut nous indiquer que les élèves sont généralement en mesure de comparer les numérateurs de fractions ayant un même dénominateur pour les ordonner de façon procédurale, mais qu'ils comprennent mal qu'une fraction impropre est nécessairement supérieure à 1.

Réponses associées à un positionnement approximatif

En ce qui concerne les réponses partielles, trois élèves ont réussi à placer de façon imprécise certaines fractions en utilisant une technique de partage approximative ou en associant ces dernières à une valeur décimale approchée (S2-3 ; D3).

Exemple de réponse partielle pour les fractions 2/3 et 5/3 :

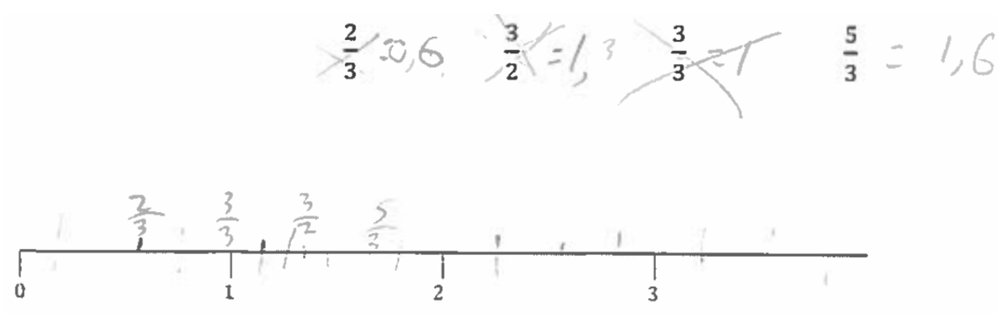


Figure 54 : Réponse de l'élève D3 à l'item 3

L'élève D3 associe chaque fraction à une valeur décimale approchée et place ensuite ces dernières sur la droite numérique. Ce faisant, il évite toutes les difficultés de fractionnement et donne un positionnement approximatif alors qu'un positionnement précis était possible. Dans le cas de la fraction 3/2, l'élève donne une valeur approchée erronée. Cette réponse a donc été placée parmi les réponses erronées. Pour les fractions 2/3 et 5/3, l'élève utilise une valeur approchée approximative et place les fractions à peu près au bon endroit sur la droite numérique. Nous avons considéré ces réponses comme étant partielles et issues d'une stratégie procédurale. Le positionnement de la fraction 3/3 a été considéré comme correct.

Enfin, un seul élève a réussi à placer la fraction 3/2 (S14). C'est cependant la seule fraction qu'il a réussi à placer et il ne laisse aucune trace écrite pour justifier son choix.

Réponse de l'élève S14 à l'item 3 :

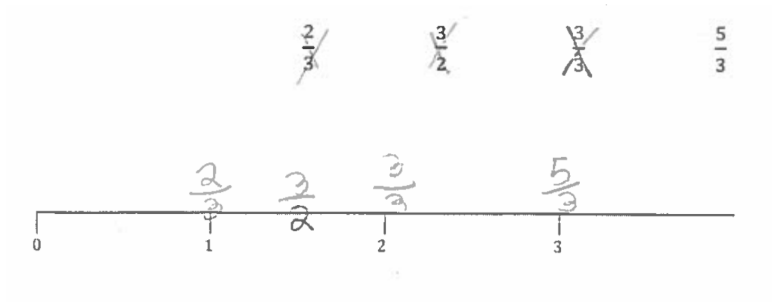


Figure 55 : Réponse de l'élève S14 à l'item 3

L'élève S14 place la fraction 3/2 approximativement à égale distance entre le 1 et le 2, mais également à égale distance entre 2/3 et 3/3. Ce dernier n'a laissé aucune trace de partage sur la droite ni aucun calcul pour justifier le positionnement de la fraction 3/2. Cette réponse nous apparait donc comme une stratégie procédurale et partielle. En ce qui concerne les fractions 2/3, 3/3 et 5/3, l'élève choisit de les positionner respectivement vis-à-vis les nombres 1, 2, et 3 en les plaçant en ordre croissant. Il est possible que l'élève ait mal interprété le sens de la tâche et qu'il ait choisi d'ordonner les fractions qu'il savait ordonner. Le positionnement de ces trois fractions a été considéré comme erroné.

VI. 5.3 Discussion à propos de l'item 3

Cette situation visait à déterminer si des élèves de fin de 5e année étaient en mesure de mobiliser la technique non routinière r_1^6, que ce soit dans une stratégie procédurale ou conceptuelle, pour positionner différentes fractions sur une droite numérique. Les traces écrites des élèves ont révélé que très peu d'entre eux avaient été en mesure de mobiliser la technique dans une stratégie procédurale (6%) et qu'aucun n'avait réussi ni même tenté de la mobiliser dans une stratégie conceptuelle. Nous pensons que cela peut, au moins en partie, s'expliquer par le fait que le rapport institutionnel n'exige pas que les élèves soient en mesure de résoudre ce type de tâche de façon autonome avant la fin de la 6e année du primaire.

Les deux seuls élèves qui ont réussi à mobiliser la technique dans une stratégie procédurale de façon correcte ont su l'appliquer pour les trois fractions 2/3, 3/3 et 5/3, mais ont, tous deux, échoué à le faire pour la fraction 3/2 qui semblait pourtant plus simple à positionner que la fraction 5/3 étant donné que le partage en deux est généralement plus simple que le partage en trois. Ils semblent ainsi avoir éprouvé de la difficulté à adapter une technique qu'ils semblaient pourtant bien appliquer pour une fraction nécessitant un partage différent.

Par ailleurs, plusieurs élèves ont manifesté de la confusion quant à la valeur des fractions impropres dans cette situation. Sur 26 élèves qui ont su placer les fractions 2/3, 3/3 et 5/3 en ordre sur la droite numérique, ce sont 20 d'entre eux (77%) qui ont placé la fraction 3/2 avant la fraction 3/3 sur cette même droite (S4-5-6-9-10-11-12-13-14-15-16-18 ; D1-4-6-7-9-11-12-15). Ce phénomène pourrait indiquer que la conception d'une fraction impropre vue comme une grandeur supérieure au tout est encore partielle chez certains élèves en fin de 5e année. Cependant, le nombre élevé d'échecs pour cet item nous incite, plus globalement, à conclure que la conception de la disposition des nombres rationnels sur la droite numérique semble encore en cours de construction en fin de 5e année. Cette idée est cohérente avec les attentes institutionnelles.

VI. 6. Tâche de représentation via une collection de 21 objets (fraction 4/7)

Item 4 :

Pour ton anniversaire, il y avait 21 petits gâteaux à manger. Tu as mangé $\frac{4}{7}$ de ces petits gâteaux et ton ami Éliott a mangé le reste.

a) Combien de petits gâteaux as-tu mangés ? Explique ta réponse.

Figure 56 : Item 4

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de la tâche contenue dans l'item 4 qui consiste en une tâche de représentation de la fraction 4/7 à travers une collection de 21 objets. Pour résoudre cette tâche, nous présentons les stratégies procédurales et conceptuelles attendues. Nous présentons ensuite les obstacles qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons les traces écrites des élèves.

Tableau 15
Caractéristiques de la tâche associée à l'item 4

Types de tâches : Comparaison		
Variables	Choix didactiques	Objectifs
Nombres	Le nombre d'objets dans la collection est un multiple du dénominateur de la fraction.	Permettre l'utilisation de différentes techniques de représentation routinières et non routinières.
Figures	Discrètes (21) (optionnel)	Permettre l'utilisation de différentes techniques de représentation routinières et non routinières.

Représentation	Symbolique et picturale (optionnel)	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Partie-tout	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 6.1 Stratégies et obstacles attendus

Cette tâche peut être résolue en appliquant une technique routinière ou une technique non routinière. Dans le cas de la technique non routinière, nous avons considéré le type de justification qui l'accompagnait. Une justification raisonnée et soutenue intégrant différentes connaissances sur les fractions associées à la technique non routinière implique, pour nous, une stratégie conceptuelle.

Stratégie 1 : procédurale routinière

Exemple de traces écrites :

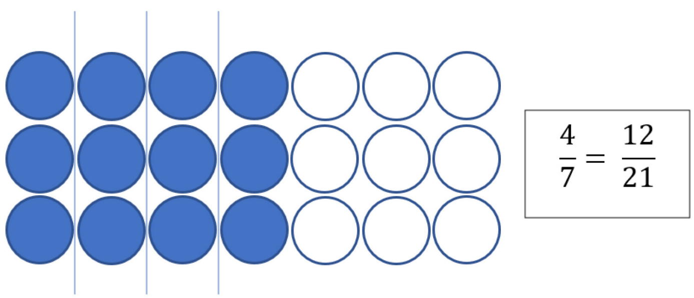


Figure 57 : Exemple de stratégie procédurale routinière pour la représentation de la fraction 4/7

Dans une telle stratégie, l'élève reproduit la collection de 21 objets de façon picturale, probablement dans une disposition rectangulaire par rangées de 7 objets. L'élève obtient 7 groupes de 3 objets. Il sélectionne quatre de ces groupes, correspondant au numérateur de la fraction. Il est également possible de voir l'élève appliquer la technique r_1^3 (double comptage) en formant trois groupes de 7 objets et en sélectionnant 4 objets dans chaque groupe. L'élève conclut que les 4/7 de la collection de 21 correspond à 12 petits gâteaux.

Cette stratégie implique la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) ou encore r_1^3 (double comptage), toutes deux associées à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné ».*

Stratégie 2 : procédurale ou conceptuelle

Stratégie 2.1 Cas d'une stratégie procédurale

Exemple de traces écrites :

« J'ai mangé 12 petits gâteaux ».

$$\frac{4}{7} \times 21 =$$

$$21 \div 7 = 3$$

$$3 \times 4 = 12$$

Figure 58 : Exemple de technique non routinière pour la représentation de la fraction 4/7

Dans une telle stratégie, l'élève utilise les représentations symboliques et a recours à un raisonnement multiplicatif. Il procède ainsi à la multiplication de la fraction 4/7 par l'entier naturel 21. Pour ce faire, il divise l'entier 21 par le dénominateur 7 et il multiplie la réponse obtenue (3) par le numérateur 4 et obtient la réponse 12. Dans le cas d'une stratégie procédurale, la justification de l'élève se réduit à donner la réponse accompagnée des traces de calcul. Si la procédure est nommée, elle n'est pas appuyée par des connaissances entourant la notion de fraction.

Cette stratégie implique l'application directe de la technique non routinière r_3^3 (raisonnement par proportionnalité) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »***.**

Stratégie 2.2 Cas d'une stratégie conceptuelle

Exemple de traces écrites :

« Je cherche les 4/7 de 21 petits gâteaux. Je dois diviser 21 par 7 pour avoir une part de 1/7 (21÷7=3). Je mange 4 parts équivalant chacune à 3 petits gâteaux. Je dois multiplier 3 par 4 (3×4=12). J'ai mangé 12 petits gâteaux ».

Dans une telle stratégie, l'élève a recours au même raisonnement multiplicatif que dans le cas de la stratégie procédurale, mais illustre son raisonnement dans une verbalisation écrite cohérente en établissant des liens entre la technique employée et des connaissances sur les fractions. Il associe le dénominateur de la fraction au total de la collection et effectue une division dans le but de retrouver la valeur d'une seule part. Il associe ensuite la valeur des parts au numérateur de la fraction en multipliant cette valeur pour représenter le nombre total de petits gâteaux mangés.

Une telle stratégie implique la mobilisation de la technique non routinière r_3^3 (raisonnement par proportionnalité) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. Cette technique est mise en œuvre dans un raisonnement structuré pour formuler une phrase de justification s'apparentant aux phrases que nous avons formulées précédemment. Pour nous, une telle justification associée à une telle technique en fin de 5e année correspond à une stratégie conceptuelle puisque l'élève doit structurer un raisonnement intelligible à partir de différentes connaissances associées à la notion de fraction et au contexte particulier de la situation (association du dénominateur au total de la collection ; recherche de la valeur d'une seule part ; association du numérateur au nombre de parts ; etc.).

Stratégie 3 : procédurale ou conceptuelle

Stratégie 3.1 Cas d'une stratégie procédurale

Exemple de traces écrites :

« J'ai multiplié la fraction/J'ai trouvé une fraction équivalente ».

$$\frac{4\times 3}{7\times 3} = \frac{12}{21}$$

Figure 59 : Second exemple de technique non routinière pour la représentation de la fraction 4/7

Dans une telle stratégie, l'élève cherche une fraction équivalente à la fraction 4/7 ayant 21 pour dénominateur. Pour ce faire, il multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par 3. Il obtient ainsi la fraction 12/21. L'élève peut ainsi constater que 4/7 placé sur un total de 21 petits gâteaux correspond à 12 petits gâteaux.

Cette stratégie implique l'application directe de la technique non routinière r_4^3 (fractions équivalentes) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné ».*

<u>Stratégie 3.2 Cas d'une stratégie conceptuelle</u>

Exemple de traces écrites :

« Je cherche 4/7 est égal à combien sur 21 (verbalisation de la recherche d'équivalence). *Pour obtenir 21, je dois multiplier le dénominateur (7) par 3* (associer le dénominateur au total de la collection). *Pour trouver le total, je dois multiplier le numérateur par le même nombre* (fractions équivalentes). *Je fais 4 fois 3. Le total est égal à 12 ».*

Dans une telle stratégie, l'élève reprend essentiellement les mêmes actions que dans la stratégie procédurale, mais supporte son raisonnement par une verbalisation des connaissances qui permettent la mobilisation de la technique. L'élève explique qu'il cherche une fraction équivalente ayant 21 pour dénominateur et associe ce dernier au dénominateur de la fraction présentée. L'élève nomme des éléments associés à la notion d'équivalence et détermine le total en multipliant le numérateur de la fraction par le même nombre que le dénominateur.

Dans de telles stratégies, l'élève verbalise différentes connaissances associées à la notion de fraction et au contexte de la tâche dans une réponse écrite structurée et cohérente (recherche d'équivalence ; association du dénominateur au total de la collection ; etc.). Il met ces connaissances en relation pour justifier la mobilisation de la technique non routinière la technique non routinière r_4^3 (fractions équivalentes) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. Une telle stratégie est donc, pour nous, conceptuelle.

<u>Difficultés prévues :</u>

1. Difficulté à partager la représentation picturale des 21 objets en 7 groupes de 3 ou en 3 groupes de 7.
2. Difficulté à repérer le multiplicateur 3 pour faire passer le dénominateur de la fraction de 7 à 21.
3. Difficulté à multiplier la fraction 4/7 par 21.

VI. 6.2 Traces écrites des élèves

Tableau 16
Traces écrites des élèves pour l'item 4

Stratégies	Correctes	Erronées	Partielles	Total
Stratégie 1 (procédurale routinière)	7	1	-	2

Stratégie 2.1 (procédurale)	2	1	-	3
Stratégie 2.2 (conceptuelle)	1	-	-	1
Stratégie 3.1 (procédurale)	11	2	-	13
Stratégie 3.2 (conceptuelle)	7	-	-	7
Stratégie autre	3	-	-	3
Total	31	4	0	35

Dans cet item, une écrasante majorité d'élèves a été en mesure de représenter adéquatement la fraction 4/7 via une collection de 21 objets (89%). La majorité d'entre eux a choisi, pour ce faire, d'avoir recours à une technique non routinière (S3-6-7-8-13-18 ; D1-2-3-4-5-6-7-8-10-11-12-13-14-15-16). Cela pourrait s'expliquer par le fait que l'application de ces techniques était beaucoup moins couteuse que l'application des techniques routinières. Cela pourrait également s'expliquer par le fait que ces techniques ont été enseignées au cours de l'année que les élèves venaient de vivre. Au total, ce sont 10 élèves (29%) qui ont mobilisé une stratégie que nous avons qualifiée de conceptuelle (S3-5-8-9 ; D1-3-4-6-13-14). Parmi eux, l'un a mobilisé la stratégie 2.2 (S3), sept ont mobilisé la stratégie 3.2 (S8 ; D1-3-4-6-13-14) et deux autres ont mobilisé une stratégie autre (S5-9).

Un phénomène intéressant est apparu au cours de l'analyse. Il s'avère que tous les élèves de la classe 2 ont répondu à cette tâche en employant exactement la même stratégie et la même technique, à savoir la technique non routinière r_4^3 (fractions équivalentes) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. Seul un élève de la classe 2 a fourni une réponse erronée.

Dans la classe 1, les stratégies ont été plus réparties avec huit élèves ayant employé la stratégie 1 (S1-4-11-12-15-16-17-19), quatre ayant choisi la stratégie 2 (S2-8-13-18) et quatre autres ayant employé la stratégie 3 (S3-6-7-14). Un élève a eu recours à la technique routinière r_1^3 (double comptage) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* (S10). Nous avons considéré la stratégie utilisée comme étant procédurale et autre. La réponse a été considérée comme correcte. Un seul élève a fourni une réponse erronée en appliquant une stratégie routinière (S12) et trois en ce qui concerne les stratégies non routinières (S2-14 ; D9).

Réponses correctes :

Certains élèves ont employé une stratégie impliquant des techniques routinières pour résoudre la première tâche de l'item 4 (S1-4-5-9-10-11-15-16-17-19) :

Réponse de l'élève S4 :

« Il a manger 12 petits gâteaux »

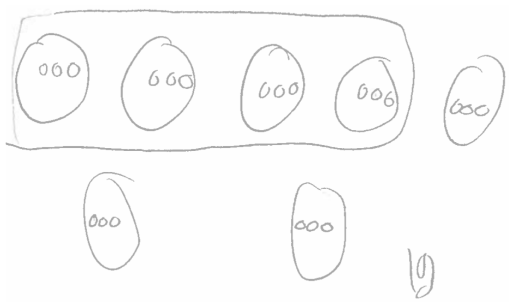


Figure 60 : Réponse de l'élève S4 à l'item 4

Réponse de l'élève S10 :

« J'en enlève 4 à chaque paquet de 7 »

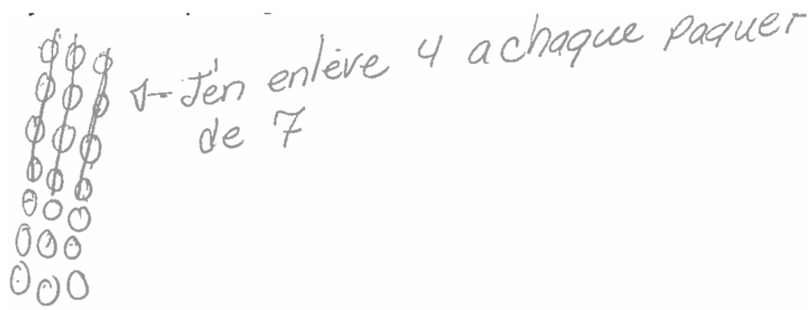


Figure 61 : Réponse de l'élève S10 à l'item 4

L'élève S4 forme 7 groupes et il distribue des éléments dans chacun deux jusqu'à 21. Il sélectionne ensuite 4 de ces groupes et dénombre le nombre total d'objets qu'ils contiennent. Il utilise ainsi la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. L'élève S10, quant à lui, produit plutôt des groupes de 7 jusqu'à obtenir 21. Il sélectionne ensuite quatre éléments par groupe de 7. Il utilise ainsi la technique routinière r_1^3 (double comptage), également associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. Il est cependant le seul élève à avoir utilisé une telle technique. Nous avons classé cette stratégie dans la catégorie procédurale autre et avons considéré la réponse correcte.

Certains élèves ont combiné les techniques de plusieurs stratégies que nous avions envisagées en représentant la situation de façon picturale et en représentant une partie de la situation par un calcul associé à la stratégie 2 (S5-9).

Réponse de l'élève S5 :

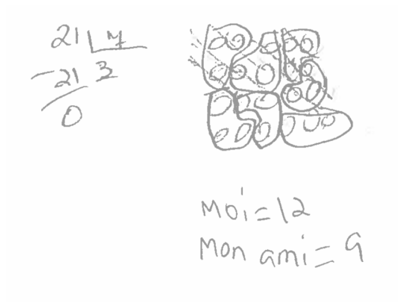


Figure 62 : Réponse de l'élève S5 à l'item 4

L'élève S5 commence par diviser 21 par 7. Il obtient 3. Ce qui lui indique le nombre à placer dans chaque groupe. Il obtient ainsi le nombre de groupes en partageant la collection en groupes de 3. Il applique ensuite la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. Nous avons considéré de telles stratégies comme étant conceptuelles et autres.

D'autres élèves ont plutôt opté pour une stratégie impliquant une technique non routinière (S3-6-7-8-13-18 ; D1-2-3-4-5-6-7-8-10-11-12-13-14-15-16).

Réponse de l'élève S6 :

« 12 parce que j'ai fait les calculs ».

Figure 63 : Réponse de l'élève S6 à l'item 4

Réponse de l'élève S3 :

« J'en ai mangé 12 car 1/7 de 21 = 3 et $3 \times 4 = 12$*. J'ai mangé 12 gâteaux, il en a mangé 9. »*

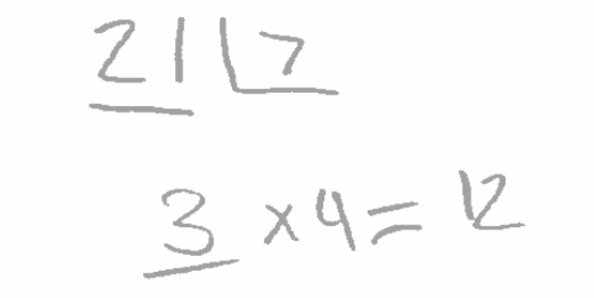


Figure 64 : Réponse de l'élève S3 à l'item 4

Réponse de l'élève D1 :

« J'ai mangé 12 petits gâteaux parce que $7 \times 3 = 21$ *et* $4 \times 3 = 12$ *alors 12/21 »*

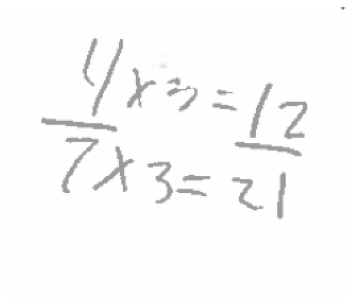


Figure 65 : Réponse de l'élève D1 à l'item 4

L'élève S6 mobilise la stratégie 3 alors qu'il divise la collection par le dénominateur de la fraction et multiplie le résultat obtenu par le numérateur. La justification qu'il donne se résume au calcul et à une courte phrase dans laquelle aucune information n'est ajoutée. Nous avons considéré cette stratégie comme étant procédurale.

L'élève S3 utilise également la même technique, mais associe dans sa justification, l'action de diviser, au fait de rechercher la valeur d'une seule part (1/7). Il associe ensuite le numérateur au nombre de ces parts et effectue la multiplication de 3 par 4 dans son raisonnement écrit. Nous avons considéré cette stratégie comme étant conceptuelle.

L'élève D1, pour sa part, utilise la technique non routinière r_4^3 (raisonnement par fractions équivalentes). Pour ce faire, il associe le dénominateur de la fraction au total de la collection et multiplie le numérateur par ce même nombre. L'élève trouve la fraction équivalente 12/21 et associe le numérateur de cette fraction au nombre de petits gâteaux recherchés dans son raisonnement écrit. Nous avons également considéré une telle stratégie comme étant conceptuelle.

<u>Réponses erronées :</u>

Parmi les élèves qui ont donné une réponse erronée, l'un a privilégié une stratégie procédurale routinière.

Réponse de l'élève S12 :

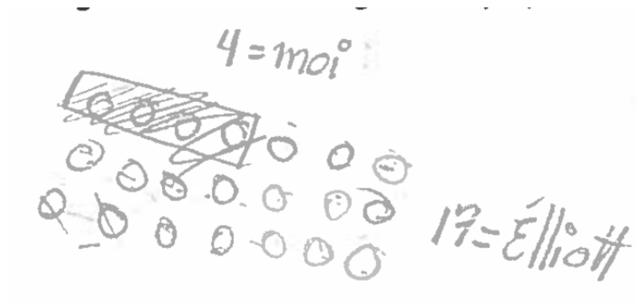


Figure 66 : Réponse de l'élève S12 à l'item 4

L'élève S12 semble tenir compte du dénominateur de la fraction alors qu'il représente la collection en trois groupes de 7. Cependant, au moment de sélectionner les objets il se contente d'en prélever 4 dans une seule rangée. L'élève semble ainsi appliquer directement une technique de prélèvement (r_1^1) alors qu'il noircit un nombre correspondant au numérateur de la fraction sans chercher à respecter les proportions. Cet élève semble ainsi avoir appliqué directement une technique routinière en négligeant ou en oubliant des éléments contextuels nécessaires à la résolution de la tâche.

D'autres élèves ont plutôt commis des erreurs au moment d'appliquer l'une ou l'autre des techniques non routinières (S14 ; D9).

Réponse de l'élève S14 :

« Ton ami a manger 18 copecake. Car 3 + 18 = 21 donc il en a manger 18. »

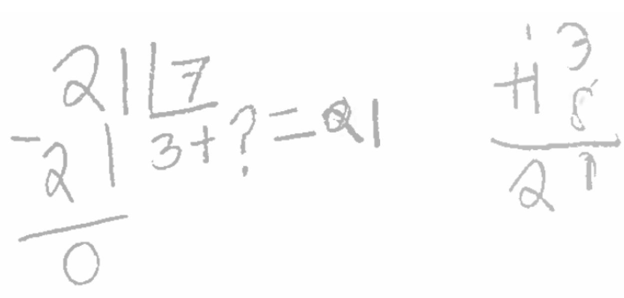


Figure 67 : Réponse de l'élève S12 à l'item 4

Réponse de l'élève D9 :

« 9 parce que si j'ai manger 4/7 des petit gâteaux $7 \times 3 = 21$ *alors si on fait* 7×3 *on doit aussi faire* 3×3 *alors sa égale à 9 ».*

Alors que l'élève S14 omet une étape dans la technique r_3^3 (raisonnement par proportionnalité) en ne multipliant pas la réponse obtenue lors de la division par le nombre de groupes correspondant au numérateur de la fraction, l'élève D9 semble, quant à lui, être confus au moment d'appliquer la technique non routinière r_4^3 (raisonnement par fractions équivalentes) alors qu'il choisit d'appliquer le multiplicateur sur le nombre 3 plutôt que sur le numérateur 4. Il est possible que ces deux élèves éprouvent des difficultés avec l'application de ces techniques. Toutefois, dans le cas de l'élève S9, il pourrait également simplement s'agir d'une confusion due à la nature des chiffres et des nombres présents dans la situation. De telles erreurs pourraient s'expliquer par le fait qu'il n'est pas attendu par le rapport institutionnel que les élèves soient en mesure d'appliquer ces techniques de façon autonome en fin de 5e année. Cela dit, le nombre de réponses correctes dans cette tâche semble indiquer que ces techniques sont généralement bien maîtrisées par les élèves.

Enfin, un élève semble avoir appliqué correctement une stratégie non routinière, mais semble avoir perdu de vue l'objectif de la tâche en cours de route.

Réponse de l'élève S2 :

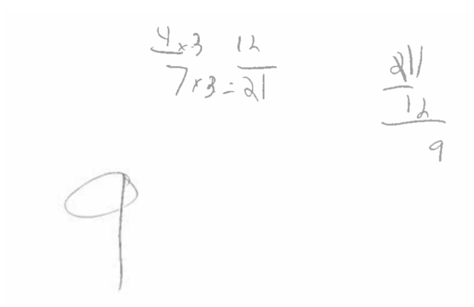


Figure 68 : Réponse de l'élève S2 à l'item 4

L'élève S2 applique correctement la technique non routinière r_4^3 (raisonnement par fractions équivalentes) et effectue une soustraction utile pour répondre à l'item 4b. Cependant, sa réponse finale est 9 plutôt que 12. Nous pensons qu'une telle erreur pourrait être due à une mauvaise lecture de l'énoncé, ou une lecture rapide empêchant l'élève de faire correspondre le bon nombre à la bonne personne.

VI. 6.3 Discussion à propos de l'item 4

La plupart des élèves ont réussi à résoudre la tâche contenue dans l'item 4 (89%). Une majorité d'entre eux a choisi d'employer une stratégie fondée sur une technique non routinière au regard du rapport institutionnel (mais qui pourrait être devenue routinière pour les élèves des deux classes interrogées) plutôt qu'une stratégie procédurale fondée sur une technique routinière (68%). Nous pensons que ce choix peut avoir été influencé, d'une part, par le fait que la stratégie 2 semblait, *a priori*, moins couteuse que la stratégie 1. D'autre part, nous pensons que ce choix peut avoir été influencé par le rapport institutionnel puisque, dans ce cas particulier, on peut soupçonner que les techniques non routinières aient été enseignées plus fréquemment et plus récemment que les techniques routinières étant donné les objectifs de la progression des apprentissages. Cette idée semble être appuyée par les observations que nous avons faites dans la classe 2 alors que l'intégralité du groupe a employé exactement la même technique pour résoudre la tâche.

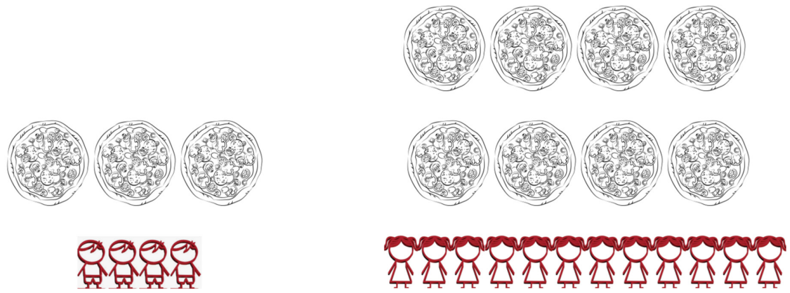
Cela dit parmi tous les élèves, seuls 29% d'entre eux se sont montrés en mesure de mobiliser une stratégie conceptuelle de façon satisfaisante au regard des critères que nous avons fixés. De plus, sur les 10 stratégies conceptuelles considérées, huit l'ont été à cause de la verbalisation écrite de l'élève, dont deux provenant de la classe 1 et six provenant de la classe 2. Dans l'item 2, nous nous posions la question à savoir si un éventuel élément du contrat didactique n'avait pas amené les élèves à s'empêcher de verbaliser une justification écrite de leur stratégie. Nos nouvelles observations dans l'item 4 nous amènent à constater que, si un tel contrat a été mis en place dans les classes 1 et 2, nous avons ici huit élèves qui se sont permis de dépasser les éventuelles règles implicites qui y auraient été associées.

Globalement, l'item 4 semble venir appuyer l'idée selon laquelle les élèves de fin de 5^{e} année sont généralement en mesure d'appliquer correctement des techniques routinières ou non routinières de représentation de fraction dans une stratégie de niveau procédural. Plusieurs d'entre eux, quoique minoritaires, semblent même être en mesure de mobiliser ces stratégies à un niveau conceptuel quand vient le temps de les verbaliser dans une justification impliquant des connaissances sur les fractions.

VI. 7. Tâche de comparaison de deux grandeurs représentées comme des quotients

Item 5 :

À une fête, il y avait 4 garçons et 12 filles. Les garçons ont mangé 3 pizzas et ils ont tous mangé une part égale. Les filles ont mangé 8 pizzas et elles ont toutes mangé une part égale. Toutes les pizzas ont la même taille.



4 garçons mangent 3 pizzas 12 filles mangent 8 pizzas

Qui aura les plus grandes parts, les garçons ou les filles ? _______________

Explique ta réponse :

Figure 69 : Item 5

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de la tâche contenue dans l'item 5 qui consiste en une tâche de comparaison de deux situations de partage. Nous considèrerons donc, dans notre analyse des caractéristiques, que cette tâche comporte deux étapes, l'une impliquant la représentation de fractions, l'autre impliquant la comparaison des fractions représentées. La tâche est ainsi normalement conçue pour amener l'élève à mobiliser et mettre en relation de façon autonome au moins une technique de représentation et une technique de comparaison. De telles stratégies seront qualifiées de conceptuelles. Il est toutefois possible de résoudre cette tâche à l'aide d'une stratégie procédurale. Nous décrivons plus en détail ces stratégies dans la section suivante. Nous présentons ensuite les obstacles qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons les traces écrites des élèves.

Tableau 17
Caractéristiques de la tâche associée à l'item 5

Types de tâches : Comparaison		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Nombres	**Étape 1** : Deux situations de partages exprimés sous la forme d'entiers naturels (4 partagé en 3 et 12 partagé en 8). **Étape 2** : Le nombre de filles est un multiple du nombre de garçons.	**Étape 1** : Amener les élèves à mobiliser au moins une technique de représentation de fractions ou permettre une représentation de la fraction comme un quotient pour mettre cette représentation en relation avec une technique de comparaison.

		Étape 2 : Permettre l'utilisation de la technique c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*.
Figures	Quatre figures représentant quatre grandeurs discrètes. Possibilité de considérer les pizzas comme des grandeurs discrètes et continues	**Étape 1** : Permettre l'utilisation de la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. **Étape 2** : Permettre l'utilisation de la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.
Représentation	Symbolique et picturale	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Partie-tout, rapport, quotient	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 7.1 Stratégies et obstacles attendus

Dans cette tâche, puisque les différentes stratégies envisageables pouvaient impliquer un assez grand nombre de combinaisons de techniques de représentation et de comparaison, et afin d'éviter de multiplier les différentes catégories, nous avons fait le choix d'identifier les stratégies en fonction de la technique de représentation privilégiée. En ce sens, la stratégie 2 comporte deux variantes conceptuelles déterminées en fonction des techniques de comparaison choisie une fois que la représentation a été effectuée. La stratégie 2 implique donc, dans les deux cas un partage des pizzas et une redistribution des parts aux membres de chaque groupe. Cependant, la stratégie 2.1 implique une comparaison visuelle des surfaces représentées par les parts identifiées comme des fractions alors que la stratégie 2.2 implique une comparaison via des fractions de même dénominateur. Nous n'avons pas identifié de variante pour les stratégies 1 et 3.

Stratégie 1 : procédurale

Exemple de traces écrites :

« Les garçons reçoivent des plus grandes parts »

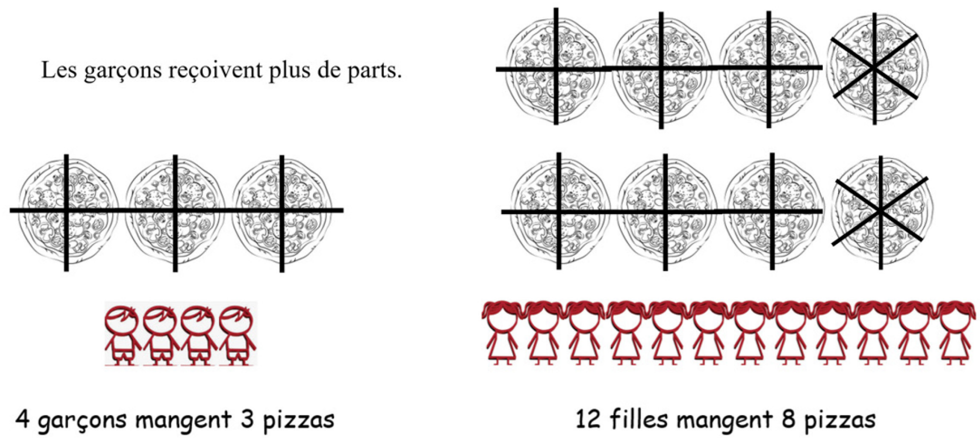


Figure 70 : Exemple de stratégie procédurale pour l'item 5

Dans une telle stratégie, l'élève procède à un partage des pizzas et à une distribution tenant plus ou moins compte de la relation entre les nombres impliqués dans la situation et donc du concept de fraction qui lui est sous-jacent. Il est, par exemple possible de voir l'élève partager toutes les pizzas des deux groupes de façon plus ou moins arbitraire et de distribuer les parts jusqu'à épuisement. Ainsi, un élève pourrait partager toutes les pizzas des garçons en quatre (partage associé à la technique routinière r_1^2 (halving) et encouragé peut-être également par le nombre de garçons). Il pourrait ensuite distribuer chaque part aux garçons jusqu'à épuisement. Il repèrerait ainsi que chaque garçon obtient trois parts. L'élève pourrait par la suite reproduire cette technique sur les pizzas des filles et constater qu'il ne peut pas distribuer trois parts à toutes les filles. Nous pensons qu'il est possible de voir les élèves repartager les pizzas restantes des filles pour tenter de redistribuer les parts de façon équitables pour ensuite comparer visuellement les surfaces représentées. Nous pensons, cela dit, qu'il soit possible de voir apparaître un raisonnement fondé simplement sur la distribution de toutes les parts de la même taille (ex. : les garçons ont trois parts, mais il n'y a pas assez de parts pour que toutes les filles en aient trois elles aussi). Il pourrait alors affirmer qu'un garçon reçoit plus de pizza qu'une fille sans avoir donné une part égale à tous. La particularité d'une telle stratégie est que, dans tous les cas, à aucun moment, l'élève ne fait l'association de son partage à une fraction, quelle qu'elle soit. Nous considérons donc une telle stratégie comme étant procédurale.

Stratégies 2 : conceptuelles

Stratégie 2.1 Cas d'un partage et d'une redistribution associés à une comparaison visuelle des surfaces

Exemple de traces écrites :

« Les garçons ont de plus grandes parts parce que 3/4 est plus grand que 2/3 »

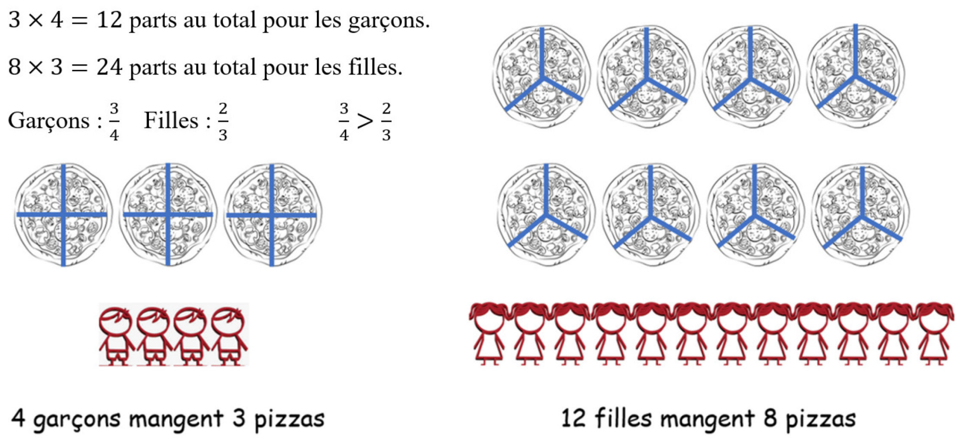


Figure 71 : Premier exemple de stratégie conceptuelle pour l'item 5

Dans une telle stratégie, l'élève interprète la situation comme un partage et une distribution des parts de pizzas, voyant ainsi la fraction selon le sens quotient, mais se rapprochant également du sens partie-tout. Ici, l'élève fait le partage dans le but explicite de représenter des fractions. Dans cette logique, l'élève peut chercher un nombre de parts qui serait égal à un multiple du nombre de garçons ou de filles afin de faciliter la distribution. Il peut ainsi penser à partager les 3 pizzas des garçons en un total de 12 parts et les 8 pizzas des filles en un total de 24 parts ($24 = 12 \times 2$), ce qui demandera de partager chaque pizza des filles en 3 (comme nous l'avons présenté dans l'exemple). Cela dit, chaque pizza peut également être simplement partagée selon le nombre d'individus dans le groupe (ex. : partage en quatre pour les pizzas des garçons et en douze pour celles des filles). En distribuant les parts, l'élève obtient la fraction de ce que chaque personne mange individuellement. Il peut ensuite comparer les deux fractions obtenues (dans ce cas 3/4 et 2/3) en comparant visuellement les surfaces recouvertes tout en ayant identifié les fractions en jeu.

Une stratégie s'apparentant à ce qui a été décrit est conceptuelle puisqu'elle nécessite la mobilisation autonome et la mise en relation d'au moins une technique de représentation et une technique de comparaison. L'élève doit d'abord mobiliser la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* afin d'identifier la fraction représentant ce que chaque personne mange. Cette technique peut ensuite être agencée avec la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.

<u>Stratégie 2.2 Cas d'un partage et d'une redistribution associés à une comparaison de fractions ayant un même dénominateur.</u>

Exemples de traces écrites :

« Les garçons auront de plus grandes parts parce qu'ils ont 3/4 d'une pizza et les filles ont 8/12 d'une pizza. J'ai placé les fractions sur un même dénominateur : $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ *et* $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ *»*

Cette stratégie reprend essentiellement les mêmes étapes que la stratégie 2.1 en ce qui concerne la représentation de ce qu'un membre de chaque groupe mange individuellement. Cela dit, au moment de comparer la valeur de ce que chacun a mangé, l'élève choisit plutôt de placer les fractions sur un même dénominateur pour comparer les numérateurs.

Une telle stratégie nécessite la mobilisation autonome de la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. Cette technique doit ensuite être mise en relation avec une autre technique mobilisée également de façon autonome, à savoir la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*.

<u>Stratégie 3 : Conceptuelle</u>

Exemple de traces écrites :

$$\text{3 pizzas partagées à 4 garçons} = 3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

$$\text{8 pizzas partagées à 12 filles} = 8 \div 12 = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12} \rightarrow \frac{9}{12} > \frac{8}{12}$$

Figure 72 : Second exemple de stratégie conceptuelle pour l'item 5

Dans une telle stratégie, l'élève interprète la situation comme un quotient dans son sens littéral. Dans ce cas, le raisonnement est qu'il est possible de représenter la situation où trois pizzas sont partagées à quatre garçons par la division 3 ÷ 4, laquelle peut s'écrire sous la forme fractionnaire 3/4. *Idem* pour les filles (huit pizzas partagées à douze filles peuvent être représentées par la division 8 ÷ 12 ou encore 8/12). La particularité de cette interprétation est que l'élève ne cherche pas à résoudre la division, mais accepte plutôt de travailler avec cette dernière sous sa forme fractionnaire. L'élève peut ensuite comparer ces deux fractions en les plaçant sur un même dénominateur. Dans ce cas, il verra que 9/12 est plus grand que 8/12.

Cette stratégie est conceptuelle puisque l'élève mobilise de façon autonome la représentation d'une fraction comme une division et met cette représentation en relation avec la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*.

Difficultés prévues :

1. Difficulté à coordonner le partage et la distribution des parts pour que chaque personne ait un nombre de parts égal à celui des autres et que toutes les parts soient équivalentes.
2. Difficulté à trouver un dénominateur commun aux deux fractions à comparer si elles ne sont pas telles que le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre.
3. Difficulté à mettre en relation une technique de représentation et une technique de comparaison.

VI. 7.2 Traces écrites des élèves

Tableau 18
Traces écrites des élèves pour l'item 5

Stratégies	Correctes	Erronées	Partielles	Total
Stratégie 1 (procédurale routinière)	2	7	1	10
Stratégie 2.1 (conceptuelle)	4	9	4	17
Stratégie 2.2 (conceptuelle)	-	1	-	1
Stratégie 3 (conceptuelle)	-	-	-	0
Stratégie autre	1	6	-	7
Total	7	23	5	35

Pour cette tâche, seuls sept élèves ont su fournir une réponse jugée correcte (S1-2-7-10-11-17 ; D8). De ces élèves, deux semblent avoir mobilisé la stratégie 1 (S7 ; D8), quatre semblent avoir mobilisé la stratégie 2.1 (S1-2-10-17) et un autre semble avoir mobilisé une stratégie que nous n'avions pas envisagée (S11). Aucun élève n'a mobilisé la stratégie 3. Parmi les élèves qui semblent avoir mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 1, sept ont présenté une réponse incorrecte (S3-5-6-14-15-19 ; D5). Neuf élèves ont tenté de mobiliser une stratégie s'apparentant à la stratégie 2.1 sans succès (S4-12-

13-18 ; D2-11-15-16). Un seul semble avoir tenté de mobiliser une stratégie s'apparentant à la stratégie 2.2, mais ce dernier a commis une erreur dans la représentation (D14). Six élèves ont tenté de mobiliser une stratégie s'écartant des stratégies envisagées, et ce, sans succès (S16 ; D6-7-9-12-13). Enfin, cinq élèves ont présenté une réponse que nous avons jugée partielle. De ceux-ci, l'un semble avoir mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 (S9) et quatre autres semblent avoir adéquatement partagé et distribué les parts de chacun de façon égale en mobilisant une stratégie s'apparentant à la stratégie 2, mais ont interprété la situation comme s'ils devaient seulement comparer la taille d'un morceau dans la part des garçons avec la taille d'un morceau dans la part des filles (S8 ; D1-4-10).

<u>Réponses correctes :</u>

Pour arriver à une réponse correcte, deux élèves semblent avoir mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 (S7 ; D8).

Réponse de l'élève S7 :

« Les garçons car ils ont mangé trois pointes les filles aussi mais la dernière pointe des garçons est plus grosses ».

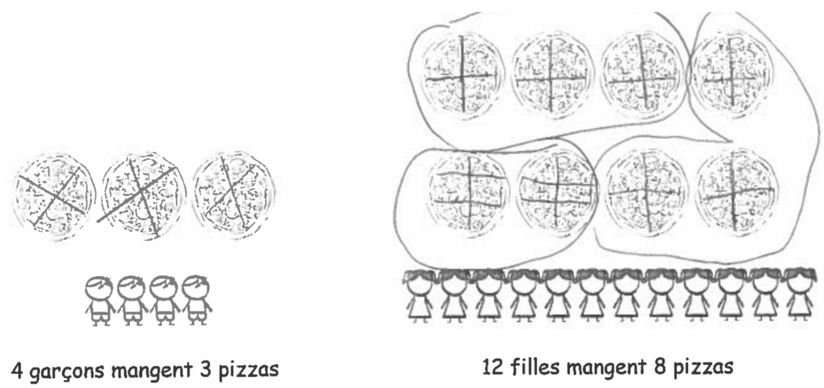


Figure 73 : Réponse de l'élève S7 à l'item 5

L'élève S7 partage les pizzas des garçons en quatre. Il n'est pas impossible qu'il ait fait un raisonnement multiplicatif planifié pour déterminer le partage afin de pouvoir distribuer les parts de façon équitable (comme nous le suggérons dans la stratégie 2). Toutefois, nous jugeons plus plausible qu'il ait choisi ce partage parce qu'il correspond à une procédure simple puisqu'il reproduit cette procédure avec une partie des pizzas des filles. L'élève conclut que les garçons ont trois morceaux chacun. Au moment de distribuer les parts des filles, l'élève fait deux groupes de trois pizzas qu'il partage en quatre parts chacune. Il distribue ces dernières. Les filles ont maintenant deux morceaux dont chacun couvre une surface équivalente à celle d'un morceau dans la part des garçons. L'élève sélectionne ensuite les deux pizzas restantes des filles et les partage en six parts chacune afin de les répartir à toutes les filles. L'élève conclut que les garçons comme les filles ont trois morceaux, mais que les filles ont un morceau qui est plus petit. L'élève arrive ainsi à répondre adéquatement à la question de la tâche en utilisant une technique de partage rudimentaire sans associer les parts représentées à des fractions.

Parmi les élèves qui ont présenté une réponse correcte, quatre ont mobilisé une stratégie qui s'apparentait à la stratégie 2 (S1-2-10-17) :

Réponse de l'élève S1 :

« Les garçons car ils ont 3/4 d'une pizza chacun alors que les filles ont 2/3 ».

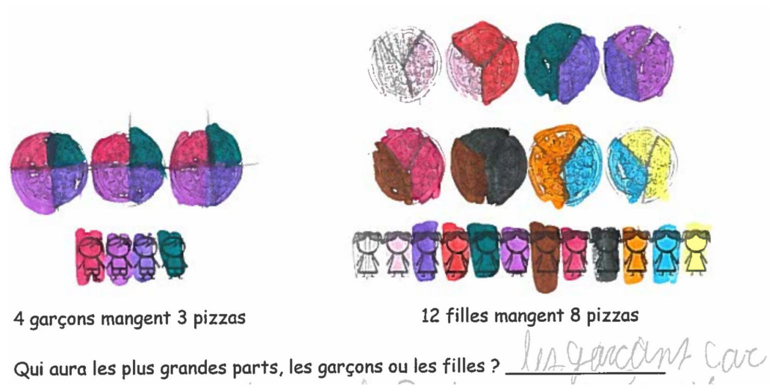


Figure 74 : Réponse de l'élève S1 à l'item 5

Réponse de l'élève : S17 :

« Les garçons on 1/2 pizza + 1/4 de pizza et les fille ont 1/2 pizza + 1/6 de pizza. »

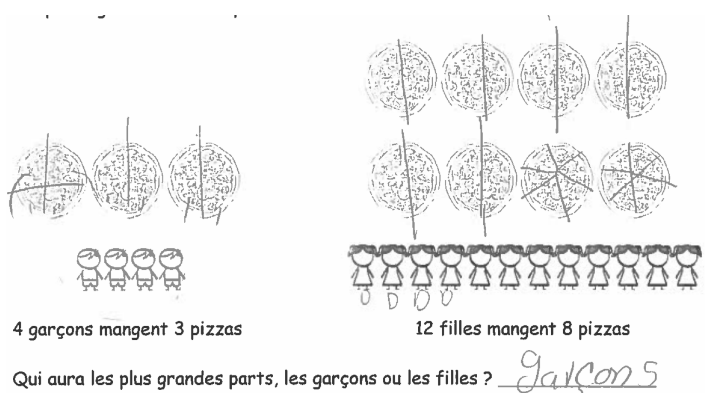


Figure 75 : Réponse de l'élève S17 à l'item 5

L'élève S1 partage les pizzas des garçons en quatre et les pizzas des filles en trois et procède à la distribution des parts à l'aide d'un code de couleur. Nous soupçonnons que cette stratégie puisse s'apparenter fortement à l'exemple que nous avons décrit dans la stratégie 2. Dans ce cas, l'élève aurait cherché un multiple du nombre de pizzas correspondant à un multiple du nombre d'élèves. Il pouvait ainsi partager les trois pizzas des garçons en quatre parts chacune sachant qu'il obtiendrait un total de douze parts à distribuer. De même, il pouvait partager les huit pizzas des filles en trois parts chacune sachant qu'il aurait au total 24 parts à distribuer. Comme 12 est un multiple de 4 et 24 est un multiple de 12, l'élève pouvait distribuer toutes les parts de façon égale. Ce dernier identifie les fractions représentées et constate que la fraction 3/4 est plus grande que la fraction 2/3. Dans un tel contexte, il est difficile d'identifier avec certitude la technique de comparaison privilégiée par l'élève. Pour nous cependant, la technique la plus probable ici reste la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.

L'élève S17, quant à lui, partage plutôt les premières pizzas de chaque groupe en 2 de manière à distribuer 1/2 pizza à chacun. Il partage ensuite la dernière pizza des garçons en 4 et distribue 1/4 à chacun et il partage les deux dernières pizzas des filles en 6 pour distribuer 1/6 à chacune. Dans ce cas de figure, nous soupçonnons plutôt que l'élève ait préféré mobiliser deux autres techniques de comparaison en utilisant le point de repère 1/2 et en comparant des fractions de même numérateur. Il ne reste cependant pas impossible qu'il se soit également fié à la représentation visuelle pour appuyer son jugement.

Parmi les élèves qui ont choisi de mobiliser une stratégie autre, l'un a présenté une réponse jugée correcte (S11):

Réponse de l'élève S11 :

« Les garçons car les garçons ont 3/4 et donc 4 personnes pour 3 pizza et les filles leur manque une pizza ».

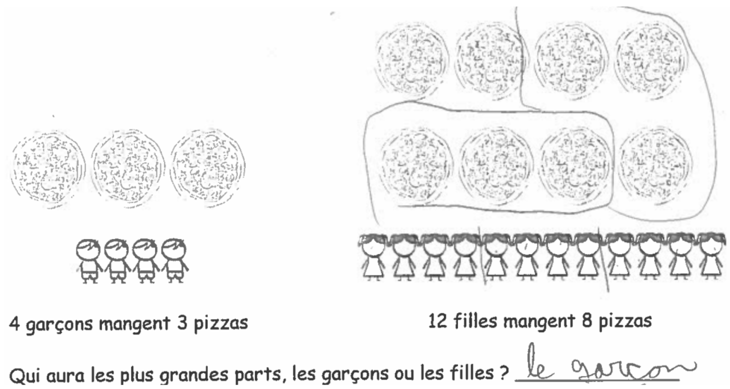


Figure 76 : Réponse de l'élève S11 à l'item 5

L'élève S11 a d'abord procédé à un prélèvement du nombre de pizzas par rapport au nombre de garçons et a établi une correspondance entre le rapport et la fraction. Il a ensuite projeté ce rapport sur les pizzas des filles en le reproduisant à l'aide de la technique routinière r_1^3 (double comptage ; chaque fois qu'il dénombre quatre filles, il sélectionne trois pizzas ou inversement). L'élève constate qu'il n'y a pas suffisamment de pizzas pour le nombre de filles pour pouvoir reproduire les mêmes proportions que chez les garçons en comparant les représentations discrètes qu'il a mises en lumière. Nous avons considéré cette stratégie comme étant conceptuelle.

<u>Réponses erronées :</u>

Indépendamment de la stratégie choisie, plusieurs élèves semblent avoir éprouvé de la difficulté à partager les pizzas pour distribuer les parts de façon égale à tous (S3-4-5-6-14-15-18-19 ; D2-5-11-16)

Réponse de l'élève S6 :

« sa donner ça »

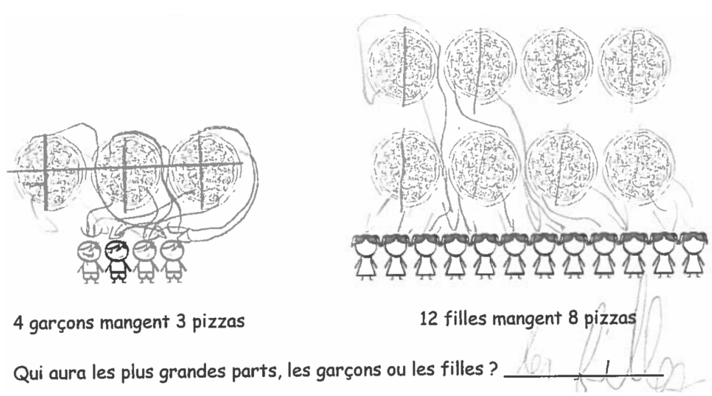


Figure 77 : Réponse de l'élève S6 à l'item 5

Réponse de l'élève S15 :

« Ça serait le gars car si on sépare les morceaux en 12 le morceaux serait tout petit et si on le fait en 4 il serait gros alors sais le gars ».

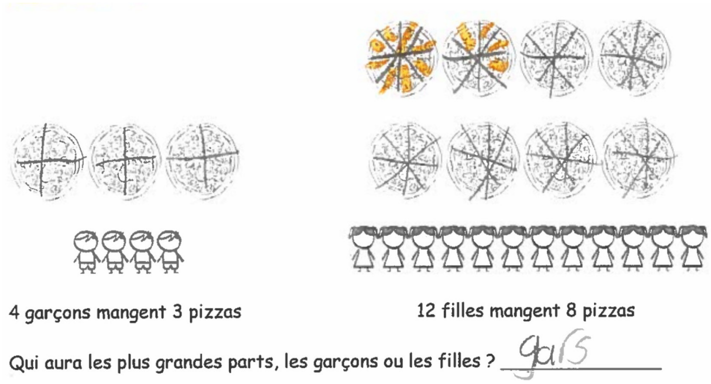


Figure 78 : Réponse de l'élève S15 à l'item 5

L'élève S6 trace un partage rudimentaire des pizzas. Chacune est ainsi partagée en quatre pour les garçons et en deux pour les filles. L'élève tente ensuite de distribuer les parts à chaque membre des deux groupes en traçant des flèches, mais le dessin devient rapidement confus. L'élève semble se tourner à la fin vers une estimation visuelle en affirmant que ce seront les filles qui auront les plus grandes parts. Une telle erreur nous semble directement liée à la difficulté d'appliquer la technique de représentation, tant au niveau du partage que de la distribution. Les indications visuelles de déplacement à l'aide de flèches semblent montrer que cet élève a peut-être plutôt l'habitude de travailler avec du matériel tangible et que le passage à la représentation picturale sur papier crée, pour lui, un obstacle.

L'élève S15, pour sa part, commence par partager les pizzas des garçons en quatre. Il partage ensuite les pizzas des filles en huit. Cependant, avant d'avoir terminé sa distribution des parts, l'élève s'arrête et conclut que les parts des filles sont plus petites sans chercher à déterminer qui aura le plus de pizza. Nous pensons qu'une telle réponse peut, au moins en partie, être due à l'interprétation de la question. L'élève semble effectivement avoir interprété la situation comme s'il devait se contenter de comparer la taille d'un morceau dans la part des garçons avec la taille d'un morceau dans la part des filles. Cela dit, au-delà de l'erreur d'interprétation qui, nous le verrons plus loin, aurait pu mener à une réponse que nous aurions jugée partielle, l'élève n'a pas réussi à représenter la part totale mangée par chaque personne. Il ne semble pas non plus prendre en compte le critère d'égalité des parts puisque les huit pizzas partagées en huit parts égales ne peuvent être distribuées aux 12 filles de façon équitable. L'élève ne prend pas non plus en considération les différents partages possibles susceptibles d'influencer sa réponse d'après son interprétation. Par exemple, si un élève veut comparer un morceau de la part des garçons avec un morceau de la part des filles il obtiendra un résultat fort différent s'il choisit de partager les pizzas des filles en 3 plutôt qu'en 12 pour les comparer aux pizzas des garçons partagées en 4. Globalement, nous soupçonnons qu'une telle réponse puisse au moins partiellement avoir été causée par la difficulté que représentait le partage et la sélection des parts.

D'autres élèves n'ont simplement laissé aucune trace d'une quelconque tentative de partager les parts pour les distribuer (S16 ; D7-9-13)

Réponse de l'élève D13 :

« Garçon parce que vu qu'il y a moins de gars sa n'an fait plus pour le gars que pour les filles ».

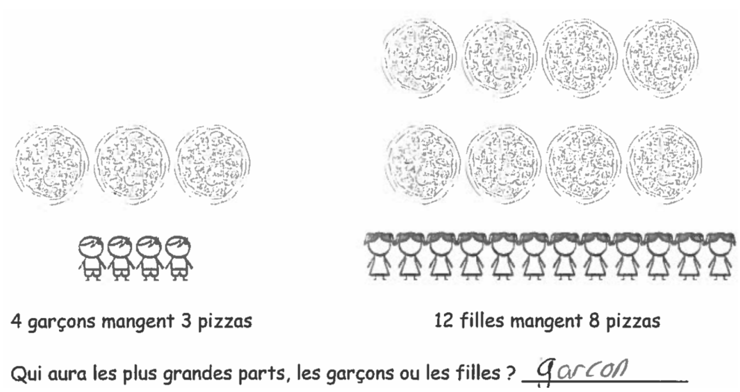


Figure 79 : Réponse de l'élève S15 à l'item 5

Dans ce cas-ci, l'élève D13 ne semble prendre en considération que le nombre de garçons par rapport au nombre de filles alors qu'il estime, peut-être visuellement, la grandeur représentée par les pizzas. Il est également possible que l'élève n'ait pas compris que les pizzas pouvaient être partagées ou que les pizzas au-dessus des garçons correspondaient à leurs pizzas, *idem* pour les filles. Avec si peu de traces écrites, il est en réalité difficile de se prononcer avec certitude à propos de ce que l'élève a pu penser. Nous pensons néanmoins qu'une telle réponse témoigne de conceptions limitées associées aux fractions dans le contexte d'une telle situation de partage et de distribution.

Ensuite, toujours parmi les élèves qui ont mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 2, l'un a éprouvé une difficulté qui semble associée au calcul avec les fractions :

Réponse de l'élève S13 :

« Garçons car les filles manges 3/6 et les garçon 3/4 $\frac{3}{4} > \frac{3}{6}$ *».*

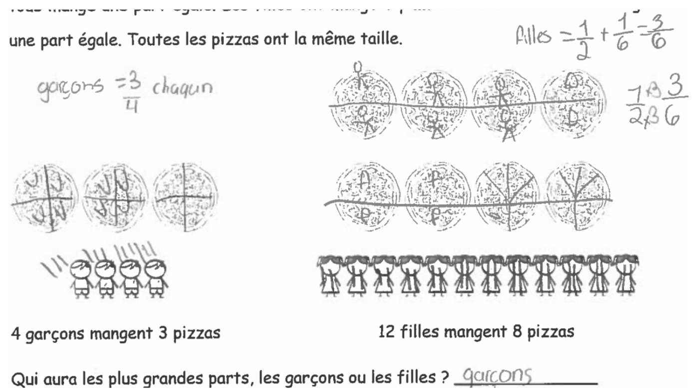


Figure 80 : Réponse de l'élève S13 à l'item 5

L'élève S13 semble être en mesure de partager adéquatement, autant les parts des garçons que celles des filles. Il partage les pizzas des garçons en quatre et leur donne 3/4 chacun. Il partage ensuite les six premières pizzas des filles en deux pour leur donner 1/2 pizza chacune et partage les deux pizzas restantes en six pour leur donner 1/6 chacune. C'est au moment de calculer les parts des filles cependant qu'il commet une erreur alors qu'il choisit d'utiliser une procédure d'addition de fractions pour représenter cette distribution. L'élève trouve la fraction 3/6 en tant que fraction équivalente de 1/2. Il additionne ensuite la fraction 1/2 avec le 1/6 supplémentaire trouvé, mais conclut que le résultat est 3/6 et non 4/6. L'élève compare ensuite les fractions 3/4 et 3/6 avec succès.

Par ailleurs parmi les élèves qui ont mobilisé la stratégie 2, un seul semble avoir mobilisé de façon évidente une technique de comparaison non routinière. Il s'agit de l'élève D14 :

Réponse de l'élève D14 :

« Parce que si pour les fille tout les pizza on 1/12 de par pour tous le monde ca fait $\frac{1}{12} \times 8 = \frac{8}{12}$ *et pour les gars* $\frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{8}{12}$ *donc ces = »*

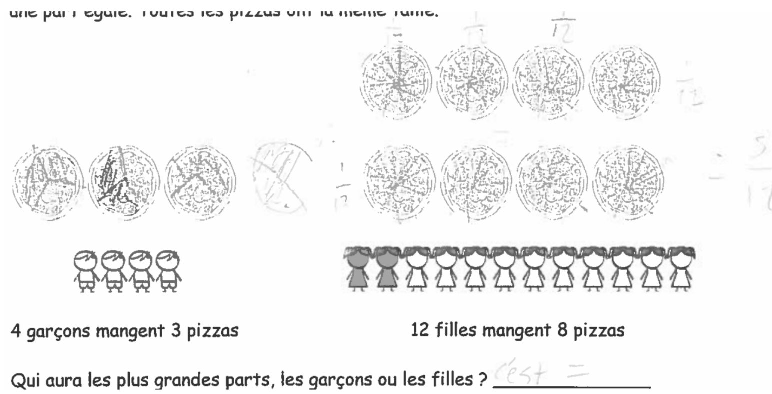


Figure 81 : Réponse de l'élève D14 à l'item 5

L'élève D14 procède au partage et à la distribution des parts de chacun, mais commet une erreur dans la représentation des pizzas des garçons alors qu'il les partage en 3 plutôt qu'en un multiple de quatre. Il distribue ainsi 2/3 à chaque garçon et omet de distribuer le dernier tiers. Pour les filles, il procède à un partage qui lui permet de distribuer adéquatement les parts en partageant chaque pizza en 12 et en distribuant 1/12 de chaque pizza à chaque fille. Chaque fille se retrouve donc avec 8/12 d'une pizza. L'élève compare avec succès les fractions 2/3 et 8/12 en les plaçant sur le même dénominateur (12). Cependant, son erreur dans la représentation du partage des pizzas des garçons l'amène à considérer que les deux groupes auront autant de pizza.

Parmi les élèves qui ont mobilisé une stratégie autre, deux semblent avoir tenté d'interpréter la situation comme un rapport en considérant une relation partie à partie entre les membres de chaque groupe et les pizzas qui leur avaient été attribuées. Les rapports identifiés par ces élèves permettaient toutefois difficilement de procéder à une comparaison claire, ce qui a mené à une erreur au moment de comparer (D6-12).

Réponse de l'élève D6 :

« Filles parce que les garçon on 1 pizza et une moitier et les filles on 2 pizza par group ».

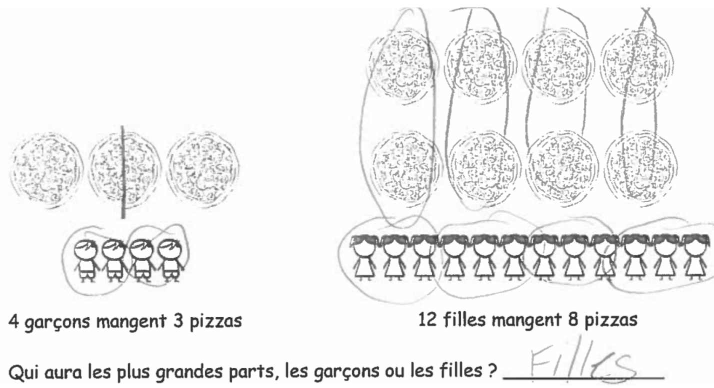


Figure 82 : Réponse de l'élève D6 à l'item 5

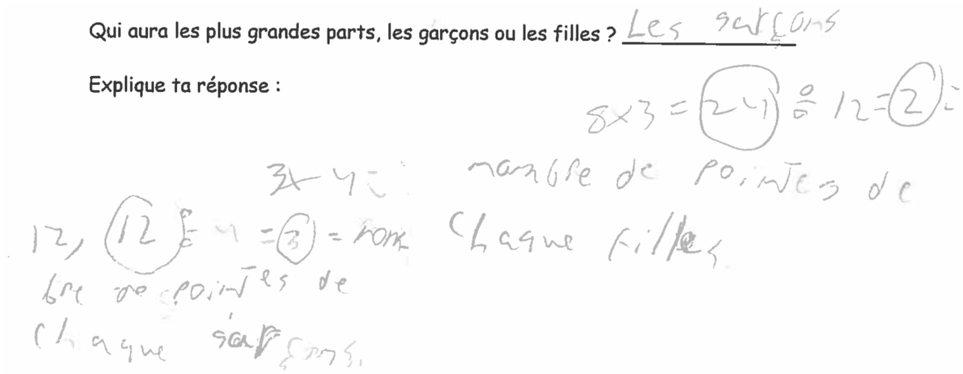
L'élève D6 partage le groupe de garçon en deux pour réduire le rapport. Le rapport est maintenant deux garçons pour une pizza et demie. Il réduit également le rapport des filles de manière qu'il y ait deux pizzas pour trois filles. Ces deux réductions permettent difficilement à elles seules de se prononcer clairement sur la comparaison des deux rapports. Ainsi, au moment de comparer, l'élève ignore le nombre de personnes et ne compare que le nombre de pizzas comme s'il avait réduit les deux rapports pour les faire correspondre. Pour nous, une telle erreur pourrait être due à une difficulté à mobiliser de façon autonome et à mettre en relation une technique de représentation et une technique de comparaison de fraction.

Enfin, un élève utilise une méthode symbolique pour représenter le partage, mais se retrouve à la fin à ne comparer que le nombre de morceaux dans chaque part sans tenir compte de la surface recouverte (D3).

Réponse de l'élève D3 :

« $8 \times 3 = 24 \div 12 = 2 =$ *nombre de pointes de chaque filles ».*

« $3 \times 4 = 12, 12 \div 4 = 3 =$ *nombre de pointes de chaque garçons ».*


Qui aura les plus grandes parts, les garçons ou les filles ? Les garçons

Explique ta réponse :

8×3 = 24 ÷ 12 = 2

3×4 = nombre de pointes de 12, 12 ÷ 4 = 3 = pour chaque filles

bre de pointes de chaque garçons.

Figure 83 : Réponse de l’élève D3 à l’item 5

L’élève D3 effectue toutes les étapes pour représenter la situation à l’aide d’une procédure employant des symboles. Cependant, au moment de faire la comparaison, il compare les deux grandeurs obtenues comme des entiers naturels sans tenir compte qu’il s’agit de parties en relation avec un tout (les nombres trouvés sont finalement les numérateurs des fractions). Le choix de ne pas représenter la situation de façon picturale a peut-être favorisé l’émergence de cette erreur et ce choix pourrait provenir d’une difficulté à appliquer la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d’une fraction a/b donnée à partir d’un tout donné »*. Malgré tout, l’élève semble ici appliquer une technique bien rodée de façon routinière, mais n’arrive pas à l’associer à la notion de fraction dans le contexte de cette situation. Pour nous, une telle erreur semble également due à une difficulté à appliquer les techniques apprises à un niveau conceptuel.

<u>Réponses partielles :</u>

Un élève, parmi ceux qui ont appliqué une stratégie s’apparentant à la stratégie 1, a présenté une réponse que nous avons jugée partielle (S9).

Réponse de l’élève S9 :

« Les gars ont plus de parts que les filles. Les parts sont également coupé, mais les gars en on plus ».

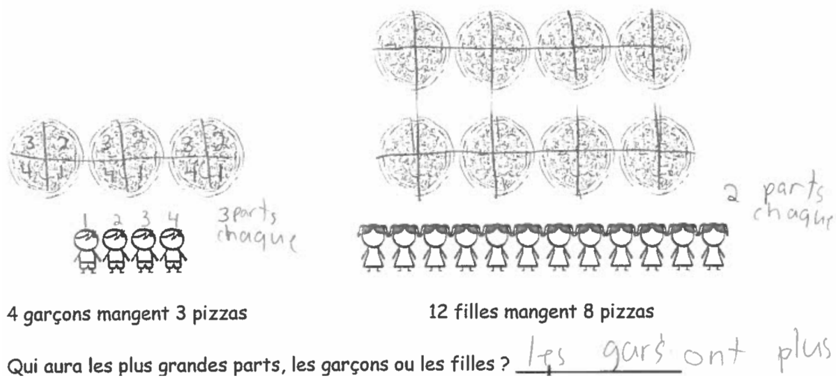


Figure 84 : Réponse de l'élève S9 à l'item 5

L'élève S9 choisit d'appliquer un partage de toutes les pizzas des deux groupes en quatre à l'aide d'un tracé en croix. Il procède ensuite à une distribution des parts en mettant en relation le prélèvement à une méthode de comparaison. Il constate alors que les garçons reçoivent exactement trois parts chacun il distribue ensuite 2 parts à chaque fille puis arrête la distribution. Cette démarche s'apparente fortement à la stratégie procédurale que nous avions identifiée. Cependant, la justification de l'élève laisse planer un doute dans sa compréhension en ce qui concerne les huit parts restantes qui n'ont pas été distribuées. En effet, cette seule justification ne permet pas de déterminer avec certitude si l'élève a réellement compris que les parts restantes ne permettront pas aux filles d'obtenir autant de pizza que les garçons ou s'il a plutôt conclu que ces parts ne pouvaient être distribuées parce que le nombre ne correspondait pas.

Enfin, parmi les élèves qui ont mobilisé la stratégie 2, nous en avons identifié quatre qui ont fourni une réponse partielle semblable. Ces élèves semblent avoir interprété la situation comme s'ils devaient seulement comparer la taille d'un morceau dans la part des garçons avec la taille d'un morceau dans la part des filles (S8 ; D1-4-10) :

Réponse de l'élève S8 :

« J'ai séparé les pizzas des garçons en quatre : Ils vont tous avoir 3 parts. Ensuite, j'ai séparé les pizzas des filles en 3 : Elle vont toute avoire 2 parts, mais <u>plus grosse que celles des garçons. »</u>

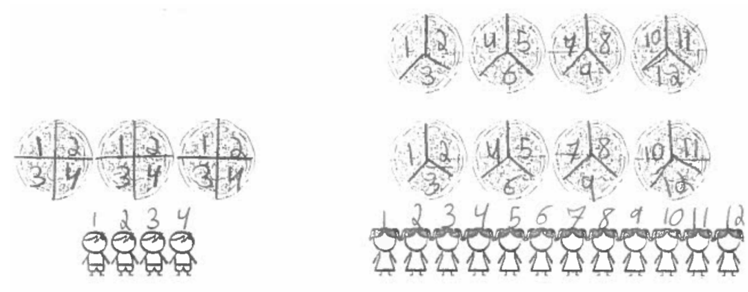


Figure 85 : Réponse de l'élève S8 à l'item 5

À l'instar de l'élève S15 mentionné précédemment, cet élève semble avoir interprété la situation comme s'il devait comparer la taille d'un morceau dans la part des garçons avec la taille d'un morceau dans la part des filles. L'élève répond à la question « qui aura les plus grandes parts » selon l'interprétation qu'il a faite de cette question et explique son raisonnement en opposant le nombre de parts et la taille des parts. Il prend d'ailleurs la peine de souligner le passage *« plus grosse que celles des garçons »*. Notre interprétation est que l'élève comprend que la fraction représentant la portion des garçons est plus grande, mais que dans ce cas-ci il choisit plutôt de comparer la taille d'une seule part mangée par chaque membre des deux groupes. Dans tous les cas, l'élève applique correctement à deux reprises une technique de représentation (la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*). pour les deux grandeurs (3 pour 4 et 8 pour 12) et il mobilise cette technique en la mettant en relation avec une technique de comparaison (la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*). Nous considérons donc une telle stratégie comme étant conceptuelle, mais partielle, puisqu'il est impossible de savoir si l'élève aurait effectivement réussi à comparer les deux fractions.

VI. 7.3 Discussion à propos de l'item 5

Cette tâche visait à déterminer si les élèves étaient effectivement en mesure de mobiliser les techniques supposées apprises en relation avec la notion de fraction dans des stratégies de niveau conceptuel. Ce sont seulement 14% des élèves (5 sur 35) qui ont su mobiliser une stratégie conceptuelle pour résoudre cette tâche alors que 6% (2 élèves) ont fourni une réponse correcte issue d'une stratégie procédurale.

Phénomène intéressant, aucun élève n'a été en mesure de mobiliser avec succès une technique non routinière dans une stratégie de niveau conceptuel pour cette tâche. En effet, chacun des élèves qui a obtenu une réponse correcte a mobilisé et mis en commun des techniques jugées routinières par le rapport institutionnel.

Il est également intéressant de noter qu'aucun élève n'a considéré l'interprétation littérale du sens quotient pour représenter les fractions. Cette interprétation associée à la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »* correspondait pourtant à la stratégie la moins couteuse que nous avions identifiée comme étant à la portée d'élèves de fin de 5^e année. À l'inverse, trois élèves (9%) ont mobilisé une stratégie s'inscrivant dans l'interprétation de la fraction vue comme un rapport. Dans tous les cas, la relation considérée impliquait un rapport entre grandeurs qui n'étaient pas de même nature ce qui s'écarte légèrement du cadre normal du sens de la fraction vue comme un rapport, mais qui fonctionnait dans cette situation. Parmi ces trois élèves, un seul a su présenter une réponse correcte. Les attentes du rapport institutionnel ne prévoyant pas une compréhension autonome de ces différentes interprétations (quotient et rapport) avant la fin de la deuxième année du secondaire peuvent sans doute permettre d'expliquer de tels résultats. Malgré tout, ces mêmes attentes prévoient que les élèves aient été mis en contact avec de telles interprétations à partir de la quatrième année du primaire ce qui soulève la question de l'importance que prennent les différentes interprétations de la fraction à travers les multiples situations auxquelles les élèves ont été confrontés au cours des deux dernières années.

D'autre part, si certaines erreurs, pouvaient partiellement s'expliquer par une difficulté d'interprétation de la situation, les observations que nous avons faites nous amènent à penser que, dans tous les cas, la difficulté à mobiliser et à appliquer les différentes techniques à mettre en œuvre dans les stratégies était un facteur déterminant pour fournir une réponse correcte.

Enfin, si les difficultés à mobiliser et à appliquer les techniques se sont révélées déterminantes dans cette situation, nous pensons que le caractère conceptuel de certaines stratégies mobilisées pourrait être en cause. En effet, une comparaison avec les résultats obtenus dans les items 1a et 2 qui correspondent respectivement à une tâche de représentation et à une tâche de comparaison pouvant toutes deux être résolues par des stratégies procédurales, nous permet d'observer que plusieurs élèves ayant réussi à appliquer des techniques de représentation et de comparaison dans des stratégies de niveau procédural ailleurs dans ce test n'ont, cette fois-ci, pas choisi ou ont échoué à mobiliser et mettre en relation ces mêmes techniques dans cette tâche alors qu'elles auraient permis de fournir une réponse correcte. En effet, parmi les 14 élèves (S2-3-9-11-13-17-18 ; D3-5-9-10-14-15-16) qui avaient, à la fois fourni une réponse correcte dans l'item 1a (technique de représentation) et dans l'item 2 (technique de comparaison), huit (57%) ont présenté une réponse erronée dans l'item 5 (S3-13-18 ; D5-9-14-15-16). C'est donc une proportion non négligeable d'élèves (23% de tout l'échantillon) qui a montré être en mesure d'appliquer, à un niveau procédural, l'essentiel des techniques utiles pour résoudre l'item 5 et qui ici, au prix d'une réponse erronée, n'a pas choisi de mobiliser ces techniques et de les mettre en relation (ou n'a pas réussi à le faire).

VI. 8. Tâche de représentation d'une fraction impropre via un partage de 5 en 3 (5/3)

Question a de l'item 6 :

Voici une barre de chocolat :

a)

3 amis se sont partagé 5 barres pareilles à celle-ci de façon égale. Quelle est la fraction qui représente ce que chaque élève a mangé par rapport à cette barre? Explique ta réponse.

Figure 86 : Item 6a

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de la première tâche contenue dans l'item 6 qui consiste en une tâche de représentation d'une grandeur pouvant être interprétée comme un rapport ou un partage prenant la forme d'une fraction impropre. Pour cette situation, nous avons prévu l'utilisation de deux stratégies procédurales. Nous commençons par les présenter. Nous présentons ensuite les obstacles qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons les traces écrites des élèves.

Tableau 19
Caractéristiques de la première tâche associée à l'item 6

Types de tâches : Comparaison		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Nombres	Rapport entre deux grandeurs. Partage de 5 items en 3 pour former une fraction impropre.	Amener les élèves à mobiliser et mettre en relation de façon autonome au moins une technique de représentation pour une fraction impropre.

Figures	Une figure représentant une grandeur continue. Possibilité de considérer les figures comme des grandeurs discrètes.	Permettre l'utilisation des représentations picturales autant selon le sens de la fraction rapport que selon le sens partage.
Représentation	Symbolique et picturale.	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Quotient, mesure ou opérateur.	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 8.1 Stratégies et obstacles attendus

Stratégie 1 : procédurale

Exemple de traces écrites :

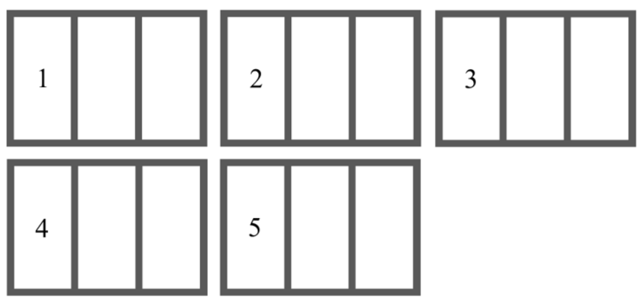


Figure 87 : Premier exemple de traces écrites pour l'item 6a

Dans une telle stratégie, l'élève interprète la situation comme l'action de partager les cinq barres aux trois amis. Pour ce faire, il peut partager toutes les barres en trois parts égales et distribuer une part de chaque barre à chaque ami. Il peut également commencer par distribuer une barre complète à chacun, puis partager les deux barres restantes en trois pour les distribuer.

Une telle stratégie implique l'application directe de la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné ».*

Stratégie 2 : procédurale ou conceptuelle

Stratégie 2.1 Cas d'une stratégie procédurale

Exemple de traces écrites :

« $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ ».

Dans une telle stratégie, l'élève considère la relation entre le nombre de barres de chocolat et le nombre d'amis. Il y a cinq barres de chocolat partagées à trois amis ce qui correspond au quotient ($5 \div 3$). L'élève fait correspondre ce quotient avec la fraction 5/3 sans verbaliser son raisonnement dans une phrase structurée et cohérente.

Une telle stratégie implique une interprétation de la fraction selon son sens quotient.

Stratégie 2.2 Cas d'une stratégie conceptuelle

Exemple de traces écrites :

« Cinq barres partagées à trois amis revient à diviser 5 par 3 (Interprétation de la situation comme le quotient de deux entiers). *La fraction 5/3 revient, elle aussi, à diviser 5 par 3* (lien entre l'écriture fractionnaire et la division) *».*

Dans cette stratégie, l'élève fait également un rapprochement entre la division de 5 par 3 et la fraction 5/3. Il verbalise toutefois son raisonnement dans une phrase écrite.

Une telle stratégie implique une interprétation de la fraction selon son sens quotient. Cette interprétation est mise en œuvre dans une justification écrite structurée et cohérente. L'élève nomme que la relation entre cinq et trois correspond à une division et nomme également qu'une fraction peut être interprétée comme la division du numérateur par le dénominateur.

Difficultés prévues :

1. Difficulté à partager les barres de chocolat de manière que tous les amis reçoivent un nombre égal de parts (exemple : l'élève utilise la technique routinière r_1^2 (halving) associée à la tâche R^2 *« Partage rudimentaire et prélèvement/distribution »*).
2. Difficulté à considérer que le numérateur peut être plus grand que le dénominateur dans la situation (exemple : l'élève répond 5/15 plutôt que 5/3).
3. Difficulté à placer les deux grandeurs dans le bon ordre pour former un quotient en adéquation avec la fraction de ce que chaque ami reçoit (exemple, l'élève considère le quotient $3 \div 5$ puisqu'il y a 3 élèves pour 5 barres de chocolat et affirme que chacun reçoit 3/5 d'une barre).

VI. 8.2 Traces écrites des élèves

Tableau 20
Traces écrites des élèves pour la première tâche de l'item 6

Stratégies	Correctes	Erronées	Partielles	Total
Stratégie 1 (procédurale)	-	27	4	31
Stratégie 2.1 (procédurale)	-	-	-	0
Stratégie 2.2 (conceptuelle)	-	-	-	0
Stratégie autre	2	-	2	4
Total	2	27	6	35

Dans cette situation de représentation d'une fraction impropre, une écrasante majorité d'élèves (94%) a choisi d'utiliser la stratégie 1 en interprétant la situation comme un partage (S2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-17-18-19 ; D1-2-4-5-6-7-8-9-10-11-12-14-15-16). Aucun élève n'a choisi la stratégie 2 et quatre ont choisi une stratégie autre. Parmi eux, deux ont présenté une réponse qui s'est révélée partielle (D3-13). Les deux autres élèves (6%) ont réussi à représenter correctement la fraction à l'aide des grandeurs données dans la situation (S1-16). Tous deux ont mobilisé une stratégie autre que nous avons qualifiée de conceptuelle. Quatre élèves ont fourni une stratégie partielle avec la stratégie 1 (S2-10-13 ; D6).

Réponses correctes :

Les deux élèves qui ont obtenu une réponse correcte ont effectué un partage et une redistribution des parts des cinq barres de chocolat en considérant une seule barre comme tout de référence pour déterminer la valeur du dénominateur, et ont choisi de multiplier la fraction obtenue par 5 pour déterminer la valeur de la fraction (S1-16) :

Réponse de l'élève S1 :

« J'ai séparé la barre en 3 et vu qu'il en a 5 barre j'ai fait × 5 *»*

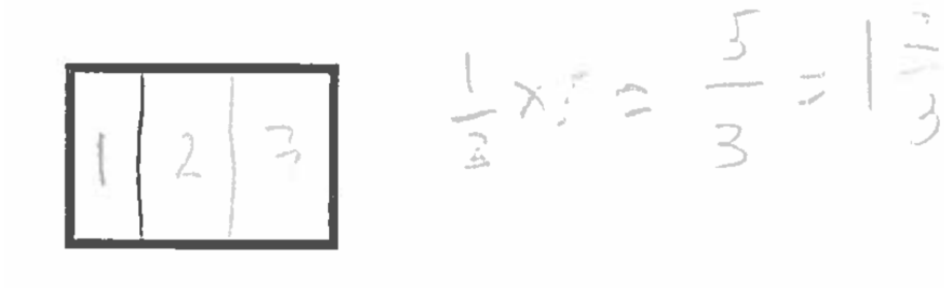


Figure 88 : Réponse de l’élève S1 à l’item 6a

L’élève S1 partage la barre démontrée en 3 et considère que chaque élève obtient, au départ, 1/3 de cette barre. Il considère ensuite le partage des cinq barres en le représentant par la multiplication de 1/3 par l’entier 5. Il obtient la fraction 5/3, qui représente la réponse attendue et choisit ensuite de la décomposer en un nombre fractionnaire. L’élève effectue ainsi le partage, mais représente la distribution de façon symbolique à l’aide d’une multiplication de la fraction par un entier naturel. Cette technique correspond effectivement à un élément appris en 5^{e} année, mais non routinisé au regard des documents institutionnels. Nous ne l’avons pas couvert dans notre analyse, car elle ne s’appliquait qu’indirectement aux types de tâches que nous avions ciblés. Nous avons considéré les stratégies de ces deux élèves comme étant conceptuelles et issues d’une stratégie autre.

<u>Réponses erronées :</u>

Parmi les 27 élèves qui ont présenté une réponse erronée, 14 élèves (52%) ont effectué un partage approprié, mais ont éprouvé du mal à identifier la valeur du tout correspondant au dénominateur (S6-9-11-12 ; D1-2-4-5-7-9-10-12-14-16).

Réponse de l’élève D5 :

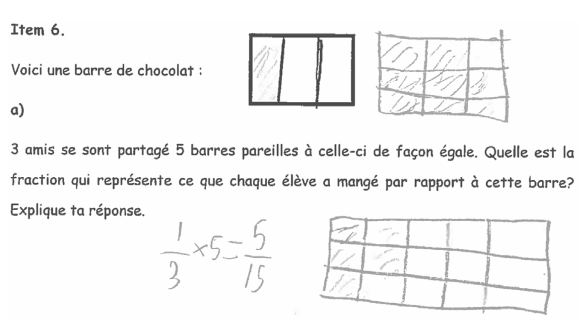


Figure 89 : Réponse de l’élève D5 à l’item 6a

L’élève D5 semble quant à lui, également considérer que chaque élève recevra cinq fois une part équivalente à 1/3 de la première barre. Au moment de déterminer le dénominateur de la fraction cependant, il semble commettre une erreur pouvant être associée à la manière de calculer le total des parts. L'élève semble effectivement multiplier par 5, à la fois, le numérateur et le dénominateur de la fraction. Il obtient donc la fraction 5/15. Une telle erreur pourrait, selon nous, tenir son origine d'une certaine familiarité de l'élève avec les tâches de construction d'ensemble de fractions équivalentes. Lesquelles nécessitent effectivement de multiplier numérateur et dénominateur par un même nombre.

Certains élèves (8 sur 28) ont plutôt commis des erreurs au moment du partage et/ou de la redistribution des parts (S3-4-5-7-14-19 ; D8-15).

Réponse de l'élève S14 :

« Ils on en 12 bouts de barre au chocolat chacun »

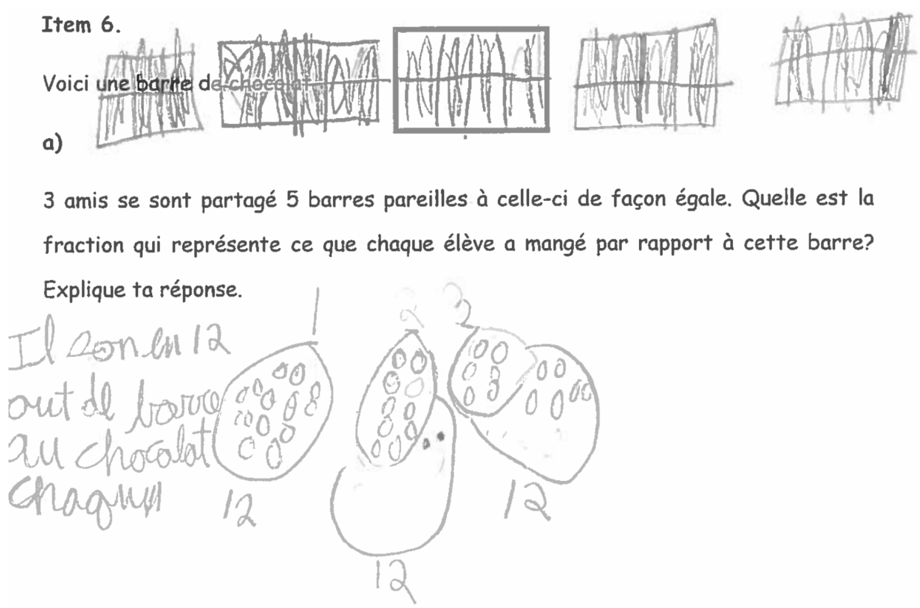


Figure 90 : Réponse de l'élève S14 à l'item 6a

L'élève S14 éprouve de la difficulté à partager toutes les barres de façon équitable alors qu'il partage trois barres en 8 parts et deux autres en 6. Il obtient 36 parts à distribuer aux trois amis et conclut que chacun obtient 12 « bouts ». Il ne tente pas de placer cette valeur sous la forme d'une fraction. Notons que la moitié des élèves qui ont commis ce genre d'erreur (S3-7-19 ; D15) avait réussi à partager puis sélectionner les parts des fractions à représenter dans l'item 1a (qui impliquait le sens partie-tout et des fractions propres). Nous pensons donc que la difficulté à appliquer la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »* pourrait expliquer au moins en partie les erreurs des élèves. Cependant, nous soupçonnons également que les caractéristiques de cet item qui impliquait le sens quotient et une fraction impropre aient pu jouer un rôle dans ce type de difficulté. Cela, du moins, en ce qui concerne les élèves qui avaient réussi à effectuer le partage dans l'item 1a.

D'autres élèves (5 sur 28) ne semblent avoir considéré qu'une seule barre dans la situation (S8-15-17-18 ; D11).

Réponse de l'élève S8 :

« J'ai séparé la barre en 3 donc chaque élève va mangé 1 morceau sur 3 ».

Figure 91 : Réponse de l'élève S8 à l'item 6a

L'élève S8 ne partage que la première barre de chocolat en 3 parts et les distribue. Il conclut que chaque ami reçoit « 1 morceau sur 3 ». Pour nous, cet élève a probablement éprouvé des difficultés à représenter de façon autonome la notation fractionnaire dans la description de la situation. Il n'est cependant pas impossible qu'il ait compris que le partage qu'il venait de représenter pour une barre allait se reproduire dans les cinq autres barres, mais qu'il n'ait pas été en mesure de l'exprimer à cause de sa difficulté à utiliser la notation fractionnaire. Cependant, à l'inverse, nous le verrons, de l'élève S10 pour lequel nous avons considéré que la réponse était partielle, aucune trace écrite ne permet de penser en ce sens.

<u>Réponses partielles</u>

Parmi les élèves qui ont su partager les barres correctement, deux d'entre eux ont laissé des traces qui portent à croire qu'ils ont compris que chaque élève recevrait cinq fois la grandeur 1/3 (S10 ; D6), mais n'ont pas su nommer la fraction 5/3.

Réponse de l'élève S10 :

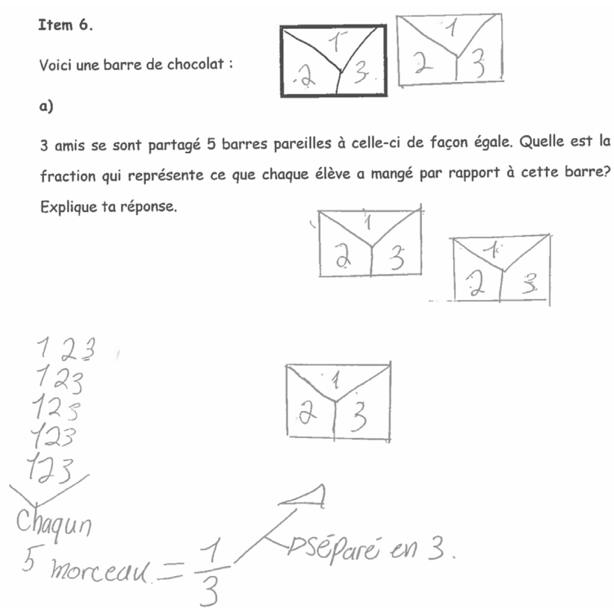


Figure 92 : Réponse de l'élève S10 à l'item 6a

L'élève S10 partage toutes les barres de chocolat et les distribue de façon appropriée. Il semble, par ailleurs indiquer que chaque élève recevra cinq morceaux équivalents à 1/3 (5 morceau = 1/3). Il ne représente cependant pas ces cinq morceaux en une seule fraction. Une telle réponse pourrait avoir été causée par une mauvaise interprétation de la situation. Il est également possible que l'élève n'ait pas envisagé la possibilité d'additionner les parts trouvées. Dans tous les cas cet élève semble éprouver de la difficulté à communiquer à l'écrit son raisonnement.

Deux élèves semblent avoir distribué correctement les parts de chocolats aux trois amis, mais n'ont pas représenté la grandeur sous la forme de la fraction impropre attendue (5/3) (S2-13).

Réponse de l'élève S13 :

« Les trois amis vont manger 1 barre et 2/3 »

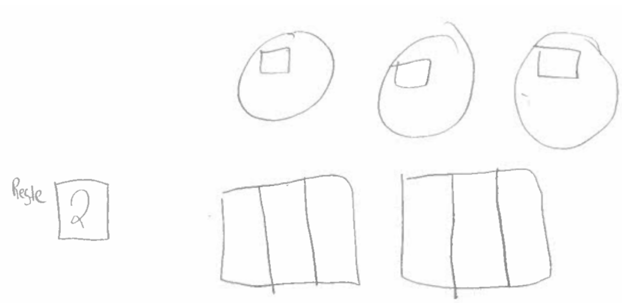


Figure 93 : Réponse de l'élève S13 à l'item 6a

L'élève S13 distribue d'abord une barre de chocolat à chaque ami, puis il partage les deux barres restantes de manière à pouvoir donner 1/3 de chaque barre à chacun. Il donne ainsi la réponse 1 et 2/3, laquelle correspond à un nombre fractionnaire qui s'écarte de l'écriture fractionnaire qui était demandée dans la tâche. Une telle réponse pourrait être due à une confusion entre les notions de fraction et de nombre fractionnaire. Elle pourrait également être due à une difficulté chez ces élèves à passer d'une écriture fractionnaire à un nombre fractionnaire.

Enfin, deux élèves ont employé une stratégie qui s'écartait des stratégies envisagées pour cette situation (D3-13).

Réponse de l'élève D3 :

« Chaque élève a reçu 1,6 barres car $3 \div 5 = 1{,}6$ *»*

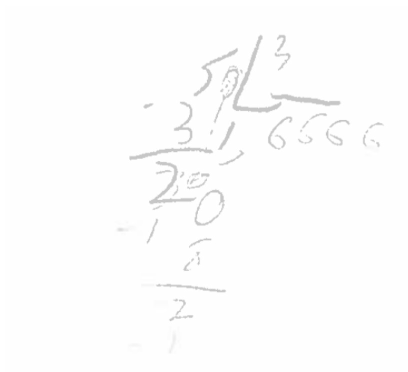


Figure 94 : Réponse de l'élève D3 à l'item 6a

L'élève S3 choisit de considérer la situation de partage comme le quotient (5 ÷ 3 ; l'élève commet une erreur en écrivant sa réponse, mais représente correctement l'opération dans sa démarche). Il obtient la valeur 1,666… et choisis de conserver celle-ci comme réponse finale. Une telle stratégie aurait pu mener à une bonne réponse si l'élève avait compris que la situation de division pouvait directement s'écrire sous la forme fractionnaire sans avoir à effectuer la division. Les deux élèves qui ont employé cette stratégie semblent ainsi avoir compris le sens de la situation et avoir recherché le quotient des deux grandeurs en jeu, mais n'ont pas présenté celui-ci sous la forme fractionnaire attendue.

VI. 8.3 Discussion à propos de l'item 6a

Cette tâche visait à déterminer si les élèves étaient en mesure de représenter une fraction impropre présentée comme un quotient et si, pour le faire, ils choisiraient l'interprétation menant à la stratégie la moins couteuse ou s'ils choisiraient une représentation picturale, plus longue et plus couteuse. Nous avons constaté que très peu d'élèves avaient été en mesure de représenter adéquatement la fraction impropre impliquée dans cette situation (6%). De plus, aucun élève n'a interprété la situation en associant directement la division (5 ÷ 3) à la fraction 5/3 alors que cette interprétation rendait la stratégie beaucoup moins couteuse.

Enfin, selon nous, les réponses des élèves à cet item peuvent être mises en relation avec les réponses données dans l'item 1a. Si 17 élèves (49%) avaient réussi à représenter correctement, à la fois, les deux fractions proposées dans l'item 1 (S2-3-7-9-11-12-13-17-18-19 ; D3-5-9-10-14-15-16), ils ne sont ici que deux (6%) à l'avoir fait dans cet item (S1-16). Pour nous, une telle différence pourrait s'expliquer par les variables didactiques associées à ces deux items puisque dans l'item 1, le sens partie-tout était privilégié pour la représentation de fractions propres alors que dans l'item 6, c'était plutôt le sens quotient qui était privilégié pour la représentation d'une fraction impropre. Notons cependant que, parmi les deux élèves qui ont réussi l'item 6a, l'élève S1 avait réussi à représenter l'une des deux fractions alors que S16 avait échoué pour les deux fractions. De tels résultats s'expliquent, selon nous par le fait que l'item 1 comportait, lui-même, certaines particularités telles que le fait que les fractions à comparer dans l'item 1b n'étaient pas telles que le dénominateur de l'une est multiple du dénominateur de l'autre et le fait que l'une des représentations avait déjà été partagée. Nous avons vu que ces éléments pouvaient voir été source de confusion au moment de représenter les fractions. L'impact de ces caractéristiques semble cependant avoir été moins important que celui qu'ont eu les caractéristiques de l'item 6a.

VI. 9. Tâche de comparaison de deux fractions impropres (5/3 et 9/6)

Question b de l'item 6 :

b) Gaëlle, de son côté, mange $\frac{9}{6}$ d'une barre pareille à celle dessinée à la page précédente. Qui a mangé le plus de chocolat, Gaëlle ou l'un des trois amis?

Explique ta réponse.

Figure 95 Item 6b

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques de la seconde tâche contenue dans l'item 6 qui consiste en une tâche de comparaison d'une fraction impropre avec la fraction impropre trouvée à l'item précédent. Pour cette situation, nous avons prévu l'utilisation de trois stratégies procédurales, dont deux routinières et une non routinière. Nous commençons par les présenter. Nous présentons ensuite les difficultés qui pourraient survenir dans cette tâche. Enfin, nous présentons les traces écrites des élèves.

Tableau 21
Caractéristiques de la seconde tâche associée à l'item 6

Types de tâches : Comparaison		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Nombres	Deux fractions impropres. Le dénominateur de l'une est multiple du dénominateur de l'autre. L'une est égale à 1 et 1/2, l'autre est égale à plus de 1 et 1/2.	Permettre à l'élève de choisir parmi différentes techniques routinières et non routinières de comparaison.
Figures	Une figure représentant quatre grandeurs continue. Possibilité de considérer les figures comme des grandeurs discrètes	Permettre l'utilisation des représentations picturales pour effectuer la comparaison.
Représentation	Symbolique et picturale	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Quotient ou mesure	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 9.1 Stratégies et obstacles attendus

Pour cette tâche, nous avons formulé les stratégies attendues en supposant que l'item 6a avait été réussi. Toutefois, nous gardons à l'esprit que seuls deux élèves ont réussi cette dernière tâche de façon appropriée. L'objectif de la tâche 6b était de déterminer si les élèves étaient en mesure de comparer deux grandeurs correspondant à des nombres rationnels supérieurs à 1. Or, parmi les réponses reçues dans l'item 6a (correctes, erronées ou partielles), huit seulement présentaient une grandeur pouvant correspondre à ce critère (S1-2-10-13-16 ; D3-6-13). Au contraire, la plupart présentaient une fraction propre ou un nombre entier. De plus, ces fractions rendaient souvent la comparaison beaucoup plus simple que les fractions choisies au départ. Ainsi, nous considèrerons une comparaison de deux grandeurs supérieures à 1 correcte, même si la fraction de l'item 6a est erronée à la condition que la fraction identifiée ne rende pas la tâche trop simple.

Cela dit, malgré la difficulté à représenter la fraction impropre à l'item 6a, trois élèves ont su comparer les deux grandeurs en ne réutilisant pas la grandeur qu'ils avaient proposée dans la tâche précédente, mais en utilisant un nouveau raisonnement fondé sur la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.

<u>Stratégie 1 : procédurale routinière</u>

Exemple de traces écrites :

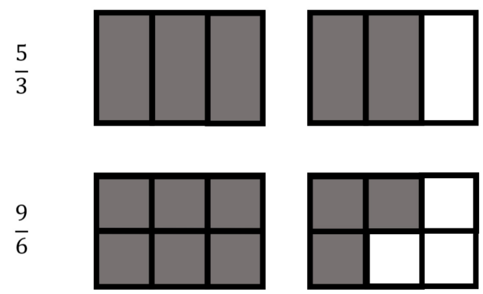


Figure 96 : Second exemple de réponse procédurale routinière pour l'item 6b

Dans une telle stratégie, l'élève choisit de représenter les deux fractions pour les comparer visuellement. Pour chaque fraction, il produit deux rectangles correspondants respectivement à une barre complète et une autre entamée. Pour la fraction 5/3, il partage les barres selon le dénominateur (en 3 parts chacune) et il sélectionne 5 parts en tout. Pour la fraction 9/6, il fait de même et partage les barres en 6 parts chacune pour sélectionner 9 parts en tout. Il compare ensuite les deux images et conclut que la fraction 5/3 couvre une plus grande surface dans le rectangle entamé.

Une telle stratégie implique la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »*.

<u>Stratégie 2 : procédurale ou conceptuelle</u>

<u>Stratégie 2.1 Cas d'une stratégie procédurale</u>

Exemple de traces écrites :

$$\frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{10}{6} > \frac{9}{6}$$

Figure 97 : Exemple de réponse procédurale non routinière pour l'item 6b

Dans une telle stratégie, l'élève constate que le dénominateur de la fraction 9/6 est le double du dénominateur de la fraction 5/3. Il choisit donc de multiplier par deux le numérateur et le dénominateur de cette dernière pour obtenir deux fractions ayant 6 pour dénominateur. Il compare ensuite les numérateurs et constate que 10 est plus grand que 9. La justification de l'élève est fondée uniquement sur ses traces de calcul.

Une telle stratégie implique la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*.

<u>Stratégie 2.2 Cas d'une stratégie conceptuelle</u>

Exemple de traces écrites :

« J'ai multiplié 5 et 3 de la fraction 5/3 par 2 pour avoir la fraction 10/6 (équivalence). *Les deux fractions (10/6 et 9/6) sont sur 6* (comparaison de fractions de même dénominateur). *C'est 10/6 qui est plus grand ».*

Dans cette stratégie, l'élève cherche, encore une fois, à placer les deux fractions sur le même dénominateur pour les comparer. Le dénominateur de la fraction 9/6 est le double de celui de la fraction 5/3. L'élève commence donc par trouver la fraction 10/6. Laquelle est équivalente à 5/3. Il la trouve en multipliant respectivement le numérateur et le dénominateur de la fraction par 2. Il compare ensuite le numérateur des deux fractions et conclut que 10/6 est plus grand que 9/6. L'élève verbalise son raisonnement dans une phrase cohérente et structurée.

Dans une telle stratégie, l'élève verbalise la mobilisation de la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*. Ce faisant, il verbalise de façon cohérente une connaissance concernant l'équivalence des fractions et une connaissance concernant la comparaison de fractions. Cette stratégie est donc, pour nous, conceptuelle.

Stratégie 3 : conceptuelle

Exemple de traces écrites :

$$\frac{9}{6} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

Figure 98 : Premier exemple de réponse procédurale routinière pour l'item 6b

Dans une telle stratégie, l'élève considère, dans chaque fraction, la partie entière et la partie fractionnaire. Il décompose ensuite les fractions en nombres fractionnaires et réduit la fraction 3/6 à 1/2. Il compare alors les fractions 3/6 et 2/3 en utilisant le point de repère 1/2. 3/6 est égal à une demie et 2/3 est supérieur à une demie. Il est également possible de voir l'élève ramener les deux fractions au même dénominateur (6) pour comparer les numérateurs. L'élève constatera alors que la fraction 3/6 est inférieure à la fraction 4/6. Dans les deux cas, l'élève déduit, à partir de la comparaison des deux fractions accompagnant le nombre fractionnaire, que 9/6 est plus petit que 5/3.

Une telle stratégie implique la décomposition des fractions impropres en nombres fractionnaires. Cette décomposition est ensuite mise en relation avec la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction ».* Laquelle mène à la mobilisation autonome de la technique routinière c_1^2 associée à la tâche C^2 *« Comparaison via les points de repère 1/2 et 1 ».* Cela dit, dans le cas d'une stratégie fondée sur la décomposition en nombres fractionnaires, il est également possible de voir l'élève mobiliser la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts ».*

Difficultés prévues :

1. Difficulté à considérer les fractions impropres comme représentant une grandeur supérieure au tout vu comme une barre de chocolat.
2. Difficulté à appliquer la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »* dans le contexte de fractions impropres.

3. Difficulté à reconnaître que la technique non routinière r_1^5 associée à la tâche R^5 *« Réduction de fraction »* peut s'appliquer à des fractions impropres.
4. Difficulté à reconnaître que la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »* peut s'appliquer à des fractions impropres.

VI. 9.2 Traces écrites des élèves

Tableau 22
Traces écrites des élèves pour la seconde tâche de l'item 6

Stratégies/Réponse	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total
Stratégie 1 (procédurale)	3	4	0	-	7
Stratégie 2.1 (procédurale)	-	2	-	-	2
Stratégie 2.2 (conceptuelle)	-	-	-	-	0
Stratégie 3 (conceptuelle)	2	1	-	-	3
Stratégie autre	-	22	-	-	22
Aucune réponse	-	-	-	1	1
Total	5	29	0	1	35

Pour cette situation, cinq élèves au total ont fourni une réponse jugée correcte. Parmi ceux-ci, trois élèves ont utilisé une représentation picturale en comparant les surfaces recouvertes par les parts prises par chacun sans arriver à nommer la fraction impropre de la tâche précédente (S12 ; D12-14). Nous avons associé la stratégie qu'ils ont employée à la stratégie 1. Les deux autres (S2-13) ont employé une stratégie conceptuelle s'apparentant à la stratégie 3. Cela dit, encore une fois, une écrasante majorité des élèves (83%) n'a pas su présenter une réponse correcte pour cet item. Parmi ceux-ci, quatre ont tenté d'appliquer une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 (S6-8-9 ; D8), deux ont tenté d'appliquer une stratégie proche de la stratégie 2 (S1 ; D5), un élève semble avoir tenté d'appliquer une stratégie s'apparentant à la stratégie 3 (S3), et quinze ont tenté d'appliquer une stratégie autre (S4-5-7-11-14-15-16-17-18-19 ; D1-2-3-4-6-7-9-10-11-13-15-16). Enfin, un élève n'a fourni aucune réponse.

Réponses correctes :

Parmi les élèves qui ont fourni une réponse correcte, trois ont appliqué une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 (S12 ; D12-14).

Réponse de l'élève S12 :

« C'est un des trois amis parce que j'ai séparer les barres en 6 et j'en ai colorier 9. Deux de c'est part équivaut à une part des amis ».

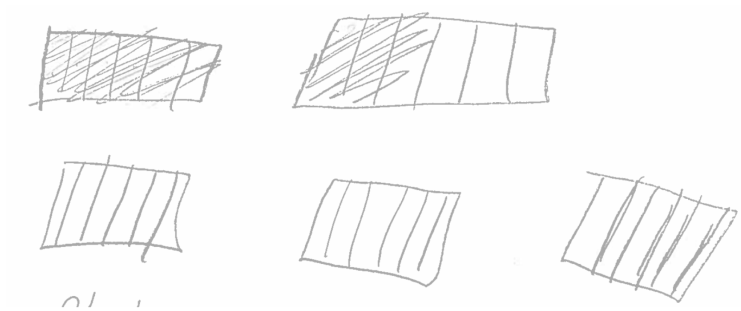


Figure 99 : Réponse de l'élève S12 à l'item 6b

L'élève S12 choisit de représenter les cinq barres de chocolat et d'y représenter la part de Gaëlle. À la question précédente, il avait bien ciblé que les amis mangeaient chacun cinq parts correspondant respectivement à 1/3, mais il n'avait pas su placer cette grandeur en fraction. Pour l'élève, chaque part des trois amis vaut deux parts de Gaëlle. Si on les superposait, les parts de Gaëlle couvriraient l'équivalent d'une part de 1/6 en moins.

Deux autres élèves ont plutôt mobilisé une stratégie conceptuelle s'apparentant à la stratégie 3 en transformant d'abord les fractions en nombres fractionnaires puis en plaçant les fractions accompagnant l'entier sur un même dénominateur. Il s'agit de deux élèves qui avaient effectivement réussi à identifier la fraction impropre à l'item 6a (S2-13).

Réponse de l'élève S2 :

« un des trois $1\frac{3}{6} < 1\frac{4}{6}$ *».*

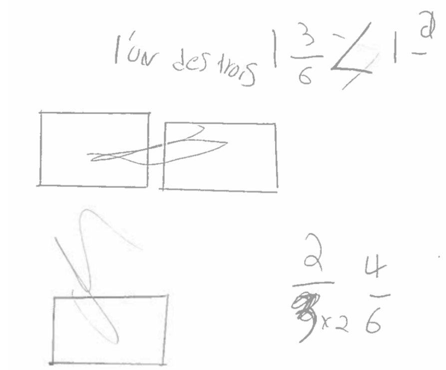


Figure 100 : Réponse de l'élève S2 à l'item 6b

L'élève S2 associe chaque fraction impropre à un nombre fractionnaire. Chaque nombre fractionnaire est composé d'un entier et d'une fraction propre. Il choisit de comparer les fractions propres qui accompagnent chaque entier (puisque dans les deux nombres fractionnaires, l'entier est 1). Il trouve donc une fraction équivalente à la fraction 2/3 en cherchant à la placer sur le même dénominateur que la fraction 9/6. Il obtient la fraction 4/6. Il compare ensuite le nombre fractionnaire 1 et 3/6 avec le nombre 1 et 4/6. Il conclut que le second est plus grand.

Réponses erronées :

Dans cette tâche, nous avons identifié un nombre assez grand d'élèves qui ont eu du mal à identifier correctement le tout de référence pour comparer les deux grandeurs (S5-6-7-8-9-11-17-18 ; D5-9-16).

Réponse de l'élève S11 :

« Gaëlle, car les autres ont 5/5 et Gaëlle a plus de morceaux ».

L'élève S11 considère la fraction 5/5 pour les trois amis et la compare à la fraction de Gaëlle. Cependant, dans son raisonnent, il ne semble tenir compte que du nombre de morceaux sans tenir compte de la surface occupée par ces morceaux. Dans l'item 6a, cet élève avait réussi à représenter les cinq barres et avait sélectionné un tiers de chaque barre pour la distribuer à un ami. Cependant, au moment de donner sa réponse sous la forme d'une fraction, l'élève avait choisi de placer sa fraction sur 5. Il est possible que cet élève ait éprouvé de la difficulté à comprendre que les parts qu'il avait représentées correspondaient respectivement à la fraction 1/3. Dans tous les cas, sa réponse précédente l'amenait à comparer une fraction impropre à une fraction égale à un. Cette tâche devenait donc extrêmement simple par rapport à ce qui était attendu.

D'autres, parmi eux, se retrouvaient à comparer une fraction inférieure à 1 et une autre supérieure à 1, ce qui rendait la tâche significativement plus facile (S6-7-8-9 ; D5-9-16).

Réponse de l'élève S9 :

Figure 101 : Réponse de l’élève S9 à l’item 6b

L’élève S9 choisi de représenter la fraction 5/15 dans une seule barre pour la comparer à la fraction 9/6. La comparaison, quoique correcte, était beaucoup plus facile à effectuer que celle qui était attendue.

Réponse de l’élève D5 :

« $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{15}$ et $\frac{9}{6} \times 5 = \frac{45}{30}$: Gaëlle mange plus de chocolat ».

L’élève D5 quant à lui, semble essayer de trouver une fraction équivalente à la fraction 9/6. Il obtient la fraction 45/30 dont le dénominateur équivaut au double de celui de la fraction 5/15. Nous soupçonnons que l’élève ait immédiatement repéré que 45 équivalait à plus du double de 5. Puisqu’il conclut que c’est Gaëlle qui a mangé le plus de chocolat. Une autre interprétation de la réponse de l’élève pourrait être qu’il a interprété la situation comme s’il devait considérer que la part de Gaëlle en relation aux cinq barres de l’item précédent. Il aurait donc multiplié la fraction 9/6 par 5, mais il aurait commis une erreur en confondant la technique de multiplication d’une fraction par un nombre entier et la technique de construction d’un ensemble de fractions équivalentes. Il s’agit, effectivement d’une erreur que l’élève avait commise dans l’item 6a.

Plusieurs autres élèves, au contraire, ont effectivement bien identifié les tous de référence, mais ont éprouvé des difficultés à comparer les deux grandeurs (S1-3-4-14-16 ; D1-2-3-4-6-7-8-10-11-13-15). Parmi ceux-ci, nous relevons une erreur d’interprétation (D1).

Réponse de l’élève D1

« Parce que il en a mangé 9/6 alors il reste 21 petits carrés = Gaëlle ».

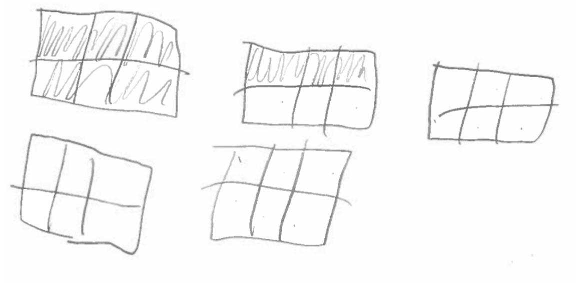


Figure 102 : Réponse de l'élève D1 à l'item 6b

L'élève D1 représente cinq barres de chocolat partagées en 6 parts chacune et dans lesquelles il sélectionne 9 parts en tout. Il conclut qu'il reste 21 parts. L'élève semble avoir compris que la fraction 9/6 appartenait aux trois amis et que le reste des parts appartiendrait à Gaëlle. Son erreur semble donc provenir de l'interprétation qu'il a faite de la situation. Une telle interprétation pourrait provenir, selon nous, d'une certaine familiarité de la part de l'élève devant les tâches dans lesquelles il faut nommer la personne qui reçoit la plus grande part lorsqu'une seule grandeur doit être partagée à plusieurs. Dans cette tâche, c'étaient deux grandeurs distinctes qui devaient être comparées.

D'autres élèves encore, semblent avoir éprouvé des difficultés dans l'application des techniques à utiliser (S1-3-4-14-16 ; D2-3-4-6-7-8-10-11-13-15).

Réponse de l'élève S1 :

« Les trois amis vont en manger plus, car ils ont $1\frac{2}{3}$ *».*

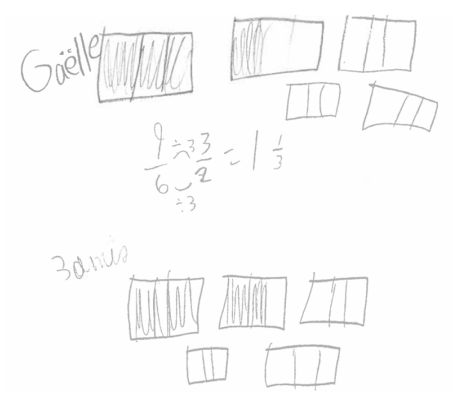


Figure 103 : Réponse de l'élève S1 à l'item 6b

L'élève S1 réduit la fraction 9/6 et trouve la fraction 3/2. Cependant, au moment de transformer cette fraction en nombre fractionnaire, l'élève place la fraction restante sur le dénominateur 3 et non sur le dénominateur 2. Ce faisant, il fausse la comparaison. Dans ce cas particulier, l'erreur l'amène à la conclusion attendue, soit que Gaëlle en a mangé moins, mais avec l'une des grandeurs en jeu erronée. L'élève semble ainsi avoir commis une erreur de calcul ou d'estimation au moment de décomposer la fraction pour l'écrire sous la forme d'un nombre fractionnaire.

Réponse de l'élève S4 :

« Gaël parce que 9/6 est plus petit que 6/9 ».

L'élève S4, pour sa part, ne semble pas avoir repris l'information de la tâche précédente. Il reproduit plutôt la fraction en inversant le numérateur et le dénominateur et présente un résultat erroné pour les fractions qu'il a considérées malgré le fait que la comparaison soit devenue évidente pour ces 2 fractions. Pour nous, ce genre d'erreur peut avoir pour origine une difficulté à interpréter le sens de la situation ainsi que des insuffisances à propos de l'estimation des valeurs des fractions.

Réponse de l'élève D7 :

« Gaëlle en a manger plus que un des trois ami. Un ami = 5 et Gaëlle en a manger 9 morceau. »

Enfin, l'élève D7 effectue une comparaison des numérateurs les deux fractions à comparer sans tenir compte des dénominateurs. Cet élève avait pourtant réussi à placer deux fractions sur le même dénominateur pour comparer les numérateurs dans l'item 2. Dans ce dernier, l'élève devait comparer deux fractions propres directement données alors que dans l'item 6b, l'élève devait comparer cinq parts qu'il avait associées à des tiers dans l'item précédent à neuf parts associées à des sixièmes. En tout, ce sont cinq élèves (S5 ; D4-7-10-15) qui ont commis une telle erreur et qui avaient réussi à mobiliser adéquatement l'une ou l'autre des techniques de comparaison utilisables dans cette tâche pour comparer les fractions dans l'item 2. Pour nous, ce phénomène pourrait s'expliquer par le fait que les deux fractions n'étaient pas directement données dans l'item 6 et qu'elles étaient moins familières pour les élèves que celles présentées dans l'item 2.

Finalement, parmi les élèves qui n'ont pas su comparer correctement les deux grandeurs proposées dans l'item 6, nous avons retenu les erreurs commises par les élèves qui avaient choisi de représenter la grandeur à l'aide d'un nombre à virgule (D3-13).

Réponse de l'élève D3 :

« Gaëlle a mangé moins car chaque élèves ont reçus 1,6 barre et elle 1,3 ».

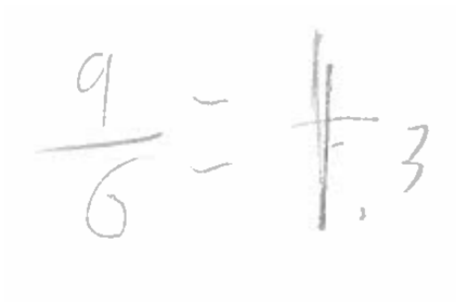


Figure 104 : Réponse de l’élève D3 à l’item 6b

L’élève D3 associe la fraction 9/6 au nombre décimal 1,3. Nous soupçonnons que cet élève ait tenté d’estimer la valeur décimale de la fraction en décomposant celle-ci telle que : $\frac{9}{6} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$. Selon cette logique, la valeur 3/6 qui aurait pu être associée à 0,5 a plutôt été estimée correspondre à 0,3. Nous soupçonnons que les nombres en jeu aient pu avoir un effet sur la difficulté de l’élève à appliquer sa stratégie. Laquelle aurait pu permettre de comparer adéquatement les valeurs.

VI. 9.3 Discussion à propos de l’item 6b

Cette tâche visait à vérifier si les élèves étaient en mesure de comparer deux grandeurs rationnelles supérieures à 1. Or, parmi les élèves qui avaient réussi à représenter une telle grandeur dans l’item 6a (S1-2-10-13-16 ; D3-6-13), seuls deux ont réussi à comparer cette grandeur avec une autre fraction impropre (S2-13) (6% du total). Cela dit, trois autres élèves qui n’avaient pas présenté une grandeur supérieure à 1 dans l’item précédent ont su comparer ce que chacun avait mangé en représentant les grandeurs de façon picturale à l’aide d’une technique routinière (S12 ; D12-14). Ce sont donc, paradoxalement, davantage d’élèves qui ont réussi l’item 6b qu’il n’y en avait qui avaient réussi l’item 6a (14% dans l’item 6b contre 6% dans l’item 6a).

Cela dit, nous avons relevé que 31% de tous les élèves ont appliqué des techniques de comparaison sans comprendre le contexte de la situation et ce qu’ils cherchaient à comparer (S5-6-7-8-9-11-17-18 ; D5-9-16). Une telle application les a menés vers une réponse erronée. Pour nous, de telles traces écrites en aussi grande proportion pourraient indiquer une tendance chez ces élèves à vouloir appliquer les techniques apprises de façon procédurale.

Par ailleurs, nous avons repéré 5 élèves (S5 ; D4-7-10-15) qui avaient réussi à appliquer, dans l’item 2, une technique de comparaison qui aurait pu être appliquée d’une façon tout à fait similaire dans cet item, mais qui ont omis de le faire ou ont échoué à le faire. L’un de ces élèves (S5) avait choisi d’appliquer la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations* *discrètes ou continues »*. Les quatre autres (D4-7-10-15) avaient choisi d'appliquer la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*. Pour nous, un tel écart peut être au moins partiellement attribué aux variables didactiques des deux items puisque, dans l'item 2, deux fractions propres étaient directement données pour la comparaison, alors l'item 6b impliquait, lui, deux fractions impropres dont l'une n'était pas directement donnée. Nous soupçonnons que ces élèves ne se soient pas donné le droit ou n'aient pas su appliquer l'une ou l'autre des techniques de comparaison mobilisées dans l'item 2 (la technique routinière c_1^1 associée à la tâche C^1 *« Comparaison de fractions via des représentations discrètes ou continues »* ; la technique non routinière c_1^4 associé à la Tâche C^4 : *« Comparaison de fractions de dénominateurs distincts »*. Ce comportement pourrait avoir été accentué par le fait que les élèves n'étaient pas familiers avec ce type de tâches.

VI. 9.4 Discussion à propos de l'item 6

Dans l'item 6, nous avons voulu déterminer si les élèves étaient en mesure de représenter adéquatement une fraction impropre pouvant être interprétée comme un quotient. Nous avons ensuite voulu voir si les élèves étaient en mesure de comparer deux grandeurs rationnelles supérieures à 1.

Dans l'item 6a, une écrasante majorité des élèves (94%) a privilégié une stratégie couteuse fondée sur une représentation picturale. Seuls 6% de tous les élèves ont fourni une réponse jugée correcte. Aucun d'entre eux n'a mobilisé la stratégie fondée sur l'interprétation de la fraction comme un quotient. De plus, plusieurs des réponses erronées observées nous ont semblé pouvoir être expliquées au moins en partie par le fait que cette tâche impliquait la représentation d'une fraction impropre interprétée selon le sens quotient. En effet, des tâches de représentation semblables impliquant des fractions propres et le sens partie-tout avaient été réussies auparavant par une proportion non négligeable d'élèves qui ont tous échoué dans cet item (49%).

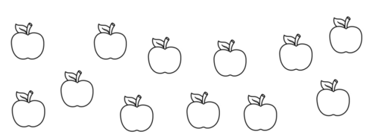
En ce qui concerne la tâche de comparaison, très peu d'élèves avaient réussi à représenter une grandeur rationnelle supérieure à 1. De ces derniers, seuls deux avaient su comparer de façon satisfaisante les deux grandeurs. Paradoxalement, trois élèves n'ayant pas donné une telle grandeur dans l'item 6a ont tout de même su représenter de façon picturale ce que chacun mangeait et comparer ces grandeurs de façon correcte. Ce sont donc 2 élèves (6%) qui ont su représenter correctement la première fraction contre 5 (14%) qui ont su comparer les grandeurs. Nous soupçonnons que ce phénomène puisse venir d'une mauvaise interprétation de l'item 6a ou encore d'une difficulté à représenter les fractions dans leur forme symbolique.

Enfin, parmi les élèves qui n'ont pas su comparer correctement les deux grandeurs, nous avons distingué deux grandes explications pour les erreurs commises. La première concerne les élèves qui ont semblé avoir tendance à appliquer les techniques de comparaison apprises de façon procédurale sans chercher à les adapter au contexte ou aux besoins de la situation (31% des élèves au total). La seconde concerne les élèves qui ont démontré être en mesure d'appliquer certaines techniques dans d'autres tâches de comparaison, mais qui s'en sont révélés incapables dans une situation impliquant le sens quotient et des fractions impropres ou moins familières (14% des élèves au total). Cet item ne nous permettait cependant pas d'isoler ces deux variables.

VI. 10. Tâches de représentation du tout à partir d'une fraction propre (3/4) et d'une fraction impropre (6/5)

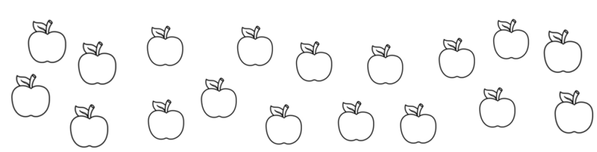
Question a et b de l'item 7 :

a) Voici $\frac{3}{4}$ d'un sac de pomme.



Combien de pommes y'a-t-il dans le sac ? Explique ta réponse.

b) Voici $\frac{6}{5}$ d'un sac de pommes.



Combien de pommes y'a-t-il dans le sac ? Explique ta réponse.

Figure 105 : Item 7

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques des deux tâches contenues dans l'item 7. Ces deux tâches ont été construites pour nécessiter la procédure inverse d'une représentation de fraction. Plutôt que la représentation d'une fraction à partir d'une collection donnée formant le tout comme cela a été le cas dans l'item 4a, c'est ici le tout que l'on demande de représenter alors que la collection, elle, représente la valeur de la fraction. Comme nous l'avons vu dans notre analyse des documents institutionnels, un tel type de tâche n'apparait qu'une seule fois dans tous les manuels sélectionnés pour la recherche, et ce, de façon implicite et marginale dans un exemple pour lequel aucune réponse n'est attendue des élèves. Les trois techniques identifiées pour résoudre un tel type de tâche ont donc été considérées d'emblée comme étant non routinières. Nous pensons cependant qu'il est possible que les élèves aient été exposés à ce type de tâche puisque les enseignantes ont affirmé utiliser d'autre matériel que les manuels que nous avons observés. Nous pensons donc que les techniques associées à a ce type de tâche peuvent être mobilisées dans une stratégie, soit procédurale, soit conceptuelle.

Cela dit, la première tâche implique une fraction propre, alors que la seconde implique une fraction impropre. Nous présentons d'abord les différentes stratégies envisagées ainsi que les obstacles qui pourraient survenir dans ces deux tâches. Enfin, nous présentons les traces écrites des élèves pour chacune des deux tâches et ce de façon séparée.

Tableau 23
Caractéristiques des tâches associées à l'item 7

Types de tâches : Comparaison		
Variables	**Choix didactiques**	**Objectifs**
Nombres	Une fraction propre (3/4) et une fraction impropre (6/5).	Vérifier la capacité à adapter la technique en fonction du type de fraction.
	La fraction 3/4 associée à une collection de 12 objets (la collection est un multiple du numérateur et du dénominateur). La fraction 6/5 associée à une collection de 18 objets (la collection est un multiple du numérateur).	Permettre à l'élève de mobiliser une technique non routinière fondée sur les représentations picturales ou plutôt une autre fondée sur les représentations symboliques
Figures	Une figure représentant une collection d'objets correspondant à la valeur de la fraction.	Permettre à l'élève de partager la collection selon le numérateur de la fraction.
Représentation	Symbolique et picturale	Permettre à l'élève de choisir la représentation privilégiée pour mettre en place sa stratégie.
Sens	Partie-tout et mesure	Variation des sens de la fraction dans le test.

VI. 10.1 Stratégies et obstacles attendus

Stratégie 1 : procédurale ou conceptuelle

Stratégie 1.1 Cas d'une stratégie procédurale

Exemple de traces écrites (item 7a):

« J'ai partagé les pommes en trois et j'en ai ajouté quatre pour avoir 16 pommes »

Exemple de traces écrites (item 7b) :

« J'ai partagé les pommes en six et j'en ai enlevé trois pour avoir 15 pommes »

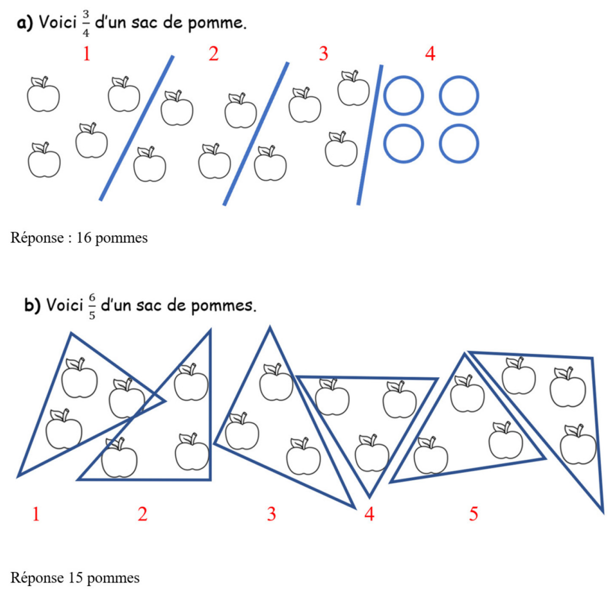


Figure 106 : Exemple de réponse fondée sur la technique T_5^1 pour l'item 7

Dans ces deux situations, la collection représente la valeur de la fraction. L'élève doit donc partager la collection en un nombre de groupements correspondant au numérateur et chercher à produire un nombre de groupements correspondant au dénominateur. Pour la fraction propre (tâche 7a), cela implique de partager la collection en trois groupes et de produire un nombre de groupes équivalent au dénominateur (ajouter un groupe de quatre pommes). Il obtiendra alors quatre groupes de quatre pommes, soit un total de seize pommes. Pour la fraction impropre (tâche 7b), cela implique de partager la collection en six groupes de trois pommes et de considérer un groupe de pommes en moins (afin d'avoir un nombre de groupements correspondant au dénominateur). Il obtiendra ainsi cinq groupes de trois pommes, soit un total de quinze pommes. Dans le cas d'une stratégie procédurale, l'élève décrit ses actions de façon sommaires et les raisons pour lesquelles ces actions sont faites ne sont pas supportées par une verbalisation écrite de connaissances associées aux fractions ou au contexte de la situation.

Une telle stratégie implique l'application de la technique non routinière r_1^4 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^4 *« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée ».*

<u>Stratégie 1.2 Cas d'une stratégie conceptuelle</u>

Exemple de traces écrites (item 7a):

« 12 pommes forment 3/4 du sac. J'ai partagé les pommes en trois pour retrouver 1/4. J'ai obtenu trois groupes de quatre pommes. Pour avoir un sac complet, j'ai besoin de quatre groupes de quatre pommes. J'ai ajouté un groupe de quatre pommes ».

Exemple de traces écrites (item 7b) :

« 18 pommes forment 6/5 du sac. J'ai partagé les pommes en six pour retrouver 1/5. J'ai obtenu six groupes de trois pommes. Pour avoir un sac complet, j'ai besoin de cinq groupes de trois pommes. J'ai retiré un groupe de trois pommes ».

Dans le cas d'une stratégie conceptuelle, l'élève entreprend essentiellement les mêmes étapes que pour la stratégie procédurale, mais appuie son choix dans une verbalisation structurée en nommant des éléments associés à des savoirs sur les fractions et sur le contexte de la situation. Il attribue ainsi à chacun des numérateurs et des dénominateurs le sens approprié dans la situation de la tâche. Il justifie la raison pour laquelle il choisit de partager la collection en un nombre de groupements correspondant au numérateur. Il identifie si la fraction est propre (numérateur inférieur au dénominateur) ou impropre (numérateur supérieur au dénominateur) afin de déterminer l'action à réaliser pour trouver le tout. Enfin, il ajoute ou enlève le nombre de pommes approprié selon le contexte de la situation.

Dans de telles stratégies, l'élève mobilise de façon autonome des connaissances associées à la notion de fraction (pour une fraction *a/b*, le numérateur *a* correspond à la partie considérée et le dénominateur *b* correspond au tout d'une fraction ; une collection représentant une fraction *a/b* peut être partagée en *a groupements* pour obtenir la valeur 1/*b* ; dans une fraction propre, le numérateur est inférieur au dénominateur et il faut ajouter des parts pour obtenir le tout ; dans une fraction impropre, le numérateur est supérieur au dénominateur et il faut retirer des parts pour obtenir le tout). Ces connaissances sont ensuite mises en relation avec la technique non routinière r_1^4 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^4 *« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée »*. Cette mise en relation est faite dans une phrase écrite structurée et cohérente. C'est pourquoi nous considérons que ces stratégies sont conceptuelles.

Stratégies 2 procédurale ou conceptuelle :

2.1 Cas d'une stratégie procédurale

Exemple de traces écrites (item 7a):

« Le sac complet contient 16 pommes »

Exemple de traces écrites (item 7b) :

« Le sac complet contient 15 pommes »

a)

$12 \div 3 = 4$

$4 \times 4 = 16$

Réponse : 16 pommes

b)

$18 \div 6 = 3$

$3 \times 5 = 15$

Réponse : 15 pommes

Figure 107 : Exemple de réponse fondée sur la technique T_7^1 pour l'item 7

La stratégie 2 reprend essentiellement le travail décrit dans la stratégie 1 en utilisant, cette fois, des représentations symboliques. L'élève dénombre ainsi le nombre de pommes et divise ce nombre par le numérateur de la fraction et obtient la valeur $1/b$. Il multiplie ensuite le résultat obtenu par le dénominateur pour retrouver le tout ($\frac{1}{b} \times b = \frac{b}{b} = 1$). Cependant, dans ce cas-ci, la justification n'est fondée que sur les calculs formulés de façon symbolique. Si une verbalisation écrite accompagne ces calculs, elle ne sert qu'à nommer la réponse. La technique n'est donc pas verbalisée dans une phrase écrite soutenant un raisonnement cohérent.

Une telle stratégie implique l'application de la technique non routinière r_2^4 (raisonnement par proportionnalité) associée à la tâche R^4 *« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée »*.

2.2 Cas d'une stratégie conceptuelle

Exemple de traces écrites (item 7a)

« 12 pommes forment 3/4 de ce que contient le sac. Je dois diviser 12 par 3 pour avoir une part de 1/4 ($12 \div 3 = 4$*). Je veux 4 parts. Je dois multiplier 4 par 4* ($4 \times 4 = 16$)*. Le sac contient 16 pommes ».*

Exemple de traces écrites (item 7b)

« 18 pommes forment 6/5 de ce que contient le sac. Je dois diviser 18 par 6 pour avoir une part de 1/5 ($18 \div 6 = 3$*). Je veux 5 parts. Je dois multiplier 3 par 5* ($3 \times 5 = 15$)*. Le sac contient 15 pommes ».*

Dans de telles stratégies, l'élève choisit, encore une fois, de diviser la collection de pommes par le numérateur de la fraction à l'aide d'un calcul illustré par une représentation symbolique afin de retrouver la valeur $1/b$. Il multiplie ensuite cette valeur par b afin d'obtenir une valeur équivalente au tout ($\frac{1}{b} \times b = \frac{b}{b} = 1$).

Ces stratégies impliquent la mobilisation de la technique non routinière r_2^4 (raisonnement par proportionnalité) associée à la tâche R^4 *« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée »*. Cette technique est mise en œuvre dans un raisonnement structuré pour formuler une phrase de justification s'apparentant aux phrases que nous avons formulées précédemment. Encore une fois, pour nous, une telle justification associée à une telle technique en fin de 5e année correspond à une stratégie conceptuelle puisque l'élève doit structurer un raisonnement intelligible à partir de différentes connaissances associées à la notion de fraction et au contexte particulier de la situation.

Stratégie 3 procédurale ou Conceptuelle

Stratégie 3.1 Cas d'une stratégie procédurale

Exemple de traces écrites :

« J'ai multiplié la fraction/J'ai trouvé une fraction équivalente ».

$$\frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{6 \times 3}{5 \times 3} = \frac{18}{15}$$

Figure 108 : Exemple de réponse fondée sur la technique T_{10}^{1} pour l'item 7

Dans une telle stratégie, l'élève place la grandeur correspondant à la fraction identifiée sur un dénominateur inconnu et fait correspondre le numérateur de la première fraction avec cette grandeur positionnée comme numérateur de la nouvelle fraction. L'élève détermine par combien il doit multiplier le numérateur de la fraction pour obtenir la grandeur identifiée. Il multiplie ensuite le dénominateur connu par le même nombre pour identifier le dénominateur inconnu de la nouvelle fraction. Le dénominateur identifié correspond au tout recherché. Dans le cas d'une stratégie procédurale, l'élève décrit ses actions de façon sommaires et les raisons pour lesquelles ces actions sont faites ne sont pas supportées par une verbalisation de connaissances associées aux fractions ou au contexte de la situation.

Une telle stratégie implique l'application de la technique non routinière r_3^4 associée à la tâche R^4 *« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée ».*

3.2 Cas d'une stratégie conceptuelle

Exemple de traces écrites (item 7a) :

« Je cherche le total. Je cherche le dénominateur qui vient avec 12. Pour obtenir 12, je dois multiplier le numérateur de 3/4 par 4 (associer le numérateur à la grandeur). Pour trouver le total, je dois multiplier le dénominateur de 3/4 par le même nombre (fractions équivalentes). Je fais 4 fois 4. Le total est égal à 16 ».

Exemple de traces écrites (item 7b) :

« Je cherche le total. Je cherche le dénominateur qui vient avec 18 (associer le total au dénominateur d'une fraction). *Pour obtenir 18, je dois multiplier le numérateur de 6/5 par 3* (associer le numérateur à la grandeur). *Pour trouver le total, je dois multiplier le dénominateur de 6/5 par le même nombre* (fractions équivalentes). *Je fais 5 fois 3. Le total est égal à 15 ».*

Dans de telles stratégies, l'élève reprend essentiellement les mêmes actions que dans la stratégie procédurale, mais supporte son raisonnement par une verbalisation des connaissances qui permettent la mobilisation de la technique. L'élève explique qu'il associe le total de la collection au dénominateur de la fraction et que la collection présentée correspond plutôt au numérateur. L'élève nomme des éléments associés à la notion d'équivalence et détermine le total en multipliant le dénominateur de la fraction par le même nombre que le numérateur.

Pour ces stratégies, l'élève verbalise différentes connaissances associées à la notion de fraction et au contexte de la tâche dans une réponse écrite structurée et cohérente. Il met ces connaissances en relation pour justifier la mobilisation de la technique non routinière r_3^4 associée à la tâche R^4 *« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée »*. De telles stratégies sont donc, pour nous, conceptuelles.

Difficultés prévues :

1. Difficulté à comprendre ce que représente le nombre d'objets de la collection donnée pour la fraction cherchée.
2. Difficulté à voir que des objets peuvent être ajoutés à la collection pour la fraction ¾ ou retirés pour la fraction 6/5.
3. Difficulté à déterminer le nombre selon lequel il faut partager chacune des collections.
4. Difficulté à comprendre que le nombre de pommes dans la collection donnée représente le numérateur d'une fraction équivalente à la fraction donnée et que son dénominateur est le nombre cherché.

VI. 10.2 Traces écrites des élèves pour l'item 7a

Tableau 24
Traces écrites des élèves pour l'item 7a

Stratégies / Réponses	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total
Stratégie 1.1 (procédurale)	5	1	1	-	7
Stratégie 1.2 (conceptuelle)	6	-	-	-	6
Stratégie 2.1 (procédurale)	3	6	-	-	9
Stratégie 2.2 (conceptuelle)	4	-	-	-	4
Stratégie 3.1 (procédurale)	-	-	-	-	0
Stratégie 3.2 (conceptuelle)	-	-	-	-	0

Stratégie autre	-	8	-	-	8
Aucune stratégie	-	-	-	1	1
Total	18	15	1	1	35

Pour cette tâche, un peu plus de la moitié des élèves (51%) a su représenter le tout à partir d'une fraction propre représentée par une collection. De ces élèves, onze ont mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 (S1-4-5-9-10-11-13-15-17-18 ; D1) et sept ont plutôt mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 2 (S3 ; D3-8-9-11-14-16). Parmi les élèves qui ont mobilisé la stratégie 1, six l'ont mobilisée à un niveau conceptuel (S1-10-13-15-18 ; D1) et cinq à un niveau procédural (S4-5-9-11-17). Parmi les élèves qui ont mobilisé la stratégie 2, ce sont quatre qui l'ont fait à un niveau conceptuel (S3 ; D3-9-14) contre trois à un niveau procédural (D8-11-16). Ce sont donc dix élèves (28%) qui ont su mobiliser adéquatement l'une ou l'autre des stratégies envisagées à un niveau conceptuel. Aucun élève n'a mobilisé la stratégie 3 que ce soit de façon procédurale ou conceptuelle. Cela dit, un élève semble avoir adopté une stratégie s'apparentant à la stratégie 1.1 tout en fournissant une réponse erronée (D12). Six autres semblent avoir mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 2.1 en fournissant également une réponse erronée (S2-12-16 ; D2-4-5). Plusieurs élèves ont tenté d'appliquer une technique de partage ou d'équivalence, mais ont considéré la collection comme le total plutôt que comme la fraction. Nous avons placé ces stratégies dans « autre » (S6-14-19 ; D6-7-10-13-15). Un élève semble avoir mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 que nous avons jugée procédurale et partielle (S7). Un élève enfin, n'a pas répondu à la tâche (S8).

<u>Réponses correctes :</u>

Tous les élèves qui ont fourni une réponse correcte l'ont fait en mobilisant, soit la stratégie 1, soit la stratégie 2 (S1-3-4-5-7-9-10-11-13-15-17-18 ; D1-3-8-9-11-14-16). Dans les deux cas, la stratégie pouvait avoir été mobilisée à un niveau procédural ou à un niveau conceptuel. Nous donnons deux exemples ici avec les élèves S5 et D3

Réponse de l'élève S5 :

« 16 car il manque un packet de 4 pomme ».

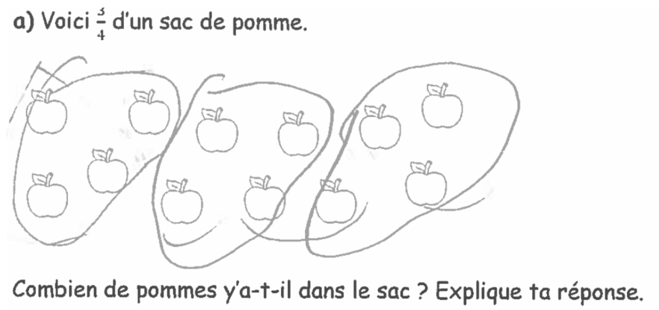


Figure 109 : Réponse de l'élève S5 à l'item 7a

Réponse de l'élève D3 :

« 16 car si 12 pommes = le 3/4, il faut diviser 12 par 3, se qui donne 4, $4 \times 4 = 16$ *».*

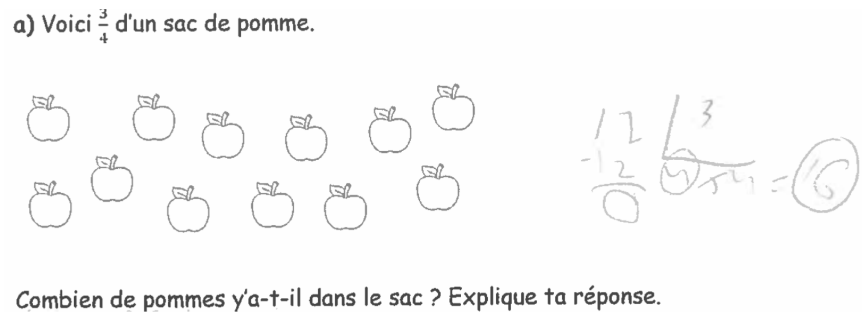


Figure 110 : Réponse de l'élève D3 à l'item 7a

L'élève S5 choisit de partager la collection de pommes en trois groupes de quatre. Il rajoute ensuite un groupe équivalent puisqu'il cherche le total, soit quatre groupes (correspondant au dénominateur de la fraction). La justification qu'il donne est cependant brève et sommaire. Nous avons considéré qu'une telle réponse était procédurale. L'élève D3, quant à lui, choisit plutôt de dénombrer le nombre de pommes dans la collection. Il en dénombre 12 et il choisit ensuite de s'écarter de la représentation picturale pour le reste de sa stratégie. Il divise 12 par 3 et obtient 4, soit l'équivalent de 1/4 de la collection. Il multiplie ensuite ce nombre obtenu par 4 (correspondant, encore une fois, au dénominateur de la fraction). Pour justifier sa réponse, l'élève verbalise sa stratégie en l'insérant dans des segments de phrase combinant symboles mathématiques et langage alphabétique. Dans sa justification, il associe la grandeur au numérateur de la fraction et propose une division. Il multiplie ensuite la réponse obtenue par quatre, nombre correspondant au dénominateur de la fraction. Nous avons considéré qu'une telle réponse était conceptuelle.

Réponses erronées :

Les élèves qui ont présenté une réponse erronée semblent avoir commis des erreurs semblables avec une certaine variété dans les stratégies choisies (S6-14-19 ; D6-7-10-13-15).

Réponse de l'élève S19 :

« 9 pomme parce que tu le sépare par 3 pomme ».

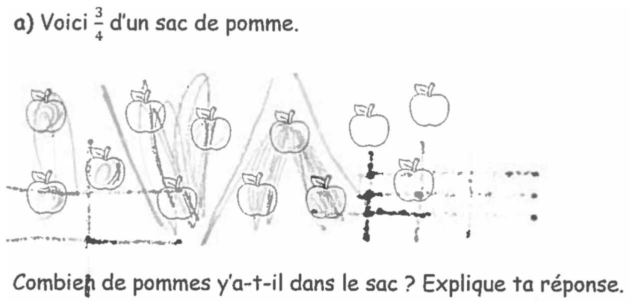


Figure 111 : Réponse de l'élève S19 à l'item 7a

Réponse de l'élève D6 :

« 9 parce que $4 \times 3 = 12$ *et* $3 \times 3 = 9$ *».*

Figure 112 : Réponse de l'élève D6 à l'item 7a

L'élève S19 choisit de partager la collection en quatre groupes de trois pommes et sélectionne trois de ces groupes. Cet élève semble ainsi appliquer, sans tenir compte du contexte, une technique s'apparentant à la technique routinière r_2^3 (partage et prélèvement/distribution) associée à la tâche R^3 *« Représentation d'une fraction a/b donnée à partir d'un tout donné »*. Cependant, une telle technique ne permettait pas de résoudre la tâche. L'élève D6 quant à lui semble plutôt chercher à trouver une fraction équivalente à la fraction 3/4 (9/12) et conclut que la réponse est 9. Dans les deux cas, ces élèves semblent confondre l'objectif de la tâche avec une tâche dans laquelle il aurait fallu représenter les 3/4 d'une collection formée de 12 objets. Pour nous, ce type d'erreur apparu chez un nombre non négligeable d'élèves (20%) pourrait signifier que ces derniers ont été davantage exposés à un type particulier de tâches au point où certains d'entre eux en arrivent maintenant à appliquer directement des techniques inadaptées au contexte particulier de cette tâche. Pris dans ce sens, ces observations viendraient alimenter l'hypothèse d'un apprentissage axé sur l'application procédurale et routinière des techniques de représentation de fractions.

D'autres élèves ont compris qu'il fallait bien rajouter des pommes à la collection, mais ont commis une erreur dans l'application de la technique à employer (S12-16 ; D5-12).

Réponse de l'élève D12 :

« 15 pommes parce que il a 12 pomme plus 3 autre parce que ses le 3/4 ».

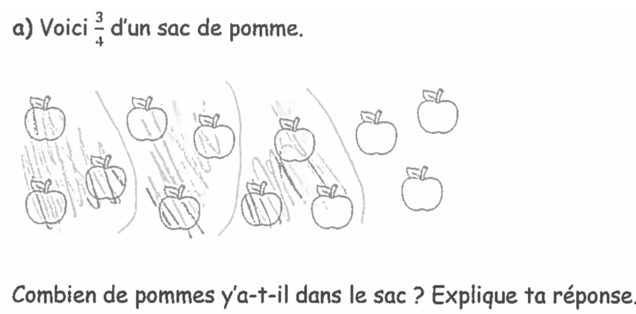


Figure 113 : Réponse de l'élève D12 à l'item 7a

Réponse de l'élève S16 :

« 15 car $3 \times 4 = 12$ *donc* $3 \times 5 = 15$ *».*

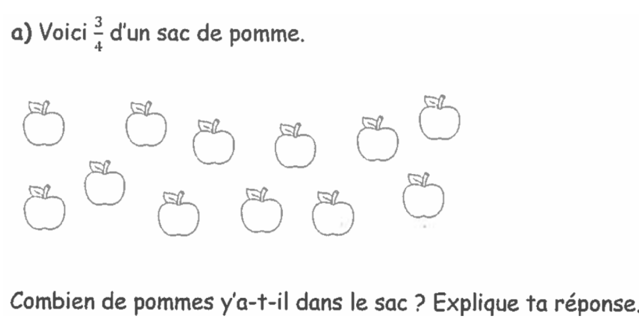


Figure 114 : Réponse de l'élève S16 à l'item 7a

L'élève D12 et l'élève S16 semblent comprendre que la collection présentée n'est pas complète et qu'il faudra ajouter des pommes. Cependant, plutôt que d'assurer le partage en fonction du numérateur, l'élève D12 partage en fonction du dénominateur. Il se retrouve donc avec quatre groupes de trois, plutôt qu'avec trois groupes de quatre. Il ajoute un groupe de trois pour former le tout comme le reste de la procédure le voudrait, mais comme son partage n'a pas été effectué correctement au départ, il arrive à une réponse erronée. L'élève S16 quant à lui choisit de représenter symboliquement la procédure à l'aide de la multiplication ($3 \times 4 = 12$). Il semble cependant, lui aussi confondre le nombre de groupes et le nombre dans chaque groupe puisque c'est le trois qu'il reprend pour le multiplier par 5 (donc une fois de plus que quatre). Il ajoute, lui aussi, un groupe de trois supplémentaire aux groupes qu'il avait symboliquement représenté dans sa multiplication. Dans ces deux cas, les élèves semblent avoir voulu partager la collection selon le dénominateur. Ils ont ensuite bel et bien tenté d'ajouter un groupe de plus, mais ils l'ont également ajouté en fonction du dénominateur. Pour nous, il est possible que la procédure de ces techniques n'ait pas été routinisée par ces élèves. Il est également possible que la familiarité avec un autre type de tâche nécessitant de partager selon le dénominateur ait mené à de telles confusions.

Trois élèves ont bel et bien divisé 12 par 3, mais n'ont pas cherché à multiplier par la suite pour obtenir le total (S2 ; D2-4).

Réponse de l'élève D4 :

« *4 pomme vue que* $12 \div 3 = 4$ ».

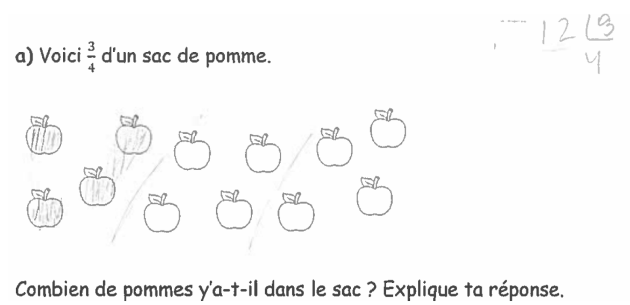


Figure 115 : Réponse de l'élève D4 à l'item 7a

L'élève D4 effectue la division de 12 par trois et représente cette division à la fois de façon symbolique et picturale. Cependant, il ne va pas plus loin dans sa démarche. Ces élèves semblent avoir répondu comme si la question avait été de retrouver la fraction unitaire (1/4) plutôt que le tout qui lui était associé. Nous pensons qu'il est plausible que ces élèves aient su comment appliquer le reste de la technique, mais qu'ils ne se soient pas donné le droit d'ajouter des pommes à la collection. Une telle erreur pourrait donc être due à une règle implicite que les élèves se sont imposée. Règle acquise par l'habitude de travailler avec un certain type de tâches (contrat didactique). Il est ainsi possible que ces élèves n'aient pas bien compris la situation ou la demande de la tâche. Il est également possible, selon nous, que ces élèves n'aient pas su comment appliquer le reste de la technique. Dans ce cas, ils auraient tenté de résoudre la tâche comme s'il s'agissait d'une tâche qui leur était plus familière.

Réponse partielle :

Enfin, pour cette tâche, nous n'avons repéré qu'une seule réponse que nous avons jugée partielle. Il s'agit de la réponse de l'élève S7 qui nous a semblé avoir employé la stratégie 1.1.

Réponse de l'élève S7 :

« Il y aura 16 pommes dans ce sac. »

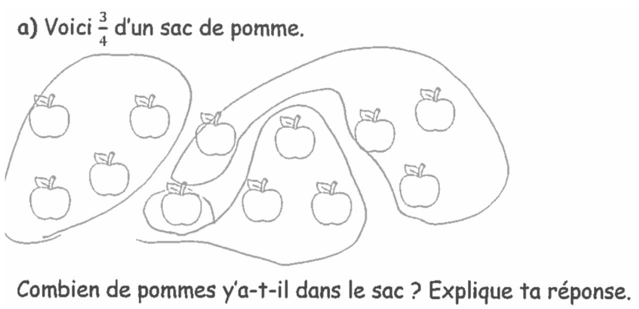


Figure 116 : Réponse de l'élève S7 à l'item 7a

L'élève S7 partage la collection en trois et affirme à l'écrit que le sac contient 16 pommes, ce qui correspond à la grandeur attendue. Cependant, les traces écrites et la justification qui accompagnent la réponse de l'élève nous sont apparues insuffisantes pour considérer la réponse véritablement correcte. C'est pourquoi nous avons considéré la stratégie procédurale et la réponse partielle.

VI. 10.3 Discussion à propos de l'item 7a

Cette tâche visait à déterminer si les élèves étaient en mesure de représenter le tout à partir d'une grandeur donnée représentant une fraction. Elle visait également à vérifier si les élèves mobiliseraient les techniques envisagées à un niveau plutôt procédural ou conceptuel. Parmi les élèves qui ont réussi l'item 7a, dix (28%) ont mobilisé une stratégie conceptuelle contre huit (23%) pour la stratégie procédurale. Au total, nous avons constaté qu'une faible majorité d'élèves (51%) avait été en mesure de représenter adéquatement le tout à partir de la fraction donnée (tâche supposée non routinisée). Nous trouvons, à ce propos, intéressant de mettre cette situation en relation avec celle constatée à l'item 4 où c'est plutôt une écrasante majorité d'élèves (89%) qui avait su représenter une fraction à partir d'un tout donné (tâche supposée routinisée).

Cette observation met en lumière une observation que nous avons faite au cours de l'analyse des erreurs commises par les élèves dans l'item 7a. À plusieurs moments, il nous a semblé que l'erreur de l'élève pouvait, au moins en partie s'expliquer par un manque de familiarité avec la tâche proposée ou encore avec une très grande familiarité avec un autre type de tâche relativement semblable. Une telle hypothèse pourrait être cohérente avec l'hypothèse d'un contrat didactique selon laquelle les élèves s'attendent à devoir répondre à des types de tâches correspondant à ceux auxquels ils ont été exposés. Les élèves auraient ainsi intégré des règles implicites avec lesquelles il faudra éventuellement rompre ou clarifier le domaine de validité. Dans ce cas, la règle à faire accepter par les élèves serait que l'inconnu d'une situation de représentation impliquant une fraction puisse être le tout.

VI. 10.4 Traces écrites des élèves pour l'item 7b

Tableau 25
Traces écrites des élèves pour l'item 7b

Stratégies/réponse	Correctes	Erronées	Partielles	Sans réponse	Total
Stratégie 1.1 (procédurale)	7	1	-	-	8
Stratégie 1.2 (conceptuelle)	2	-	-	-	2
Stratégie 2.1 (procédurale)	5	4	-	-	9
Stratégie 2.2 (conceptuelle)	2	-	-	-	3
Stratégie 3.1 (procédurale)	-	-	-	-	0
Stratégie 3.2 (conceptuelle)	1	-	-	-	0
Stratégie autre	-	10	-	-	2
Aucune stratégie	-	-	-	3	3
Total	17	15	-	3	35

Pour l'item 7b, les résultats nous apparaissent relativement similaires à ceux obtenus à l'item 7a. Si un peu plus de la moitié des élèves avait réussi à présenter une réponse correcte dans la tâche précédente (51%), c'est ici un peu moins de la moitié qui a su faire de même avec une fraction impropre (49%) (S2-3-4-5-9-11-12-13-18 ; D1-3-5-8-9-11-14-16). Neuf de ces élèves ont appliqué la stratégie 1. Parmi eux, deux ont présenté une stratégie conceptuelle (D1-14) contre sept qui ont présenté une stratégie procédurale (S3-4-5-9-11-12-13-18 ;). Sept autres élèves ont employé la stratégie 2. Parmi eux, deux ont proposé une stratégie conceptuelle (S3 ; D3) contre cinq qui ont présenté une stratégie procédurale (S2 ; D5-8-11-16). Un seul élève semble avoir mobilisé une stratégie s'apparentant à la stratégie 3 et nous avons qualifié cette dernière de conceptuelle (D9). Nous constatons que c'est ici seulement 7% des élèves qui ont réussi à appliquer correctement une stratégie conceptuelle pour l'item 7b alors que 34% ont su appliquer une stratégie procédurale. Cela dit, un seul élève semble avoir tenté d'appliquer une stratégie s'apparentant à la stratégie 1 tout en présentant une réponse erronée (S15). Quatre autres semblent avoir tenté d'appliquer une stratégie s'apparentant à la stratégie 2 (D2-4-12-13). Par ailleurs, ce sont dix élèves qui ont employé une stratégie qui ne faisait pas partie des stratégies ciblées et qui les a menés vers une réponse erronée (S1-6-10-14-16-17 ; D6-7-10-15). Trois élèves enfin n'ont laissé aucune trace écrite (S7-8-19).

<u>Réponses correctes :</u>

Tous les élèves qui ont présenté une réponse jugée correcte ont utilisé l'une ou l'autre des stratégies que nous avions envisagées (S2-3-4-5-9-11-12-13-18 ; D1-3-5-8-9-11-14-16). Dans le cas des stratégies 1 et 2, les réponses des élèves étaient, tantôt procédurales, tantôt conceptuelles. Un seul élève a mobilisé la stratégie 3 et il l'a fait à un niveau conceptuel. Nous présentons ici les réponses des élèves S5, D3 et D9 à titre d'exemple.

Réponse de l'élève S5 :

« 15 car il y a un packet de trop ».

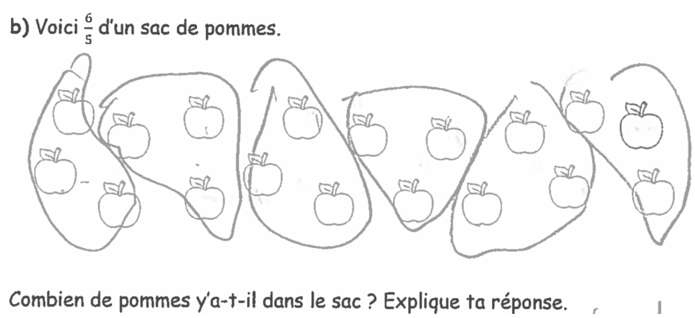


Figure 117 : Réponse de l'élève S5 à l'item 7b

Réponse de l'élève D3 :

« 15, car il y a 18 pommes dans le dessin du haut, mais il représente le 6/5, il y en a donc trop. Il faut diviser 18 par 6 qui donne 3 et faire 3 fois 5 qui donne 15. »

Figure 118 : Réponse de l'élève D3 à l'item 7b

Réponse de l'élève D9 :

« 15 pomme parce que si on fait 3×6 sa égale 18 mes si on fait 3×5 sa donne 15 et il y avait un nombre de trop dans le sac de pomme et ce nombre est 3 ».

L'élève S5 choisit de travailler avec la représentation picturale. Il utilise ainsi la stratégie 1 pour partager la collection selon le numérateur (en six groupes égaux) puis il sélectionne cinq de ces groupes pour former le tout son explication est brève et sommaire et ne fait que décrire une partie de l'action. Nous considérons une telle stratégie comme étant procédurale.

L'élève D3, quant à lui, associe la grandeur proposée à la fraction et verbalise qu'il y a trop de pommes. Il associe la collection au numérateur de la fraction pour effectuer une division et multiplie la valeur obtenue par le dénominateur (5) afin d'obtenir le tout de la collection. Pour nous, une telle stratégie est conceptuelle.

Enfin, l'élève D9 choisit plutôt de trouver un multiplicateur pour le numérateur de la fraction 6/5 qui pourrait donner 18. Il effectue la multiplication (3×6=18) pour montrer qu'il a bien identifié ce dernier et le reprend ensuite pour multiplier le dénominateur de 6/5. Il trouve ainsi le tout. L'élève verbalise son raisonnement fondé sur la connaissance des fractions équivalentes et ajoute à la fin qu'il y a « un nombre de trop dans le sac ». Il identifie cette grandeur au nombre trois. Pour nous, cet élève mobilise également une stratégie conceptuelle.

Réponses erronées :

Parmi les élèves qui ont obtenu une réponse erronée, trois ont conclu que le tout correspondait à 18 (S1-6-17).

Réponse de l'élève S1 :

« Il y a 18 pomme car on peut juste faire des paquet de 6 donc il y en a 18 ».

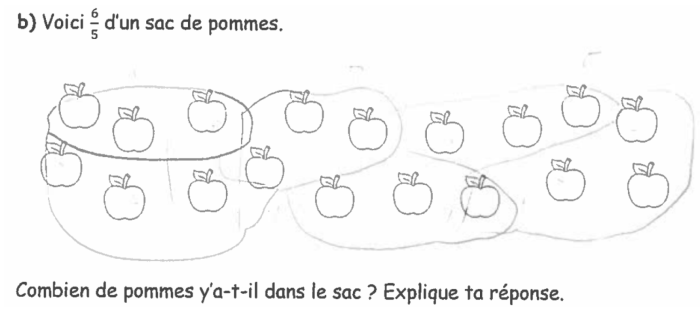


Figure 119 : Réponse de l'élève S5 à l'item 7b

L'élève S1 partage effectivement la collection selon le numérateur, mais ne choisit pas de retirer l'un des groupes pour faire correspondre leur nombre au dénominateur. Nous soupçonnons qu'une telle erreur puisse avoir été causée par une conception erronée qui voudrait que la quantité représentant le tout ne puisse être inférieure à celle représentant la fraction. Or, comme il s'agit d'une fraction impropre, la première est nécessairement inférieure. Ces élèves entretiendraient ainsi la conception que la fraction ne peut représenter plus que l'unité (ou plus que le tout). Autrement dit, une fraction serait propre ou n'en serait pas une. Notons que deux de ces trois élèves avaient fourni une réponse correcte dans la tâche précédente.

D'autres élèves ont commis des erreurs similaires aux erreurs observées dans la tâche de l'item 7a. On retrouve ainsi quatre élèves qui trouvent la fraction 1/6, mais se contentent de cette réponse (D2-4-12-13).

Réponse de l'élève D2 :

« 3 parce que $18 \div 6 = 3$ *».*

Tous comme nous l'avions observé dans l'item 7a, nous retrouvons ici quatre élèves qui divisent le nombre de pommes selon le numérateur, mais se contentent de cette réponse. Pour deux de ces élèves (D2-4), une démarche extrêmement similaire avait été entreprise dans l'item 7a. Dans ce cas particulier, nous soupçonnons que ces élèves n'aient pas su comment appliquer le reste de la technique, mais aient simplement traité la tâche comme une autre plus familière. Pour les deux autres (D12-13) cependant, la stratégie employée à l'item précédent consistait en un partage selon le dénominateur. Or, cette fois, les élèves choisissent de partager selon le numérateur. Nous soupçonnons que ce choix tient du fait qu'il n'est pas possible de partager la collection selon le dénominateur.

Un autre élève semble avoir utilisé une stratégie fortement inspirée de la tâche précédente (S15).

Réponse de l’élève S15 :

« Il y en a 21 car il faut avoir un dénominateur plus grand ou = ».

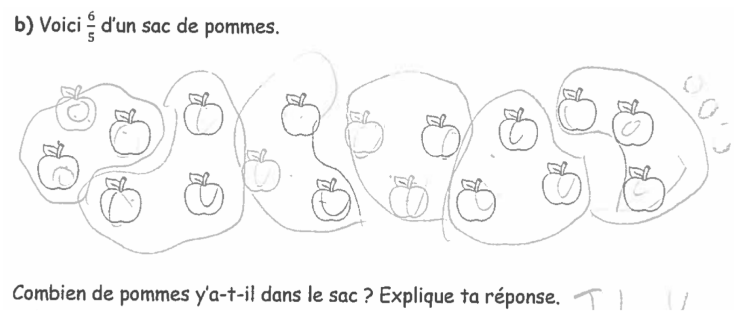


Figure 120 : Réponse de l’élève S15 à l’item 7b

L’élève S15 choisit de partager la collection en 6. Cependant, plutôt que de retirer un groupe de trois pour trouver le tout, il en ajoute un. Cette procédure ressemble beaucoup à la procédure qui devait être suivie dans la tâche précédente. Pour nous, il est possible que l’élève ait appliqué la technique sans tenir compte du contexte différent qu’impliquait la fraction impropre. Cependant, une telle technique dans ce contexte pourrait impliquer, encore une fois, une conception de la fraction telle qu’elle ne peut représenter plus que l’unité (ou plus que le tout). Cette remarque semble être appuyée par le commentaire de l’élève affirmant qu’il « faut avoir un dénominateur plus grand ou = ».

D’autres élèves ont éprouvé de la difficulté à bien partager les figures (S10-14 ; D6-10).

Réponse de l’élève S14 :

« Il en a 18 car il en n’a quatre paquet et un paquet de 2 ».

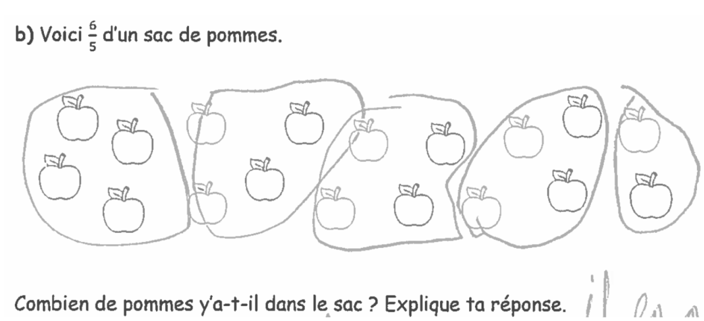


Figure 121 : Réponse de l’élève S14 à l’item 7b

L’élève S14 semble avoir éprouvé de la difficulté à partager la collection en groupes égaux. Il semble avoir tenté de former cinq groupes pour les faire correspondre au dénominateur de la fraction. Cependant, il n'était pas possible de le faire avec le nombre d'éléments dans cette collection. Pour nous, une telle erreur pourrait également s'expliquer par la plus grande familiarité des élèves avec les tâches de représentation de fraction à partir d'un tout (tâches supposées routinisées), à l'inverse de ce type de tâche (supposée non routinisée).

VI. 10.5 Discussion à propos de l'item 7b

L'item 7b visait à déterminer si les élèves étaient en mesure de représenter le tout d'une fraction impropre associée à une collection. Les résultats que nous avons obtenus nous apparaissent relativement similaires à ceux de l'item 7a qui impliquait une fraction propre (49% de réussite à l'item 7b contre 54% à l'item 7a). Ce sont, au total, 17 élèves qui ont réussi à représenter le tout de la fraction correctement en comparaison à 18 élèves dans la tâche précédente (sur ces 17 élèves, 14 avaient réussi l'item 7a ; nous y revenons dans le paragraphe suivant). Parmi les élèves qui n'ont pas su présenter une réponse correcte, nous en avons identifié au moins 9 (26%) qui semblent avoir commis des erreurs à cause de l'application directe d'une technique routinisée qui n'était pas adaptée au contexte d'une tâche de représentation du tout à partir d'une fraction (S10-14 ; D2-4-6-10-12-13-15). De plus, nous avons identifié quatre élèves (11%) dont les erreurs pourraient s'expliquer en partie par des conceptions erronées ou partielles relatives aux fractions impropres (S1-6-15-17).

Phénomène intéressant, trois des élèves qui avaient échoué l'item 7a, ont tout de même réussi l'item 7b (S2-12 ; D5). Pour nous, cela pourrait s'expliquer par deux caractéristiques de ces tâches. Premièrement, dans la tâche 7a, la collection est un multiple, à la fois, du numérateur et du dénominateur, ce qui n'est pas le cas dans la tâche 7b où la collection n'est qu'un multiple du numérateur. Cette caractéristique pourrait avoir donné un indice aux élèves sur la stratégie à employer pour résoudre la seconde tâche de l'item 7. Deuxièmement, la première tâche impliquait d'ajouter des éléments à la collection déjà représentée alors que la seconde impliquait plutôt de travailler avec les éléments existants pour en retirer une petite quantité. Nous soupçonnons que certains élèves pourraient ne pas avoir compris qu'ils pouvaient ajouter des éléments à la collection dans la première tâche alors qu'il pouvait apparaître plus naturel de barrer des éléments d'une collection existante dans la seconde. Une telle erreur pourrait être associée au contrat didactique si les élèves se sont effectivement imposé une règle implicite créée par une routine de classe dans laquelle ce type d'action apparaissait très peu.

Nous notons, par ailleurs, que davantage d'élèves n'ont laissé aucune trace écrite pour cette tâche (trois élèves dans la tâche 7b contre un seul dans la tâche 7a). Parmi ces élèves, l'un avait fourni une réponse partielle dans l'item 7a, l'un avait fourni une réponse erronée et l'autre n'avait fourni aucune réponse. Pour nous, il est possible que les deux premiers élèves, qui semblent avoir éprouvé certaines difficultés à effectuer la tâche ou à communiquer leur réponse, se soient retrouvés devant un obstacle suffisamment important avec cette tâche pour renoncer à tenter d'y répondre. En effet, en plus d'impliquer la représentation d'un tout à partir d'une fraction donnée, l'item 7b impliquait une fraction impropre. Il est cependant également possible, selon nous, que ces trois élèves n'aient tout simplement pas eu le temps de compléter cet item qui se retrouvait à la fin du test.

VI. 10.6 Discussion à propos de l'item 7

Dans les taches de l'item 7, nous voulions vérifier si les élèves étaient en mesure de représenter un tout à partir d'une grandeur donnée représentant une fraction et nous voulions voir si, pour ce faire, ils mobiliseraient les techniques identifiées à cet effet dans des stratégies procédurales ou conceptuelles. Dans les deux tâches, c'est une minorité d'élèves qui a réussi à mobiliser adéquatement l'une ou l'autre des stratégies conceptuelles envisagées (28% dans l'item 7a et 7% dans l'item 7b). Dans les deux tâches, environ la moitié des élèves en tout a réussi à représenter le tout à partir de la grandeur donnée en mobilisant une stratégie, soit procédurale, soi conceptuelle (51% dans l'item 7a et 49% dans l'item 7b). Dans les deux cas, nous avons mis ces résultats en relation avec la tâche de l'item 4, dans laquelle, à l'inverse des tâches de l'item 7, la valeur inconnue à retrouver était la fraction alors que la grandeur donnée représentait le tout. Nos observations ont montré que les élèves ont sensiblement mieux réussi l'item 4 qu'ils n'ont réussi l'une ou l'autre des tâches de l'item 7. Pour nous, ce phénomène pourrait être mis en relation avec l'hypothèse du contrat didactique selon lequel, les élèves, exposés davantage à un type de tâches par rapport à un autre s'attendent à le voir réapparaître et agissent en conséquence au moment de la résolution d'une nouvelle tâche comportant certaines similarités, et ce, même si ladite tâche va au-delà du domaine de validité de la technique ou de la connaissance employée.

Cette dernière observation ainsi que la forte proportion d'élèves qui ont échoué ou réussi en employant une stratégie procédurale (72% dans l'item 7a et 93% dans l'item 7b) nous laissent soupçonner que l'enseignement donné aux élèves dans les deux classes cadrait, au moins dans une certaine mesure, avec la description que nous avons faite d'un enseignement procédural. C'est-à-dire un enseignement axé sur un apprentissage routinier de techniques à appliquer de façon directe dans des contextes ciblés. À l'inverse, un enseignement conceptuel de la notion de fraction aurait été axé sur un apprentissage des techniques dans des tâches et des contextes variés avec une importance accordée à la verbalisation de ces dernières et la mise en relation avec différentes autres techniques et connaissances.

D'autre part, ces deux tâches visaient à déterminer si la variable « fraction impropre » se révélait déterminante dans la réussite ou non. Si nos observations nous amènent à croire que les conceptions liées aux fractions impropres peuvent être source de difficultés chez certains élèves, cette variable ne nous est pas apparue déterminante dans cette tâche pour la majorité des élèves. Cela nous apparait particulièrement vrai lorsque nous nous intéressons à d'autres variables telles que le type de tâches (routinisée ou non), le type de stratégies de résolutions possibles (procédurales ou conceptuelles) ainsi que les différentes interprétations possibles de la fraction (rapport, quotient, partie-tout)

VI. 11. Discussion à propos de l'analyse

Dans cette section, nous avons tenté de répondre à notre deuxième question spécifique qui visait à caractériser les stratégies mobilisées par des élèves de fin de 5e année devant des tâches portant sur la notion de fraction, et ce, d'un point de vue procédural et conceptuel. Ce travail a été rendu possible grâce à un travail conceptuel et analytique préalable afin de définir ces deux points d'axe (procédural et conceptuel). Nous avons ainsi établi que des stratégies procédurales impliquaient l'application directe d'une seule technique sans que cette dernière ne soit mise en relation avec d'autres techniques ou d'autres connaissances associées aux fractions. À l'inverse, une stratégie conceptuelle impliquait plutôt la mobilisation et la mise en relation autonome de plusieurs techniques ou connaissances. Cette mobilisation et cette mise en relation pouvaient se faire, soit par l'élaboration d'une stratégie impliquant plusieurs techniques, soit par une justification écrite démontrant la compréhension par l'élève du fonctionnement de la technique par la mention de connaissances sur les fractions.

VI. 11.1 Discussion à propos de l'analyse des réponses correctes des élèves

À la lumière des résultats observés dans chacun des items du test que nous avons présenté aux élèves, un constat relativement clair semble se dégager en ce qui concerne les types de stratégies mobilisées par les élèves au moment de résoudre les différentes tâches de représentation et de comparaison de fractions qui leur ont été suggérées (voir tableau 26).

Tableau 26
Réponses correctes par item selon le type de stratégie (procédurale ou conceptuelle)

Stratégies	Items[5]													
	1a.	1a.	1b.	2.	3a.	3b.	3c.	3d.	4.	5.	6a.	6b.	7a.	7b.	Moyenne
Procédurales correctes	26 (74%)	21 (60%)	6 (17%)	25 (71%)	2 (6%)	5 (14%)	2 (6%)	0 (0%)	21 (60%)	2 (6%)	0 (0%)	3 (9%)	8 (23%)	12 (34%)	11,5 (33%)
Conceptuelles correctes	3 (9%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (9%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	10 (29%)	5 (14%)	2 (6%)	2 (6%)	10 (29%)	5 (14%)	3,6 (10%)
Total	29 (83%)	21 (60%)	6 (17%)	28 (80%)	2 (6%)	5 (14%)	2 (6%)	0 (0%)	31 (89%)	7 (20%)	2 (6%)	5 (14%)	18 (51%)	17 (49%)	15,1 (43%)

[5] Moyenne pondérée pour que chaque fraction de l'item 3 ne vaille que le quart d'un item (3a = 0,25 ; 3b = 0,25 ; 3c = 0,25 ; 3d = 0,25) pour former, en tout, la valeur d'un seul item dans la moyenne.

Dans la majorité des items (1 (a et b), 2, 3, 4, 6b, 7b), les stratégies procédurales menant à une réponse correcte sont largement privilégiées devant les stratégies conceptuelles menant à une telle réponse. Seuls les items 5, 6a et 7a présentent des résultats où les stratégies conceptuelles menant à une réponse correcte sont plus nombreuses que les stratégies procédurales menant également à une réponse correcte. Pour nous, un tel phénomène peut, jusqu'à un certain point, s'expliquer par la nature des tâches proposées aux élèves et par les techniques particulières qui devaient être mobilisées. Par exemple, une méthode pour résoudre l'item 5 consistait à, d'abord utiliser une technique de représentation pour, ensuite, mettre cette dernière en relation avec une technique de comparaison mobilisée de façon autonome. La tâche 6a quant à elle nécessitait de représenter graphiquement une fraction impropre. Au moment de l'analyse, nous avions relevé que plusieurs difficultés dans cette tâche provenaient de l'interprétation de cette dernière. Les tâches de l'item 7 quant à elles impliquaient le type de tâche R^4 *« Identification d'un tout à partir d'une fraction a/b donnée »*. Il est possible que ce type de tâche ait été moins familier aux élèves et que les élèves les plus habiles à mobiliser la technique aient été les plus enclins à la justifier. Dans ces trois tâches, il était d'ailleurs demandé à l'élève d'expliquer sa réponse ce qui permettait d'obtenir une stratégie conceptuelle en appliquant une technique et en la justifiant par la suite à l'aide de connaissances sur les fractions. Notons également que, dans chacun de ces trois items, le nombre de stratégies procédurales correctes est, somme toute, très bas. Il ne fallait donc, pas beaucoup de stratégies conceptuelles pour surpasser ce nombre.

Nous prenons le temps de préciser, ici, le choix que nous avons fait d'afficher toutes les fractions de l'item 3 individuellement. Si ce choix permet d'afficher effectivement les résultats pour chacune de ces fractions, nous pensons qu'il peut venir déformer la valeur des résultats puisque chaque fraction de l'item 3 vaut autant qu'un item complet. L'impact est d'autant plus important qu'il s'agit de l'item le moins bien réussi du test, et de loin. Nous proposons de pondérer la valeur de chacun des items de l'item 3 pour leur donner la valeur réelle d'un quart d'item, ramenant ainsi la valeur de l'item 3 à la valeur d'un seul item. En ajustant cette pondération, la moyenne de réponses correctes issues de stratégies procédurales augmente de 27% à 33%. La moyenne de réponses correctes issues de stratégies conceptuelles, quant à elle, augmente de 8% à 10%. Cet ajustement ne vient pas fondamentalement changer nos résultats.

Nous notons également que, lorsque l'on considère également les réponses erronées, les stratégies conceptuelles menant à une réponse correcte restent largement minoritaires dans les réponses des élèves alors qu'elles ne dépassent jamais la barre des 29% (dans les items 4 et 7a) et constituent, en moyenne 10% des réponses des élèves (comprenant les réponses correctes et erronées) dans toutes les tâches observées.

Du côté des réponses procédurales correctes, elles plafonnent à 74% dans l'item 1a pour une moyenne de 33% dans tous les items. En moyenne, les réponses procédurales ayant mené à une réponse correcte sont donc 3,3 fois plus nombreuses que les réponses conceptuelles ayant mené à a une telle réponse. En fait, dans plusieurs items (1a, 2, 4), les stratégies procédurales menant à une réponse correcte sont largement majoritaires (74% pour l'item 1a ; 71% pour l'item 2 ; 60% pour l'item 4).

Cela dit, ce sont au total 20 élèves (57%) qui semblent avoir mobilisé au moins une fois dans l'un des items du test une stratégie que nous avons jugée conceptuelle et qui a mené à une réponse correcte (S1-2-3-5-8-9-10-11-13-15-16-17-18 ; D1-3-4-6-9-13-14). De tels résultats indiquent que la majorité des élèves semble être en mesure de mobiliser, par moment, des stratégies de niveau conceptuel au regard des critères que nous avons définis, mais le font, concrètement, très peu. Nous tentons d'expliquer ce phénomène dans notre discussion finale.

Globalement, les stratégies des élèves, tous types confondus, ayant mené à une réponse correcte représentent, en moyenne, 43% des réponses relevées. Ce phénomène s'explique, selon nous, en partie, par certains choix spécifiques lors de la construction des items du test présenté aux élèves. Dans l'objectif de permettre la mobilisation et la mise en relation autonome de certaines techniques enseignées, nous avons construit des items dont les exigences allaient au-delà des exigences décrites dans la progression des apprentissages (MÉLS, 2009). Dans notre discussion finale, nous nous questionnons sur de possibles contradictions entre certaines exigences du programme et de la progression des apprentissages.

Toutefois, le choix des tâches, à lui seul, ne saurait expliquer l'ensemble des difficultés vécues par les élèves lors de la résolution des items dans le test que nous leur avons proposé. Nous discutons de l'analyse de ces difficultés dans la section suivante.

VI. 11.2 Discussion à propos de l’analyse des réponses erronées des élèves

Après l’analyse exhaustive des réponses fournies par chaque élève à chacune des tâches proposées dans le test, nous avons catégorisé les erreurs de ces derniers selon quatre grandes catégories.

La première implique les erreurs associées à une mauvaise interprétation de la tâche. Nous avons classé dans cette catégorie les traces écrites des élèves qui semblaient montrer une technique bien appliquée ou témoignant d’une bonne compréhension de la fraction, mais dérogeant de l’intention de la tâche. Dans ce cas, la technique utilisée pourrait être appropriée et elle est relativement bien appliquée. C’est plutôt au moment de répondre à la question que l’élève commet une erreur. Par exemple, un élève qui aurait interprété l’item 1 comme s’il devait représenter le chocolat restant et non le chocolat sélectionné, ou encore un élève qui aurait interprété l’item 5 comme s’il devait comparer la taille d’un morceau dans la part des garçons avec la taille d’un morceau dans la part des filles plutôt que de comparer la part totale de chacun.

La seconde catégorie d’erreurs implique celles associées à l’application d’une technique ayant un domaine de validité restreint dans le contexte de la tâche. Nous avons classé dans cette catégorie les traces écrites des élèves impliquant une technique routinière enseignée, mais qui ne permettaient pas de résoudre la tâche dans laquelle elle était appliquée. Par exemple, un élève qui aurait tenté d’appliquer la technique r_1^1 associée à la tâche R^1 *« Prélèvement de a objets dans une collection de b objet »* dans la première tâche de l’item 1a en sélectionnant 10 parts sur les douze parts (partagées de façon inégale) sans repartager au préalable pour former des parts égales, ou encore un élève qui aurait tenté d’appliquer une technique associée à la tâche R^3 *« Représentation d’une fraction a/b donnée à partir d’un tout donné »* dans l’une des tâches de l’item 7 qui nécessitait de représenter le tout à partir de la fraction proposée.

La troisième catégorie implique les erreurs apparaissant comme directement liées à des conceptions partielles ou erronées à propos de la notion de fraction. Ces conceptions peuvent impliquer des connaissances comme la nécessité de partager en parts égales ou encore l’idée que le numérateur peut être plus grand que le dénominateur. Elles peuvent également impliquer des conceptions à l’égard des modèles de représentations utilisés. Par exemple, en ce qui concerne la manière de positionner une fraction sur une droite numérique graduée.

Une quatrième catégorie d'erreurs intègre les traces écrites dans lesquelles une stratégie impliquant une ou des techniques appropriées semble avoir été choisie pour résoudre la tâche. Les erreurs apparaissent, dans ce cas, au moment de l'application desdites techniques ou encore dans la coordination de ces dernières entre elles. Une telle erreur pourrait survenir, par exemple, lorsqu'un élève choisit de trouver une fraction équivalente à une autre pour en faciliter la comparaison ou la représentation, mais commet une erreur de calcul au moment de multiplier le numérateur ou le dénominateur de ladite fraction et obtient un résultat erroné.

Enfin, nous avons intégré à nos catégories une catégorie « autre » intégrant toutes les traces écrites proposant une réponse erronée que nous n'avons pas su classer dans l'une ou l'autre des quatre catégories susmentionnées (voir tableau 27). Les traces écrites placées dans cette catégorie ne nous permettaient généralement pas de nous prononcer à savoir si elles appartenaient réellement à l'une ou l'autre des autres catégories. Soit parce qu'elles suggéraient des caractéristiques de plusieurs catégories à la fois, soit parce qu'elles manquaient tout simplement de clarté. Nous présentons chacune d'elles dans le tableau 27 en les décomposant selon qu'elles sont issues de stratégies procédurales ou conceptuelles.

Tableau 27
Réponses erronées par items selon le type d'erreur et le type de stratégie.

Types d'erreurs	Stratégies	Items[6]														Moyenne	Pourcentage
		1a	1a	1b	2	3a	3b	3c	3d	4	5	6a	6b	7a	7b		
Interprétation de la tâche	P.	1	-	-	-	3	3	3	3	1	-	-	1	-	-	0,5	1,4%
	C.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0%
Techniques ayant un domaine de validité restreint.	P.	3	10	6	-	-	-	-	-	1	-	14	-	8	10	4,7	13,5%
	C.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	0,3	0,8%
Conceptions erronées ou partielles	P.	1	-	10	-	25	25	25	25	-	-	-	-	-	5	3,7	10,6%
	C.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0%
Erreurs dans l'application de la technique	P.	-	-	3	5	1	1	3	5	2	7	8	16	4	-	4,3	12,3%
	C.	-	-	1	-	-	-	-	-	-	9	-	1	-	-	1	2,9%
Autres	P.	1	3	5	1	-	-	-	-	-	4	5	11	3	-	3	8,6%
	C.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0%
Total	P.	6	13	24	6	29	29	31	33	4	11	27	28	15	15	17,5	46,4%
	C.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	12	0	1	0	0	1,3	3,7%

[6] Moyenne pondérée pour que chaque fraction de l'item 3 ne vaille que le quart d'un item (3a = 0,25 ; 3b = 0,25 ; 3c = 0,25 ; 3d = 0,25) pour former, en tout, la valeur d'un seul item dans la moyenne.

Encore une fois, dans le tableau 27, nous avons fait le choix d'afficher le résultat à toutes les tâches de l'item 3 en pondérant leur valeur pour que l'item 3 ne vaille au total qu'un seul item afin d'éviter de créer une surreprésentation du type de tâche R^6 *« Partage et positionnement sur une droite numérique »* par rapport aux autres types de tâches dans le test. Ce choix fait passer les erreurs liées aux conceptions erronées d'une moyenne de 23,6% pour les 35 élèves à une moyenne de 10,6%, ce qui nous apparait plus représentatif des résultats observés.

Toujours en suivant cette pondération, le choix de techniques ayant « un domaine de validité restreint » et les erreurs « dans l'application des techniques » représentent également une assez grande part des erreurs des élèves alors que ces deux types d'erreurs représentent respectivement une moyenne de 14,3% et de 15,2% pour les traces écrites des 35 élèves. Les erreurs associées à un type autre représentent, en moyenne, 8,6% des traces écrites alors que les erreurs associées à l'interprétation de la tâche représentent, en moyenne, seulement 1,4% de ces traces.

En s'intéressant au tableau 27, il est possible de constater que l'écrasante majorité des erreurs commises par les élèves a été occasionnée lors de l'application de stratégies procédurales. Pour nous, un tel phénomène ne tire pas son origine d'une cause unique. D'abord, il y a le fait que les stratégies procédurales se sont révélées globalement majoritaires dans les traces écrites des élèves à travers l'ensemble du test. Nous soupçonnons cependant qu'il y ait, à tout le moins, une relation corrélationnelle entre la compréhension des notions associées à la fraction et la capacité des élèves à mobiliser et mettre en relation plusieurs techniques associées à cette notion. Les élèves capables de mobiliser et de mettre en relation différentes techniques et connaissances associées à la notion de fraction seraient, en ce sens, moins susceptibles de commettre des erreurs au moment de résoudre des tâches portant sur cette notion.

Nous notons, à ce sujet, que, dans notre test, aucune stratégie conceptuelle n'a comporté d'erreur portant sur l'interprétation de la tâche ou sur les conceptions à l'égard des fractions. Lorsque des erreurs issues de stratégies conceptuelles apparaissent, elles portent plutôt sur le choix et l'application correcte des techniques dans la situation. Cet élément vient, selon nous, renforcer l'idée selon laquelle, l'apprentissage des techniques associées à la notion de fraction au primaire se ferait davantage dans un contexte de routinisation de ces dernières à un niveau plutôt procédural. Ce tableau, associé aux résultats montrés dans le tableau 26, nous montrent que, si plusieurs élèves semblent en mesure d'appliquer les différentes techniques enseignées à un niveau procédural, la mobilisation autonome et la mise en relation de ces dernières avec différentes connaissances semblent plus problématiques. Les difficultés associées à l'interprétation de la tâche et aux conceptions à l'égard des fractions semblent d'ailleurs exclues des causes potentielles de difficultés lorsque l'on s'intéresse aux stratégies conceptuelles.

VI. 11.3 Conclusion partielle

Notre analyse nous a permis, à partir des définitions que nous nous étions préalablement données à propos des stratégies procédurales et conceptuelles, de caractériser les traces écrites des élèves dans un ensemble d'items portant sur les fractions. Nous avons constaté que les stratégies procédurales, qu'elles aient mené à une réponse correcte ou erronée, étaient significativement plus nombreuses que les stratégies conceptuelles. Ces observations nous amènent à émettre l'hypothèse d'un rapport institutionnel favorisant un apprentissage s'inscrivant davantage dans un paradigme transmissif plutôt que socioconstructiviste. Malgré tout, une majorité d'élèves semble s'être montrée en mesure de mobiliser au moins une stratégie de niveau conceptuel à un moment ou à un autre dans le test. Ces observations nous laissent penser que les élèves pourraient mobiliser davantage ce type de stratégies si le contexte institutionnel les y amenait. Nous discutons plus en détail de ces éléments dans notre discussion finale.

VII. Discussion finale, conclusion et perspectives

Au terme de toute cette démarche, un bilan s'impose. Notre objectif de recherche visait à déterminer les *relations se dégageant entre le rapport institutionnel au savoir et les conceptions des élèves au sujet des fractions en fin de 5^e^ année du primaire*. Pour ce faire, nous avons commencé par effectuer une analyse conceptuelle de la notion de fraction. Par la suite, visant un objectif réaliste pour notre mémoire de maîtrise, nous avons circonscrit nos observations concernant le rapport institutionnel à certains documents prescriptifs tels que le programme de formation de l'école québécoise (MÉQ, 2006) et la progression des apprentissages (MÉLS, 2009). À l'aide de ces documents ainsi que d'une sélection de manuels destinés à l'enseignement des mathématiques au primaire, nous avons établi une liste de types de tâches et de techniques permettant de les résoudre, techniques normalement enseignées à des élèves de fin de 5e année du primaire. Cette étude s'est limitée à identifier les tâches que les élèves devraient étudier en 5e année du primaire et à les caractériser selon qu'elles étaient routinières ou non routinières selon ce que prononce le texte sur les progressions des apprentissages concernant chaque tâche. La progression des apprentissages mentionne effectivement si l'élève en fin de 5e année est considéré être en mesure de réaliser cette tâche de façon autonome ou avec l'aide de l'enseignant. Ces éléments ont été observés en tenant compte des différentes définitions que nous nous sommes données dans notre cadre de référence dans une grille d'analyse émergente. Ce travail effectué à la section V de ce rapport nous a permis de répondre à notre première question spécifique, à savoir :

Quelles sont, selon les documents du PFEQ et les manuels scolaires, les connaissances et les tâches sur les fractions supposées enseignées et apprises jusqu'à la classe de 5e année du primaire?

Cette étape nous a permis de dégager six tâches typiques de représentation et six tâches typiques de comparaison. Pour chacune de ces tâches, nous avons relevé et défini au moins une technique routinière ou non routinière pouvant permettre la résolution de la tâche et supposée enseignée aux élèves. Nous avons lors pu nous mettre à l'œuvre dans la construction d'un outil de cueillette de donnée afin de recueillir les traces écrites d'élèves de fin de 5^e^ année. Ces traces écrites nous ont permis, par la suite, de caractériser les stratégies utilisées par les élèves, à savoir si elles correspondaient plutôt à un niveau procédural ou conceptuel selon les définitions que nous nous étions données dans notre cadre de référence. Nous avons, au passage pris le temps de classer ces différentes stratégies selon qu'elles avaient mené à une réponse correcte, erronée ou partielle. Ce classement se retrouve tout au long de la section VI de notre rapport de recherche. Cela nous a permis de répondre à notre seconde question spécifique, à savoir :

Comment se caractérisent les stratégies mobilisées par des élèves de 5^e^ année devant des tâches portant sur la notion de fraction, du point de vue procédural/conceptuel ?

Cette étape nous a permis de constater que, si plusieurs élèves étaient en mesure de mobiliser une grande part des techniques supposées enseignées dans des stratégies de niveau procédural pour arriver à une réponse correcte, la mobilisation de ces techniques dans des stratégies de niveau conceptuelles s'avérait plus difficile. Malgré tout, plusieurs de ces élèves se sont révélés capables de mobiliser au moins une stratégie conceptuelle pour arriver à une réponse correcte dans l'un ou l'autre des items du test.

Enfin, dans la discussion de la section VI de ce rapport, nous avons effectué une synthèse de ces différentes stratégies en portant une attention particulière à l'occurrence de chacune d'elles en classant les stratégies procédurales et conceptuelles dans un tableau affichant la moyenne d'apparition de chacune par item, pour 35 élèves. Nous avons présenté un tableau pour les stratégies ayant mené à une réponse correcte et un tableau pour les stratégies ayant mené à une réponse erronée. Ce faisant, nous avons constaté que les stratégies procédurales, qu'elles aient mené à une réponse correcte ou erronée, étaient largement dominantes. Nous avons ainsi entamé la réponse à notre troisième question spécifique, laquelle se formulait ainsi :

Quels liens peuvent être faits entre les attentes institutionnelles concernant l'enseignement et l'apprentissage des fractions en fin de 5e année du primaire et les stratégies mobilisées par les élèves de cette classe pour résoudre des tâches impliquant les fractions?

Il nous reste maintenant à établir des liens entre les observations que nous avons faites dans les traces écrites des élèves et le rapport institutionnel en question. Notre discussion tournera maintenant autour de trois constats. À savoir :

1. L'observation que nous avons faite selon laquelle une majorité d'élèves semblait s'être montrée en mesure d'appliquer au moins une stratégie conceptuelle à un moment ou à un autre dans le test.
2. L'observation que nous avons faite selon laquelle les stratégies procédurales étaient largement majoritaires par rapport aux stratégies conceptuelles.
3. L'observation que nous avons faite selon laquelle très peu d'élèves avaient été en mesure de bien performer au test que nous leur avons présenté.

En ce qui concerne le premier et le second constat, à la fin de la section VI, nous avons observé que la majorité des élèves (57%) semblait, par moment, en mesure de mobiliser des stratégies conceptuelles sans pour autant le faire de façon soutenue à travers plusieurs items du test. Une première piste d'explication à ce phénomène pourrait se retrouver dans le contrat didactique en ce qui concerne les exigences propres à chaque classe en matière de justification écrite d'une stratégie. En ce sens, une classe qui normaliserait la pratique de verbaliser la stratégie employée travaillerait, non seulement, la compétence 3 du programme de formation de l'école québécoise *« communiquer à l'aide du langage mathématique »* (MÉQ, 2006, p. 133), mais contribuerait également au développement de la capacité des élèves à mobiliser une technique non routinisée à un niveau conceptuel selon nos critères. Rappelons que dans plusieurs items, c'était la verbalisation expliquant la technique utilisée qui déterminait si une stratégie était conceptuelle ou procédurale.

Une seconde piste d'explication à ce phénomène, toutefois, pourrait se retrouver dans le rapport institutionnel. Le programme étaye et distingue clairement une progression associée à un ensemble de types de tâches impliquant les fractions (voir l'analyse des documents institutionnels). De plus, au moment de décrire la compétence 1 *« résoudre une situation problème mathématique »* le programme définit le contexte de résolution d'une situation problème en intégrant des éléments qui semblent se rapprocher de ce que nous avons identifié comme se référant à une stratégie de niveau conceptuel :

> Une situation-problème se caractérise par le fait qu'il y a un but à atteindre, une tâche à réaliser ou une solution à trouver. L'objectif visé ne saurait être atteint d'emblée car il ne s'agit pas d'un exercice d'application. Sa quête suppose, au contraire, raisonnement, recherche et mise en place de stratégies mobilisant des connaissances. Aussi, la résolution de situations-problèmes en mathématique engage-t-elle l'élève dans une suite d'opérations de décodage, de modélisation, de vérification, d'explicitation et de validation. Il s'agit d'un processus dynamique impliquant anticipations, retours en arrière et jugement critique (MÉQ, 2006, p. 126).

Ces observations nous amènent à nous interroger sur la possibilité d'un décalage entre le discours avancé par les documents prescriptifs et l'enseignement effectif qui se réalise en classe. Rappelons que, dans notre cadre de référence (p. 14), nous avions identifié deux grandes approches d'enseignement s'inscrivant chacune dans deux perspectives épistémologiques distinctes. La première est l'approche d'enseignement transmissive, fondée sur une épistémologie positiviste. Dans cette approche, l'apprentissage se concentre sur un ensemble de méthodes et de procédures à suivre dans un apprentissage segmenté en silo. La seconde est l'approche d'enseignement centrée sur la résolution de situations problèmes, fondée sur une épistémologie socioconstructiviste. Cette dernière favorise plutôt la construction de sens dans une perspective holistique. Dans une prochaine recherche, il pourrait être intéressant d'inclure une analyse des pratiques enseignantes au regard de ces deux approches d'enseignement. L'hypothèse serait alors que l'enseignement soit plus axé sur un paradigme transmissif que socioconstructiviste.

Par ailleurs, en ce qui concerne le troisième constat, les difficultés vécues par les élèves dans le test qui leur a été présenté (43% de réponses correctes en moyenne) peuvent, selon nos observations, s'expliquer de plusieurs façons. Premièrement, dans l'objectif d'amener les élèves à mobiliser différentes techniques associées à la représentation et à la comparaison de fractions en les mettant en relation entre elles, nous avons suggéré des tâches qui allaient, par moment, au-delà des exigences explicites de la progression. Par exemple, dans l'item 1b, nous avons demandé à des élèves de comparer deux fractions telles que le dénominateur de l'une n'était pas multiple du dénominateur de l'autre. Ce choix forçait les élèves à mettre en relation différentes techniques prescrites par les documents institutionnels. Or, l'un des types de tâches présentés dans la progression des apprentissages implique explicitement « [d']ordonner des fractions, le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre (ou des autres) » (MELS, 2009, p. 7). Il n'est d'ailleurs pas attendu que les élèves soient en mesure de résoudre un tel type de tâche avant la fin de la 6e année (encore moins, donc, lorsque ce critère n'est pas respecté). Nous nous interrogeons cependant sur l'aspect potentiellement contradictoire, d'une part, d'affirmer que la résolution de problèmes au primaire engage *« l'élève dans une suite d'opérations de décodage, de modélisation, de vérification, d'explicitation et de validation »* (MÉQ, 2006, p. 126) en prescrivant l'enseignement de différentes techniques qui, lorsqu'elles sont mises en relation, permettent de résoudre certains types de tâches et, d'autre part, d'inclure un critère à une situation de comparaison qui restreint la potentielle mise en relation de ces différentes techniques ainsi que *« les anticipations »* et *« les retours en arrière »* pourtant souhaités. Nous soupçonnons, dans cette logique, que le fait d'impliquer un critère pour la mise en ordre de fractions qui sont « telles que le dénominateur de l'une est multiple du dénominateur de l'autre » puisse inciter les enseignants et les créateurs de matériel didactique à se limiter à ce type de tâches alors que le fait de formuler le critère autrement pourrait encourager la construction de tâches nécessitant la mobilisation autonome et la mise en relation des techniques enseignées sans nécessairement les rendre plus difficiles. Une formulation alternative pourrait être le type de tâche : « ordonner des fractions à l'aide de la réduction de fractions et/ou en construisant des fractions équivalentes ». Une telle formulation, tout en impliquant explicitement la mise en ordre de fractions telles que le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre, permet également de proposer, éventuellement, la comparaison de fractions telles que 5/9 et 4/6. Dans ce cas, l'élève peut d'abord tenter d'appliquer une réduction à la fraction 4/6 pour obtenir 2/3 et ensuite chercher une fraction équivalente à cette nouvelle fraction en multipliant numérateur et dénominateur par trois pour obtenir la fraction 6/9. Une telle tâche engagerait ainsi l'élève dans la mobilisation et la mise en relation des techniques non routinière c_1^4 (recherche de fractions équivalentes par multiplication) et c_2^4 (recherche de fractions équivalentes par réduction) à un niveau conceptuel. Techniques autrement apprises de façon routinière.

Enfin, encore une fois, l'hypothèse d'un décalage entre des éléments du rapport institutionnel (documents prescriptifs, choix d'enseignement, matériel didactique, etc.) pourrait expliquer les différents phénomènes observés au cours de notre recherche. Dans une prochaine recherche, une analyse exhaustive des différents constituants du rapport institutionnel (programmes, manuels scolaires, ressources didactiques pour les enseignants, pratiques et discours de l'enseignante) en nous intéressant plus particulièrement aux habitudes de classes et aux exigences en ce qui concerne le niveau attendu d'autonomie des élèves dans la réalisation de tâches complexes et dans la communication nous permettra d'approfondir et de nuancer nos interprétations. Pour ce faire, une attention plus soutenue à l'isolement des variables dans l'outil de cueillette de données sera nécessaire.

Annexe I

Exercice sur les fractions

N'écris pas ton nom sur la feuille.

Tu as environs 50 minutes pour répondre aux questions

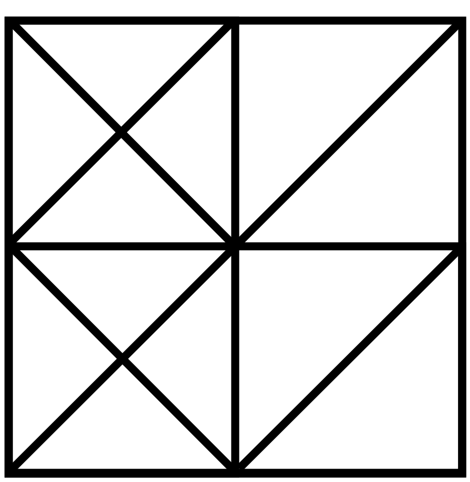
Laisse les traces de tes recherches sur la feuille. Tu peux biffer sur la feuille.

Bon travail !

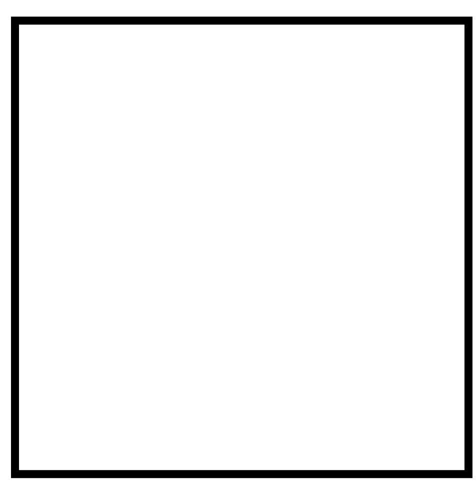
Item 1.

a) Voici deux tablettes de chocolat carrées de 6 cm de côté chacune. Mathis a mangé $\frac{10}{16}$ de sa tablette de chocolat. Théa a mangé $\frac{4}{6}$ de sa tablette. Noircis ce que chacun a mangé.

La tablette de Mathis :



La tablette de Théa :



b) Qui a mangé le plus de chocolat, Mathis ou Théa ? Explique ta réponse.

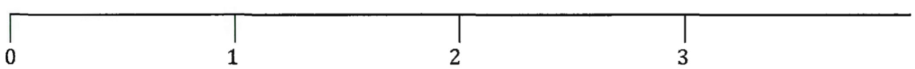
Item 2.

À Pâques on a organisé une chasse aux œufs, il y avait 16 œufs à trouver. Tu en as retrouvé les $\frac{2}{4}$ et ton ami en a retrouvé les $\frac{3}{8}$. Qui a retrouvé le plus d'œufs? Explique ta réponse.

Item 3.

Place les fractions suivantes sur la droite numérique.

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{5}{3}$

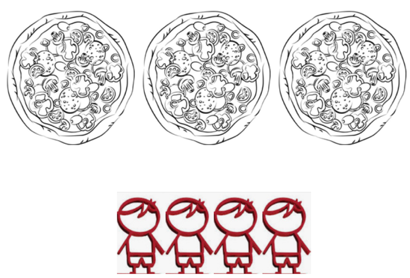


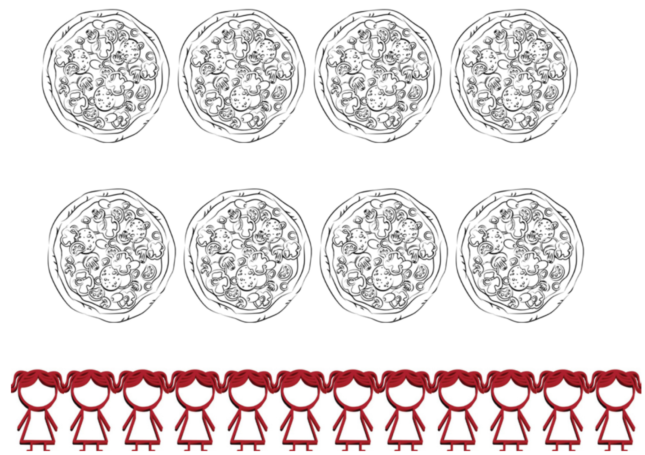
Item 4.

Pour ton anniversaire, il y avait 21 petits gâteaux à manger. Tu as mangé $\frac{4}{7}$ de ces petits gâteaux et ton ami Éliott a mangé le reste. Combien de petits gâteaux as-tu mangés ? Explique ta réponse.

Item 5.

À une fête, il y avait 4 garçons et 12 filles. Les garçons ont mangé 3 pizzas et ils ont tous mangé une part égale. Les filles ont mangé 8 pizzas et elles ont toutes mangé une part égale. Toutes les pizzas ont la même taille.





4 garçons mangent 3 pizzas

12 filles mangent 8 pizzas

Qui aura les plus grandes parts, les garçons ou les filles ? _______________

Explique ta réponse :

Item 6.

Voici une barre de chocolat : 

a)

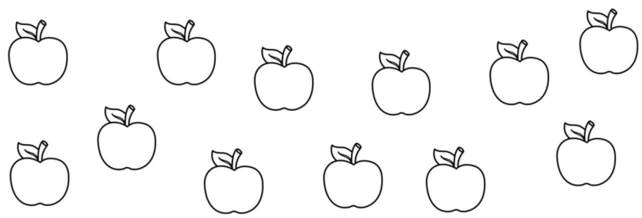
3 amis se sont partagé 5 barres pareilles à celle-ci de façon égale. Quelle est la fraction qui représente ce que chaque élève a mangé par rapport à cette barre? Explique ta réponse.

b) Gaëlle, de son côté, mange $\frac{9}{6}$ d'une barre pareille à celle dessinée à la page précédente. Qui a mangé le plus de chocolat, Gaëlle ou l'un des trois amis?

Explique ta réponse.

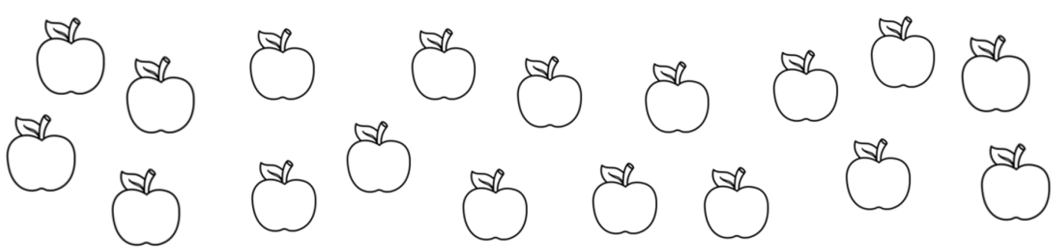
Item 7

a) Voici $\frac{3}{4}$ d'un sac de pomme.



Combien de pommes y'a-t-il dans le sac ? Explique ta réponse.

b) Voici $\frac{6}{5}$ d'un sac de pommes.



Combien de pommes y'a-t-il dans le sac ? Explique ta réponse.

Références

Adjiage, R. (1999). L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial. Thèse de doctorat, Strasbourg, Université Louis Pasteur.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., Silver, E.A. (1983). Rational Number Concepts. Dans R.Lesh et M. Landau. Acquisition of Mathematics Concepts and processes. New-York: Academie Press, p. 91-126.

Bergeron, C., Boublil, H., Dupré, A. et Ledoux, A. (2018). Zoom sur les mathématiques au quotidien : 4e année du primaire : cahiers d'apprentissage B et C. Éditions CEC, Anjou (Québec).

Bergeron, C. et Sauvageau, K. (2014). Caméléon : mathématique : 4e année primaire : cahiers d'apprentissage A et B. Éditions CEC, Anjou (Québec). ISBN : 9782761768528

Bilodeau, S., Dumont, C. et Loubier, K. (2014). Math et Matie 2e année : cahiers d'apprentissage B, 2e éd. Éditions CEC, Anjou (Québec). ISBN : 9782761766098

Blouin, P. (2002). Dessine-moi un bateau : la multiplication par un et demi. Collection Mathèse. Édition Bande didactique, Trois-Rivières.

Bosch, M., et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue), 19*(1), 77-123.

Boublil, H., Dupré, A., Lalande, N. et Loubier, K. (2018). Mathéo et les mathématiques au quotidien : 2e année du primaire : cahier d'apprentissage. Éditions CEC, Anjou (Québec) : 9782761792998

Brown, C.A., Carpenter, T.P., Kouba, V.L., Linquist, M.M., Silver, E.A., Swafford, J.O. (1988). Secondary School Results for the Fourth NAEP Mathematics Assessment. *Discrete Mathematics, Data Organisation and Interpretation, Measurement, Number and Operations. Mathematics Teacher, 81*(4). P. 242-248.

Carette V., Content A., Rey B., Coché F., Gabriel F. (2009). Étude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire. *Recherche financée par la Communauté française 126*(07), Université libre de Bruxelles.

Charnay, R., et Mante M. (1992). De l'analyse de l'erreur en mathématiques aux dispositifs de remédiation: quelques pistes, «Grand N» n°48. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourrier. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/48n5_1562937289243-pdf

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-111, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998.

Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N. et Roegiers, X., (2002). Leximath : Lexique Mathématique de base. Deuxième édition (adaptation et mise à jour de Jacqueline Laflamme). Beauchemin, Québec, 192 p.

DeBlois, L. (2011). Enseigner les mathématiques : Des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter. Presses de l'Université Laval, Québec. p. 113-148.

DeBlois, L. (2014). Les tensions et les questions soulevées dans les rapports enseignement/ apprentissage des mathématiques liés aux élèves dits en difficulté : réflexion issue des textes de cet ouvrage. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis et L. DeBlois (dir.), Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Regard didactique (p. 229-242). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Desjardins, M. et Hétu, J. C. (1974). L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions. Presses de l'université de Montréal.

Dionne, J. (1995). Modèle utilisé pour définir la compréhension des concepts mathématiques. Dans L. Saint-Laurent, J. Giasson, C. Simard, J. Dionne et É. Royer (dir.), Programme d'intervention auprès des élèves à risque (p. 199 213). Boucherville : Gaëtan Morin.

Fortier, M. (1988). La fraction décimale avant la fraction ordinaire : pourquoi pas? Instantanés mathématiques, septembre-octobre, p. 5-9.

Fortier, N. et Leblanc, A. (2013). Décimale : mathématique : 5e année primaire : cahiers de savoirs et d'activités A. Pearson ERPI, Montréal. ISBN : 9782761353892

Gagnon, M. (2015). Quelle place pour les rapports aux savoirs en éducation? Pédagogie collégiale, 20(1), 24-32.

Ghailane, O. (2015). Les connaissances sur les fractions d'élèves de troisième cycle du Primaire. Mémoire, Université du Québec à Montréal.

Giordan, A., Girault, Y. et Clement, P. (1994). Conceptions et connaissance, Peter Lang. 319 p.

Hasemann, K. (1985). *Difficulties with Fractions in German Schools*. Dans: Bell, Kilpatrick, Lowe (Dir.). *Research and Theory in Mathematics Education*. Nottingham: Shell Centre for Mathematics Education. ICME.

Hiebert, J., et T. P. Carpenter (1992). Learning and Teaching with Understanding. Dans D. A. Grouws (dir.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (p. 65-97). New York : McMillan.

Houle, V. (2016). Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction. Thèse, Université du Québec à Montréal.

Houle, V. et Giroux, J. (2016). Difficultés en mathématiques: contribution de différentes disciplines et plaidoyer en faveur d'une approche didactique. Chronique–Fondements et épistémologie de l'activité mathématique, Université du Québec à Montréal.

Kieren T.E. -(1989). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. Dans J. Hiebert et M. Behr. Number concepts and operations in the middle grades. Reston, Virginia: Editions Lawrence Erlbaum, p. 162-181.

Kieren, T.E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to Recursive understanding. Dans : T. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration ofresearch. Editions Lawrence Erlbaum Associates, NJ, p.49-84.

Kieren, T. E. (1995). Creating spaces for learning fractions. Dans : J. T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds.), Providing afoundationfor teaching mathematics in the middle grades. Albany: State University ofNew York Press, pp. 31-65.

Lesh, R., Landau, M., Hamilton, E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. Dans : Lesh, R. et Landau, M. (Dir.). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York : Academic Press. p. 264-344.

Lord, S. et Bergeron M-M. (2020). Les Irréductibles : mathématique : 5e année primaire : cahier de savoirs et d'activités A et B. Chenelière Éducation, Montréal. ISBN : 9998202010082.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ?. *Revue française de pédagogie*, 188, 13-22. https://doi.org/10.4000/rfp.4530

Mercier, P. et DeBlois, L. (2004). Passage primaire-secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions. E*nvol, 127*. p. 17-24.

Ministère de l'éducation, des loisirs et du sport (MÉLS) (2009). *Progression des apprentissages au primaire : Mathématiques.* [en ligne]. URL : http://www.education.gouv.qc.ca/file admin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique primaire_2009.pdf

Ministère de l'éducation du Québec (MÉQ) (2006). Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire. Bibliothèque Nationale du Québec.

Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants: Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur* (Doctoral dissertation, Université Virtuelle de Tunis).

Nunes T. et Bryant P. (1996). Children Doing Mathematics. Oxford, U.K. : Blackwell

Post, T. R. (1981). Fractions: Results and Implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher, 28*(9). p. 26-31.

Pitkethly, A. et Hunting, R. (1996). A Review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational studies in Mathematics, 30*(1), pp. 5-38.

Rioux, M. (2003). Les pratiques sociales didactisées relatives aux fractions dans les manuels québécois utilisés pour l'enseignement des mathématiques en sixième année. Rimouski : Université du Québec à Rimouski.

Roiné, C. (2009). Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA: une contribution à la question des inégalités (Doctoral dissertation, Bordeaux 2).

Rosar, D., van Nieuwenhoven, C., Jonnaert, P. (2007). Les fractions, comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves ? Université Catholique de Louvain, Belgique, Université du Québec à Montréal.

Sarrazy, B. (2001). Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques. Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement. *Revue française de pédagogie, 136*(1), 117-132.

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal 20*(2), 5-24

Thouin, M., (2014). Réaliser une recherche en didactique. MultiMonde, Montréal, Québec, ISBN 978-2-89544-466-4, p. 141-142

Vergnaud, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité. Berne: Éditions Peter Lang.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, vol 10*(2.3), 133-170, Grenoble, La Pensée Sauvage.