



# BIBLIOTHÈQUE

CÉGEP DE L'ABITIBI-TÉMISCAMINGUE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

## Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans [Depositum](#), site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous. L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre.

## Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) obtained the permission of the author to use a copy of this document for nonprofit purposes in order to put it in the open archives [Depositum](#), which is free and accessible to all. The author retains ownership of the copyright on this document.



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE (UQAT)

## **Loi de commande Backstepping avec barrière pour la poursuite de trajectoire d'un drone**

par Adel Khadhraoui

Mémoire présenté à l'université du Québec en Abitibi Témiscamingue en vue de  
l'obtention du grade de maîtrise Génie électrique

Décembre 2023

# Remerciements

À ma femme Salsabil Labidi, qui m'a entouré d'un amour inconditionnel et d'une affection sans faille. Elle a tout fait pour favoriser ma réussite. Que Dieu lui accorde une bonne santé, une vie longue et heureuse.

À mes chères enfants Nour et Omar, qui ont été ma source d'inspiration constante et ma motivation inébranlable tout au long de ce parcours.

J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur, le professeur Mohamad Saad pour les aides compétentes qu'il m'a apporté. Monsieur Saad, je vous remercie pour votre patience et votre encouragement pour finir ce travail. Je tiens à vous témoigner toute ma reconnaissance pour la confiance que vous m'avez accordée.

Je tiens à remercier Le Professeur Mourad Nedil et Le Professeur Yassine Kali d'avoir consacré du temps à la lecture minutieuse de ce mémoire et de m'avoir fait part de leurs remarques et suggestions, toujours d'une grande pertinence.

Je souhaite aussi remercier mes parents mes frères et soeurs, pour leur soutien indéfectible, mes amis, pour tous les moments de détente passés ensemble. C'est grâce à vous que j'ai pu trouvé la force de ramener quand l'objectif semblait si lointain.

# Résumé

Depuis une dizaine d'années maintenant, les drones de type quadrotor prennent une place grandissante dans le domaine civil. Le quadrotor est parmi les drones multi-rotors les plus connus dans la recherche, en raison de la simplicité de sa structure, son faible coût, et sa capacité d'effectuer des vols stationnaires, et d'atterrir et décoller verticalement. Malgré une complexité moindre de cet engin, la commande d'un tel système nécessite une attention particulière, puisque ce système est fortement non linéaire, multi-variable, couplé et sous actionné. Bien que la modélisation et la commande des quadrotors aient été largement étudiées, il reste encore à améliorer leur fiabilité pour une utilisation plus étendue. Ce travail porte sur la modélisation et la conception d'une loi de commande non linéaire d'un drone de type quadrotor afin de poursuivre une trajectoire de référence bien définie. En se basant sur des fonctions de Lyapunov avec barrière, on construit des lois de commandes non linéaires qui respectent les contraintes liées au modèle du drone et empêchent le système de sortir de certaines zones de l'espace d'état. Les barrières sont des limites qui sont imposées sur les variables de sortie du système. La commande non linéaire basée sur les fonctions avec barrière possède l'avantage majeur de respecter les contraintes physiques liées au modèle. Cependant, cette commande n'est pas robuste

face aux incertitudes paramétriques et les perturbations externes, une loi d'adaptation est ajoutée pour donner une robustesse face à cet effet. Pour atteindre ces objectifs, un modèle dynamique du quadrotor selon la méthode de Newton-Euler a été développé. Ensuite, une conception de la commande basée sur le théorème de Lyapunov et les fonctions avec barrière est réalisée. Afin de surmonter le problème des incertitudes paramétriques, on va ajouter une loi d'adaptation qui estime les paramètres inconnus et qui garantit leur convergence vers leurs valeurs respectives, sans affecter le bon fonctionnement de système, notamment la stabilité du système. Des simulations numériques sont effectuées sur MATLAB/Simulink pour illustrer les résultats théoriques des commandes élaborées pour le problème de poursuite de trajectoires du drone.

**Mots clés :** Engin volant, Quadrotor, Drone, Commande non linéaire, Fonction avec Barrière, Lyapunov, Commande adaptative, Robustesse, Contraintes symétriques et asymétriques, Poursuite de trajectoire.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Notations</b>	<b>vii</b>
<b>1 Etat de l'art et motivation</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Historique des drones . . . . .	4
1.3 Classification des drones de type quadrotor . . . . .	5
1.3.1 Classification selon le domaine d'application . . . . .	5
1.3.2 Classification selon l'autonomie . . . . .	9
1.3.3 Classification selon la taille . . . . .	9
1.4 Déploiement des drones de type quadrotor . . . . .	11
1.4.1 Domaine civil . . . . .	12
1.4.2 Domaine militaire . . . . .	12
1.5 Structure de la navigation d'un drone . . . . .	14
1.6 Les techniques de commande pour les quadrotors . . . . .	15
1.7 Problématique et contribution de mémoire . . . . .	22
1.8 Objectifs de mémoire . . . . .	24
1.8.1 Objectif général . . . . .	24
1.8.2 Objectifs spécifiques . . . . .	24
1.9 Organisation du document . . . . .	25
1.10 Conclusion . . . . .	26
<b>2 Introduction à la théorie de la stabilité asymptotique</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Equations différentielles et stabilité . . . . .	28
2.2.1 Equations différentielles . . . . .	28
2.2.2 Stabilité asymptotique . . . . .	29
2.3 Méthodes d'étude de la stabilité asymptotique . . . . .	31
2.3.1 Méthode de Lyapunov . . . . .	32
2.3.2 Principe d'invariance de LaSalle . . . . .	34
2.4 Stabilité exponentielle . . . . .	36

2.5	Fonction de Lyapunov avec barrière (BLF)	37
2.6	Conclusion	39
<b>3</b>	<b>Modélisation du drone</b>	<b>40</b>
3.1	Introduction	40
3.2	Modèle cinématique	41
3.2.1	Repères associés	41
3.2.2	Paramétrisation	42
3.3	Modèle dynamique	48
3.3.1	Dynamique d'accélération	48
3.3.2	Dynamique de rotation	49
3.4	Conclusion	52
<b>4</b>	<b>Commande basée sur des fonctions de Lyapunov avec barrière</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction	53
4.2	Commande non linéaire pour la poursuite de trajectoire d'un quadrotor	54
4.2.1	Changement de variables et système d'erreurs	54
4.2.2	Commande basée sur une fonction de Lyapunov avec barrière symétrique (BLF)	58
4.2.3	Commande basée sur une fonction de Lyapunov avec barrière asymétrique (ABLF)	63
4.2.4	Simulations et résultats numériques	66
4.3	Commande non linéaire robuste	73
4.3.1	Commande BLF	74
4.3.2	ABLF	77
4.3.3	Simulation numérique	80
4.4	Commande adaptative	88
4.4.1	Commande BLF	89
4.4.2	ABLF	90
4.4.3	Simulation numérique	92
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>101</b>

# Table des figures

1.1	Drone d’inspection [1]. . . . .	6
1.2	Drone d’agriculture [1]. . . . .	7
1.3	Drone d’aménagement [1]. . . . .	7
1.4	Drone logistique [1]. . . . .	8
1.5	Drone de sécurité [1]. . . . .	8
1.6	Micro drone [1]. . . . .	9
1.7	Mini drone [1]. . . . .	10
1.8	Drone de taille moyenne [1]. . . . .	10
1.9	Drone de grande taille [1]. . . . .	11
1.10	Drone militaire [1]. . . . .	13
1.11	La structure de navigation d’un engin volant [44] . . . . .	14
1.12	Parrot Mambo [1]. . . . .	23
2.1	Méthode de Lyapunov . . . . .	34
2.2	Symétrique (à droite) et asymétrique (à gauche) fonction de Lyapunov avec barrière . . . . .	38
3.1	Parrot Mambo [1]. . . . .	42
4.1	Structure de la commande . . . . .	67
4.2	Poursuite de trajectoire en position (BLF) . . . . .	69
4.3	Erreurs en position (BLF) . . . . .	69
4.4	Erreurs en orientation (BLF) . . . . .	69
4.5	Trajectoire en 3D (BLF) . . . . .	70
4.6	Trajectoire en 3D (BLF) . . . . .	70
4.7	Comportement de la commande (BLF) . . . . .	70
4.8	Poursuite de trajectoire en position (ABLF) . . . . .	71
4.9	Erreurs en position (ABLF) . . . . .	72
4.10	Erreurs en orientation (ABLF) . . . . .	72
4.11	Trajectoire en 3D (ABLF) . . . . .	72
4.12	Trajectoire en 3D (ABLF) . . . . .	73
4.13	Comportement de la commande (ABLF) . . . . .	73
4.14	Trajectoire du quadrotor en 3D (BLF). . . . .	81
4.15	Commande de poursuite de trajectoire (BLF). . . . .	82
4.16	Évolution de l’erreur en position en fonction du temps (BLF). . . . .	83

4.17	Évolution de l'erreur en orientation en fonction du temps. . . . .	84
4.18	Trajectoire du quadrotor en 3D (ABLF). . . . .	85
4.19	Commande pour la poursuite de trajectoire (ABLF). . . . .	86
4.20	Évolution de l'erreur en position en fonction du temps (ABLF). . . . .	87
4.21	Évolution de l'erreur en orientation en fonction du temps (ABLF). . . . .	88
4.22	Trajectoire du quadrotor en 3D (BLF). . . . .	94
4.23	Commande pour la poursuite de trajectoire (BLF). . . . .	95
4.24	Évolution de l'erreur en position en fonction du temps (BLF). . . . .	96
4.25	Évolution de l'erreur en orientation en fonction du temps (BLF). . . . .	97
4.26	Trajectoire du quadrotor en 3D (ABLF). . . . .	98
4.27	Commande pour la poursuite de trajectoire (ABLF). . . . .	99
4.28	Évolution de l'erreurs en position en fonction du temps (ABLF). . . . .	100
4.29	Évolution de l'erreur en orientation en fonction du temps (ABLF). . . . .	101

# Notations

Tout au long de ce mémoire, les notations suivantes sont utilisées.

- $I_3$  : Matrice d'identité de taille  $3 \times 3$ .
- $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$ .
- $\mathbb{R}$ : Corps des réels.
- $\mathbb{R}^n$ :  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .
- $B(0, r)$ : Boule ouverte de centre 0 et de rayon  $r$ .
- $\|\cdot\|$ : La norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .
- $L^1$ : L'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ : Le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $A^T$  : La transposée de la matrice  $A$ .
- $sign$ : La fonction signe.
- MUAV : Mid-altitude Unmanned Air Vehicle.

- LQR : Linear Quadratic Regulator.
- FBL : Feedback Linearization.
- FTSMC : Fast Terminal Sliding Mode Control.
- SMC : Sliding Mode Control.
- NMPC : Nonlinear Model Predictive Control.
- CNN : Convolutional Neural Network.
- UAV: Unmanned Aerial Vehicle.
- BLF : Barrier Lyapunov Function.
- ABLF : Asymmetric Barrier Lyapunov Function.

# Chapter 1

## Etat de l'art et motivation

### 1.1 Introduction

Les drones sont des aéronefs autonomes ou semi autonomes capables de voler et d'effectuer une mission sans pilote à bord. Ils sont aussi connus sous la détermination Unmanned Aerial Vehicle (UAV). L'intérêt pour la commande de ces engins volants s'est considérablement accru au cours de ces dernières années. Les drones de type quadrotor, également connus sous le nom de drones à quatre hélices, sont des véhicules aériens sans pilote qui utilisent quatre moteurs et hélices pour se propulser et se stabiliser en vol. Ils sont devenus de plus en plus populaires ces dernières années en raison de leur polyvalence et de leur facilité d'utilisation.

L'utilisation des drones a d'abord été connue dans les applications militaires, comme la surveillance et la reconnaissance et comme une plateforme de désignation de cible ou comme une arme. Puis, plusieurs applications civiles, dans lesquelles la présence de

l'homme n'est pas indispensable et/ou de faibles coûts d'opération sont demandés, sont devenues concurrentes. Dans les missions actuelles, on peut citer la surveillance du trafic routier, l'inspection d'ouvrage, l'observation des phénomènes naturels, la pulvérisation des pesticides sur les surfaces agricoles, la surveillance de l'environnement (exemple : Missions dangereuses, détection de gaz toxiques, radiations), la prévention des feux de forêt et des réseaux routiers, la maintenance des infrastructures, la livraison des colis (exemple : des médicaments d'urgence, des colis achetés sur le net, des opérations de distribution des médicaments ou de la nourriture durant les catastrophes naturelles), etc. D'autre part, on trouve une vaste variété de robots volants de différentes classes, et parmi les catégories des robots volants les plus populaires au cours de ces dernières années se trouvent les quadrotors grâce à leur structure mécanique de petite taille et de faible poids, ce qui leur permet d'être déployé dans des milieux très complexes. Mais, ces robots volants qui possèdent quatre rotors placés généralement aux extrémités d'une croix et qui sont contrôlés en agissant sur les vitesses de rotation des quatre rotors ont un grand problème qui est lié à leur dynamique qui est fortement couplée. D'où l'obligation d'une approche de commande performante qui permet d'assurer la stabilité et garantit le suivi de trajectoires désirées. D'où l'importance de la modélisation et de la simulation des quadrotors pour assurer leur sécurité, et la sécurité des gens aux alentours d'eux, ainsi que pour réduire les coûts d'opérations. Par conséquent, il faut chercher les moyens qui peuvent nous aider à parcourir rapidement la conception de contrôleurs de vol avant le déploiement et les tests sur du matériel.

Ces drones sont contrôlés à distance à l'aide d'une radiocommande ou d'une application mobile, et certains modèles plus avancés peuvent même être programmés pour effectuer des missions spécifiques de manière autonome.

## 1.2 Historique des drones

Les drones de type quadrotor, également appelés quadricoptères, sont des drones propulsés par quatre hélices. Ils sont très populaires en raison de leur agilité, de leur stabilité et de leur capacité à effectuer des manœuvres précises.

Les premiers prototypes de drones quadrotors ont été développés dans les années 1920 et 1930, principalement à des fins militaires. Cependant, en raison des limitations technologiques de l'époque, ces premiers modèles étaient souvent instables et difficiles à contrôler.

Au cours des dernières décennies, les avancées technologiques dans les domaines de l'électronique, de l'informatique et des matériaux ont permis de développer des drones quadrotors plus avancés. Les chercheurs ont pu améliorer leur stabilité, leur autonomie et leur capacité à transporter des charges utiles.

Dans les années 2000, les drones quadrotors ont commencé à gagner en popularité auprès du grand public. Les fabricants ont commencé à commercialiser des modèles abordables et faciles à piloter, ce qui a permis à un plus grand nombre de personnes de profiter de cette technologie.

Depuis lors, les drones quadrotors ont connu une croissance exponentielle, tant dans le domaine des loisirs que dans le domaine professionnel. Ils sont utilisés dans de nombreux

secteurs, tels que la photographie et la vidéographie aériennes, la cartographie, l'inspection des infrastructures, la recherche et le sauvetage, et bien d'autres encore.

## **1.3 Classification des drones de type quadrotor**

Aujourd'hui, nous disposons d'une grande gamme d'engins volants permettant de réaliser différentes tâches. Nous pouvons citer les petits drones, ces engins volants, quant à eux, ne nécessitent pas l'intervention d'un opérateur pour accomplir leur mission. Autonomes d'un point de vue énergétique et décisionnel, ils n'auront pas la même structure suivant qu'ils sont destinés à explorer les grands fonds ou à évoluer dans des zones dangereuses. Les drones de type quadrotors ont fortement évolué d'un point de vue technologique, on peut les classer suivant certains critères ou certaines spécifications.

### **1.3.1 Classification selon le domaine d'application**

Depuis quelques années, le drone est de plus en plus utilisé dans de nombreux domaines d'application. Grâce à son autonomie, sa rapidité et son apport d'information nouvelle, les entreprises comme les particuliers apprécient son usage.

1. Dans l'inspection : Le drone est un excellent moyen aérien permettant de faciliter l'inspection dans plusieurs secteurs. Dans l'archéologie, il aide à la reconstruction, à la vue globale des travaux, et aux cadastres. Mais c'est aussi l'équipement idéal pour réaliser de nouvelles découvertes ou effectuer des cartes en 3D. D'ailleurs, la cartographie par drone est aujourd'hui très appréciée par les entreprises pour faciliter

certaines tâches. Par ailleurs, le drone facilite également l'inspection dans les zones en hauteur ou souterraines (Figure 1.1). Par exemple, il sert de moyen d'inspection très efficace sur des éoliennes, des panneaux photovoltaïques, les lignes électriques de haute tension, etc. avec l'avantage d'un gain de temps. Enfin, on l'utilise dans la localisation de patrimoine. De plus en plus de professionnels proposent désormais la localisation de patrimoine par drone pour aider et alléger les familles ou les compagnies.



**Figure 1.1:** Drone d'inspection [1].

2. Dans l'agriculture : Dans le secteur agricole, le drone a beaucoup de potentiel. En principe, son rôle est d'assurer une surveillance claire et efficace des cultures. Il permet de détecter rapidement et facilement les maladies sur l'agriculture. Et c'est l'outil idéal pour localiser et détruire des nids de frelons asiatiques. Mais il existe certains modèles pouvant effectuer une pulvérisation précise de produit de traitement en fonction des besoins du terrain. Dans tous les cas, le drone se déplace rapidement sur de très grandes surfaces, ce qui constitue un atout non négligeable pour les plantations et la récolte (Figure 1.2).
3. Dans l'aménagement du territoire : Il est parfaitement possible de réaliser des cadas-



**Figure 1.2:** Drone d'agriculture [1].

tres, du géo-référencement, des implantations 3D, et des orthophotographies par drone (Figure 1.3). Cet équipement offre une solution pratique pour élaborer un diagnostic dans des endroits difficiles d'accès. Il peut survoler les secteurs montagneux, les sites protégés, les monuments, etc. Si nécessaire, il peut aussi gérer les espaces verts et les travaux publics.



**Figure 1.3:** Drone d'aménagement [1].

4. Dans la logistique : Le drone a permis une évolution non négligeable dans le domaine de la logistique (Figure 1.4). Actuellement, de nombreux acteurs du secteur de la santé l'utilisent pour transporter du matériel d'urgence ou des médicaments. Il s'agit d'une véritable prouesse technique permettant un gain de temps indéniable dans les situations d'urgence. D'ailleurs, plusieurs médecins sans frontière ont déjà utilisé les

drones après des catastrophes naturelles.



**Figure 1.4:** Drone logistique [1].

5. Dans la sécurité : En France, les sapeurs-pompiers utilisent des drones pour les assister dans les interventions. Cet outil volant permet, en effet, de retranscrire en direct les images d'un incendie, ainsi que sa provenance. Il aide les secouristes à visualiser clairement ce qui se passe par thermographe (Figure 1.5). Et ceux-ci peuvent facilement évaluer les éventuels retours de flamme. Dans le même contexte, le drone commence à se faire une place dans la sécurité civile. Il est largement utilisé pour la surveillance des bâtiments, des entrepôts, et des manifestations en plein air. C'est aussi l'équipement privilégié pour évaluer les zones à risques et le trafic routier. Bref, il constitue l'appareil idéal pour avoir une vision aérienne dans toutes les situations afin de garantir une sécurité optimale.



**Figure 1.5:** Drone de sécurité [1].

### 1.3.2 Classification selon l'autonomie

Selon leur autonomie, on distingue trois classes des drones:

- Drones à courte portée, autonomie moins de 10 minutes.
- Drones à moyenne portée, autonomie entre 10 minutes et 2 heures.
- Drones à longue portée, autonomie plus de 2 heures.

### 1.3.3 Classification selon la taille

On peut aussi classer les drones selon leurs tailles, on distingue quatre classes :

1. Micro drones (Figure 1.6) : Ils peuvent être conçus avec une taille variant de celle d'un grand insecte à un dispositif mesurant jusqu'à 50 cm de long. Les deux modèles les plus courants dans cette catégorie sont: les mini drones et les nano/micro drones. Les nano drones sont largement utilisés en raison de leur structure minuscule et de leur construction légère car ils fonctionnent comme des armes essentielles pour l'espionnage.



**Figure 1.6:** Micro drone [1].

2. Mini drone (Figure 1.7) : Ils ont une taille un peu plus grande que les micro-drones, ce qui signifie qu'ils dépassent 50 cm mais ils ont une dimension maximale de 2 m. La plupart de ces modèles de drones sont conçus avec une construction des ailes fixes, même si certains sont dotés d'ailes rotatives. En raison de leur petite taille, ils ont une faible puissance.



**Figure 1.7:** Mini drone [1].

3. Drones de taille moyenne (Figure 1.8) : Cette catégorie de drones contient des modèles plus lourds que les précédents, mais beaucoup plus légers et plus petits que les avions. Ces drones peuvent peser jusqu'à 200 *kg* et avoir une capacité de vol moyenne de 5 à 10 minutes.



**Figure 1.8:** Drone de taille moyenne [1].

4. Drones de grande taille (Figure 1.9) : Les grands drones ont une taille quelque peu

comparable à celle des avions et sont les plus utilisés pour les applications militaires. Les endroits qui ne peuvent pas être couverts avec des jets normaux sont généralement photographiés avec ces drones. Ils sont un dispositif principal pour les applications de surveillance. Les utilisateurs peuvent également les classer en différentes catégories en fonction de leur portée et de leurs capacités de vol.



**Figure 1.9:** Drone de grande taille [1].

## 1.4 Déploiement des drones de type quadrotor

Les applications des quadrotors sont potentiellement très vastes. Elles touchent en particulier deux principaux secteurs qui sont le secteur civil et le secteur militaire. Nous allons développer, dans les paragraphes suivants, les besoins de ces différentes activités. Nous allons également montrer que les drones sont devenus des outils indispensables pour l'homme, lorsque ce dernier doit intervenir dans un milieu dangereux.

### 1.4.1 Domaine civil

Les drones ont de nombreuses utilisations dans le domaine civil. Voici quelques exemples

:

1. Photographie et vidéographie aérienne : Les quadrotors équipés de caméras de haute qualité sont utilisés pour capturer des images et des vidéos aériennes, que ce soit pour des projets artistiques, des événements spéciaux ou même des films.
2. Agriculture de précision : Les drones peuvent être utilisés pour surveiller les cultures, collecter des données sur la santé des plantes, la qualité du sol et la gestion de l'eau. Cela permet aux agriculteurs de prendre des décisions éclairées pour optimiser leurs rendements et réduire l'utilisation de produits chimiques.
3. Cartographie et modélisation 3D : Les quadrotors équipés de capteurs spéciaux peuvent être utilisés pour créer des modèles 3D de bâtiments, de paysages ou de sites archéologiques. Ils peuvent également être utilisés pour cartographier des zones étendues avec précision.
4. Livraison : Certains services de livraison expérimentent l'utilisation de drones pour effectuer des livraisons rapides dans des zones urbaines. Cela peut être particulièrement utile pour les colis de petite taille et les livraisons d'urgence.

### 1.4.2 Domaine militaire

Dans le domaine militaire, les drones sont utilisés pour diverses missions, notamment la reconnaissance, la surveillance, la collecte de renseignements, la frappe de précision et

la logistique. Les drones offrent plusieurs avantages, telles que la capacité de mener des opérations à distance, la réduction des risques pour le personnel et la possibilité de rester en vol pendant de longues périodes (Figure 1.10). Une des applications militaires les plus étudiées concerne la détection et la destruction de mines. La destruction de ces objets est une tâche dangereuse et spécifique, où des engins robotisés peuvent permettre de localiser et de neutraliser ces bombes à la place de l'homme. Une autre activité en pleine émergence est la surveillance des ports. En général les applications militaires s'expriment dans les tâches suivantes:

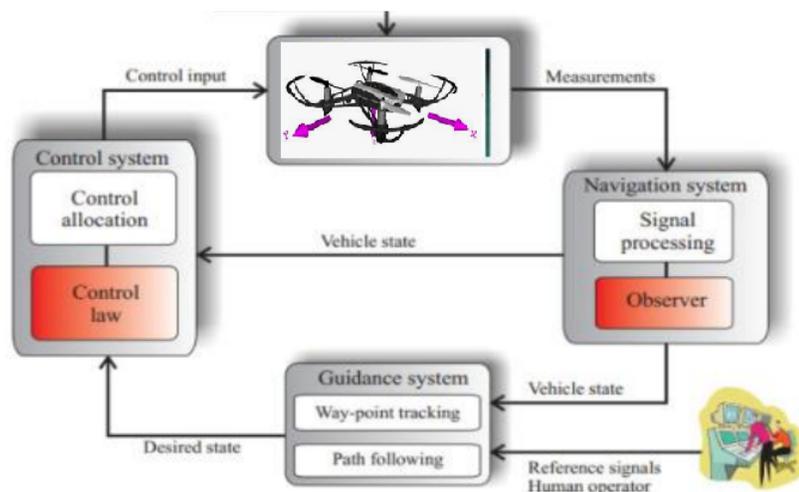
- Cartographies détaillées pour l'espionnage.
- Détection et identification des mines.
- Détection et identification des engins volants.
- Protection des ports militaires et des environnements portuaires.



**Figure 1.10:** Drone militaire [1].

## 1.5 Structure de la navigation d'un drone

La plupart des systèmes de commande sont construits sur la base des capteurs, des signaux de référence et la commande par rétroaction. Un drone est également construit sur la base de trois blocs indépendants qui sont le système de guidage, le système de navigation et le bloc commande (Figure 1.11). Les trois blocs représentent trois systèmes inter-connectés.



**Figure 1.11:** La structure de navigation d'un engin volant [44]

- Le système de guidage : Ce bloc fournit, les informations nécessaires pour la commande du système, à savoir : les signaux de référence, la position désirée du véhicule, la vitesse et l'accélération et angle de lacet. Ces informations sont introduites par un opérateur humain.

- Le système de navigation : Ce bloc est essentiel pour la commande et la navigation du drone, destiné à estimer la position, l'orientation et la distance effectuée par le véhicule durant la manœuvre. Dans plusieurs cas, le système de navigation est chargée d'estimer les vitesses du véhicule. L'estimateur permettant de reconstruire les variables d'état non mesurables du drone est appelé observateur.
- Le système de contrôle : Ce bloc détermine la commande en force et en moment nécessaires afin de satisfaire un certain objectif. Ce bloc est lui même composé de deux sous-blocs, à savoir, la loi de commande et le contrôle de puissance. Le sous-bloc loi de commande consiste à fournir des forces et des moments généralisées, tandis que le sous-bloc de contrôle d'allocation consiste à distribuer ces forces généralisés aux différents actionneurs d'une façon optimale.

## 1.6 Les techniques de commande pour les quadrotors

Un engin volant se présente comme un solide sur lequel des propulseurs doivent assurer la commande des six degrés de liberté, trois positions et trois rotations. Ils sont conçus en fonction des missions qui leurs seront assignées. Les drones sont des systèmes non linéaires pour les quels plusieurs paramètres du modèle sont peu ou non connus (termes de la matrice d'amortissement, les masses ajoutées, etc.) et sont susceptibles de varier au cours d'une mission. De plus, certains effets ne peuvent être intégrés correctement au modèle comme les masses ajoutées. Enfin, le véhicule est soumis à des perturbations environnementales. Ces termes mal connus et ces perturbations ont un effet sur le véhicule.

Sur les petits véhicules, ROV (Remotely operated vehicle) et AUV (Autonomous underwater vehicle) les approches de commande traditionnellement utilisées sur les véhicules à forte inertie ne suffisent pas à garantir des performances acceptables, c'est-à-dire, principalement, un retour rapide à la stabilité en cas de perturbation (par exemple un choc) et un fonctionnement peu sensible aux variations des paramètres du système (par exemple une variation de la charge embarquée, des caractéristiques d'un moteur, etc.). Il est alors nécessaire de mettre en œuvre des commandes robustes capables de s'adapter à la variabilité et au caractère incomplet du modèle, mais aussi aptes à rejeter correctement les perturbations.

La commande d'un drone est un problème connexe. Cependant, les solutions proposées dans la littérature sont intéressantes par la démarche et l'analyse du problème effectuées par les chercheurs. Nous abordons dans ce paragraphe quelques commandes appliquées aux AUVs. Cependant, la commande de tels engins doit répondre à des critères spécifiques.

Dans la littérature, il y'a plusieurs types de commandes pour les drones:

1. La commande adaptative par retour d'état : Cette méthode prend en compte certaines incertitudes de modélisation. Ces incertitudes sont souvent des paramètres inconnus ou qui varient lentement ou encore des non-linéarités ou des retards [2].
2. La commande robuste : C'est une commande qui vise à garantir les performances et la stabilité d'un système face à des perturbations du milieu et les incertitudes du modélisation (dynamique non modélisée). Dans [3], un contrôleur robuste pour le suivi de trajectoire d'un drone a été proposé et les études de robustesses ont montré une grande précision de suivi.

3. La commande en mode glissant: C'est une technique qui prend en compte les incertitudes du modèle. Son principe consiste à stabiliser et attirer les variables d'état du système dans une région d'espace d'état désiré, citons par exemple les travaux dans [4].
4. Commande basée sur le Backstepping : La commande backstepping est une méthode récursive minimisant l'effort de contrôle, qui combine une fonction de Lyapunov avec la structure d'une boucle de rétroaction. La méthode consiste à transformer des variables d'état intermédiaires en des entrées virtuelles qui vont commander d'autres variables d'état et de réduire l'ordre de systèmes complexes en plusieurs sous-systèmes simples d'ordre inférieur. La technique de Backstepping est un autre type de commande non linéaire appliqué avec succès dans le domaine de la robotique [5].
5. Commande basée sur les réseaux de neurones : Récemment, les réseaux de neurones convolutifs (CNN) ont donné d'excellents résultats dans différents domaines de la reconnaissance, de la détection et de la classification, en particulier en vision par ordinateur. CNN est une classe de réseaux de neurones profonds, et est principalement appliqué pour analyser l'imagerie visuelle. Pour l'application de la détection et de la classification d'objets, CNN est considéré comme un outil très puissant. Les CNN sont des modèles hiérarchiques d'inspiration biologique qui peuvent être entraînés pour effectuer une variété de détection, de reconnaissance et de segmentation. Les CNN ont été utilisés avec succès pour détecter et suivre un objet cible, en mouvement ou immobile, avec un drone, le Parrot AR Drone 2 [6].

6. Commande basée sur une fonction de Lyapunov avec barrière: Manipuler les contraintes liées au système est l'une des questions difficiles pour commander un système dynamique, et divers outils ont été développés à cet égard. Récemment, les fonctions de Lyapunov avec barrière (BLF Barrier Lyapunov Function) ont donné d'excellents résultats dans différents domaines de contrôle des systèmes non linéaires qui possèdent des limitations physiques et dynamiques. Ces fonctions sont utilisées comme un outil de conception pour la commande des systèmes sous des contraintes de sortie [7]. L'utilisation des fonctions barrières pour gérer les contraintes de sortie dans les systèmes de commande a très récemment renouvelé l'intérêt ([8, 9, 10]), tandis que leur première utilisation était dans un contexte d'optimisation pure. Ces travaux ont été appliqués sur des drones et des robots mobiles, particulièrement pour des applications industrielles. Peu de travaux de recherche ont été réalisés pour des applications minières souterraines. Notre recherche vient combler ce manque de recherche liées à la surveillance et à la sécurité des travailleurs dans les mines, particulièrement souterraines.

Nous présenterons ici quelques travaux pour la conception de la commande pour les drones. Récemment, de nombreuses stratégies de contrôle ont été développées et appliquées pour la stabilisation et le suivi de trajectoire des drones, notamment la linéarisation par rétroaction FBL (Feedback Linearization) [11], le contrôle prédictif du modèle MPC (Model Predictive Control) [13], [14], le contrôle en mode glissant SMC (Sliding Mode Control) [12], [15], le contrôle adaptatif [16], [17] et la technique de backstepping [18], [19], pour n'en nommer que quelques-uns.

Les auteurs de [20] ont utilisé une méthode basée sur FBL pour le contrôle de la dynamique d'attitude et d'altitude et un régulateur quadratique linéaire LQR (Linear Quadratic Regulator) à action intégrale pour la position d'un drone, pour suivre une trajectoire prédéfinie. Cependant, le contrôleur basé sur FBL est assez sensible au bruit du capteur ainsi qu'à l'incertitude de modélisation. Les méthodes FBL et LQR ont été appliquées dans [11] pour analyser et stabiliser un système de drone quadrotor. L'optimisation par essaim de particules (PSO) a été utilisée pour obtenir les matrices de pondération optimales de LQR de telle sorte que le contrôleur composite puisse réduire les amplitudes des entrées de contrôle du système. Dans [21], les auteurs ont appliqué le MPC pour obtenir une trajectoire précise en présence de rafales de vent violents. L'approche MPC est utile en raison de ses caractéristiques de suivi optimales [22]. Dans [23], les auteurs ont comparé empiriquement deux stratégies de contrôle, le contrôleur prédictif (NMPC) et le contrôleur basé sur la planéité différentielle (DFBC), en suivant une grande variété de trajectoires. Des comparaisons ont été effectuées dans des environnements de simulation et en temps réel pour évaluer systématiquement les deux méthodes en termes de précision de suivi, de robustesse et d'efficacité de calcul. Les comparaisons ont montré la supériorité du NMPC dans le suivi de trajectoires, au prix d'un temps de calcul plus élevé et d'un risque de problèmes de convergence numérique. Une stratégie SMC adaptative saturée a été présentée dans [24] pour la stabilisation d'attitude et d'altitude d'un drone quadrotor, en prenant en compte la saturation d'entrée. Par rapport aux stratégies de contrôle conventionnelles, cette approche a fourni des performances de suivi et un rejet des perturbations et des incertitudes supérieurs. Un SMC adaptatif à planification floue de gain pour la régulation

d'attitude d'un drone quadrotor avec des incertitudes paramétriques et des perturbations externes a été envisagé dans [25]. Un SMC continu à convergence exponentielle, combiné à un observateur en mode glissant à temps fini estimant les états complets et identifiant les perturbations a été proposé dans [26]. Dans [14], un FTSMC (A fast terminal sliding mode control) a été présenté dans le but de contrôler le suivi d'attitude/position en temps fini d'un quadrotor sous incertitude du modèle et perturbation externe. Une commande par mode glissant avec une surface de commutation non linéaire assurant une convergence rapide (Fast Terminal Sliding mode control FTSMC) a été suggéré dans [27] pour éviter les singularités et réaliser le contrôle de suivi d'un quadrotor avec des défauts d'actionneur. Une commande par mode glissant avec une surface de commutation non linéaire assurant une convergence rapide (Fast Terminal Sliding mode control FTSMC) robuste a été conçu dans [28] pour le contrôle de suivi d'attitude et de déplacement d'un quadrotor soumis à des erreurs de modélisation inconnues.

Dans [29], un contrôleur backstepping a été proposé pour contrôler l'altitude et l'attitude d'un drone de type quadrotor. La validité du contrôleur a été assurée par une fonction Lyapunov, et les résultats de simulation ont montré une réponse transitoire et de suivi de haute précision. Dans [30], un contrôleur backstepping pour le suivi d'un quadrotor basé sur une approche de réseau de neurone a été proposé en présence d'incertitudes. Un contrôleur non linéaire combinant la technique de contrôle par mode glissant pour le sous-système d'attitude (boucle interne) et la technique de backstepping pour la boucle de position jusqu'à ce que les attitudes souhaitées soient obtenues a été proposé dans [31]. De plus, un système adaptatif d'estimation des fautes basé sur un

observateur a été envisagé pour le mode décollage. Des simulations ont été réalisées pour démontrer l'efficacité du contrôleur non linéaire robuste conçu et du schéma d'estimation des pannes.

L'un des problèmes liés au contrôle d'un système dynamique est la gestion des contraintes. Divers outils ont été développés à cet effet, notamment des outils pour les systèmes non linéaires. Récemment, des fonctions de Lyapunov avec barrière (BLF) ont été proposées pour gérer les contraintes, pilotées par la technique d'adaptation de la fonction de Lyapunov en fonction des exigences du problème. Afin de résoudre les problèmes mentionnés ci-dessus, diverses approches de contrôle ont été proposées. Dans [32], une méthode de contrôle basée sur BLF prenant en compte les contraintes de sortie a été présentée pour un quadrotor, et une performance de suivi satisfaisante a été obtenue en régime permanent. Un contrôle backstepping en temps fini basé sur BLF d'un quadrotor avec des contraintes d'état complètes a été considéré dans [33]. Pour éviter la violation de contraintes, [10] a utilisé un BLF, s'adapte à l'infini lorsque ses arguments approchent des limites souhaitées. Dans [34] et [35], un contrôleur non linéaire a été conçu pour satisfaire les contraintes des systèmes non linéaires incertains, dans lesquels l'entrée du système en boucle fermée est le signal de référence, et la modification du signal de référence ne viole pas l'état et les contraintes de contrôle. Dans [36], un contrôle backstepping robuste basé sur BLF a été appliqué aux MUAV (Mid-altitude Unmanned Air Vehicle) pour contrer les perturbations externes. La stabilisation en temps fini utilisant BLF a été obtenue dans [37] en présence d'incertitudes paramétriques. Le BLF intégral a été utilisé conjointement avec

le backstepping et le contrôle basé sur la vision dans [38] pour restreindre les mouvements d'attitude drastiques. Dans [39], le backstepping basé sur BLF a été implémenté sur un quadrotor et ses performances comparées à un PID et à un contrôleur de mode glissant (SMC). Certains développements récents ont été réalisés dans la conception de SMC pour les systèmes à sortie limitée. Un SMC du second ordre pour un système contraint en sortie sous perturbations externes a été développé dans [40].

Le travail présenté dans ce mémoire est motivé par le contrôle du Parrot Mambo (Figure 1.12). Les minidrones PARROT sont des systèmes dynamiques ultra-compacts, dotés de quatre hélices qui en font un quadricoptère. Ils peuvent être contrôlés à partir d'un smartphone ou d'une tablette. Ils peuvent être très stables grâce au pilote automatique. Ils peuvent combiner des signaux de gyroscopes à 3 axes et d'accéléromètres à 3 axes, un capteur de pression pour l'altitude de vol, un capteur à ultrasons pour un vol de précision près du sol et une caméra orientée vers le bas pouvant être utilisée pour le traitement du flux optique et des images. Les caractéristiques principales du véhicule sont:

- Poids : 0.63 kg
- Trois axes de symétrie.
- Propulsion et Énergie : 4 propulseurs.

## 1.7 Problématique et contribution de mémoire

La commande d'un drone pour suivre une trajectoire de référence est une application pratique et intéressante de la commande de systèmes non linéaires. Cette tâche peut être



**Figure 1.12:** Parrot Mambo [1].

utile dans de nombreuses situations, telles que la surveillance aérienne, la cartographie, la photographie aérienne, la livraison de colis, etc.

Le suivi de trajectoire de référence peut être un défi pour les drones en raison de la présence de perturbations telles que le vent, les turbulences, les changements de température, etc. De plus, les drones peuvent avoir des comportements non linéaires, ce qui rend la tâche de commande plus complexe.

Cependant, la commande de drones pour suivre une trajectoire de référence peut être réalisée en utilisant des techniques de commande avancées telles que la commande prédictive, la commande adaptative, etc. Ces méthodes permettent de prendre en compte les perturbations et les non-linéarités du système pour atteindre une performance de suivi de trajectoire de référence satisfaisante.

En fin de compte, la commande d'un drone pour suivre une trajectoire de référence peut être un défi passionnant pour les ingénieurs en contrôle et les chercheurs en robotique, et peut avoir des applications pratiques dans divers domaines.

Dans notre travail, la loi de commande proposée est une commande basée sur les fonctions de Lyapunov avec barrière qui assure la poursuite de trajectoire de référence et respecte les différentes contraintes liées au modèle du drone. Ensuite, on va élargir l'utilisation de cette approche pour étudier la robustesse et surmonter le problème des incertitudes paramétriques. Cette approche estime les paramètres inconnus et garantit leur convergence vers leurs valeurs respectives sans affecter le bon fonctionnement du système.

## **1.8 Objectifs de mémoire**

### **1.8.1 Objectif général**

L'objectif général est la construction d'une loi de commande pour la poursuite de trajectoire d'un drone et la conception d'un algorithme qui permettra de guider le drone le long d'une trajectoire de référence avec une grande précision, en prenant en compte les perturbations externes et les caractéristiques du drone. Cette loi de commande doit être conçue de manière à respecter les contraintes physiques du drone et à garantir un suivi de trajectoire satisfaisant.

### **1.8.2 Objectifs spécifiques**

1. La conception des lois de commandes non linéaires basée sur les fonctions de Lyapunov avec barrière symétrique et asymétrique;
2. Étude de robustesse des lois de commandes élaborées, en ajoutant des termes de perturbations externes;

3. La conception des lois de commandes adaptatives basées sur les fonctions de Lyapunov avec barrière symétrique et asymétrique dans le cas où les paramètres du système sont inconnus;
4. La validation des performances des lois de commandes élaborées par des simulations numérique via MATLAB/Simulink.

## 1.9 Organisation du document

Afin d'étudier l'autonomie du quadrotor, on décline la mémoire en trois problématiques à savoir : paramétrisation du système (repères, paramètres géométriques fixes et variables) mise en équation de différents modèles conduisant à une étude cinématique et dynamique, une mise en état des équations pour la commande de poursuite de trajectoire. Ainsi, Ce manuscrit comporte les chapitres suivants :

1. Le premier chapitre qui décrit quelques généralités sur les drones et leurs déploiements, cette partie présente aussi le cadre de travail et les objectifs de cette mémoire.
2. Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux sur la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques pour que ce manuscrit puisse être lu avec une certaine autonomie.
3. Dans, le troisième chapitre, on présente une étude cinématique qui permet d'étudier le mouvement par rapport à un repère de référence, en fonction du temps indépendamment des causes qui les produisent. Elle a pour but de préciser les trajectoires

et les horaires, ainsi une étude dynamique sera effectuée, permettant d'étudier les causes physiques qui provoquent le mouvement.

4. Dans le quatrième chapitre qui s'intitule "Commande basée sur les fonctions avec barrière pour la poursuite de trajectoire d'un quadrotor", on met en adéquation le modèle global (cinématique et dynamique) pour la commande où on distingue les quatre entrées de commande et les 12 variables d'état à stabiliser (système sous-actionné). En se basant sur la théorie de Lyapunov et les propriétés des fonctions avec barrière, nous proposons une commande non linéaire pour la poursuite de trajectoire de référence du drone. Nous étudions aussi dans ce chapitre la robustesse de la commande par rapport aux perturbations interne et externe.

Le travail est achevé par une conclusion et quelques perspectives.

## **1.10 Conclusion**

Dans ce premier chapitre, nous avons introduit le sujet des engins volants en particulier les drones par un bref historique et un état de l'art des véhicules déjà construits, ainsi que leurs applications. Nous avons décrit brièvement les commandes exposées dans la littérature relative à ces engins. Dans le chapitre suivant on va aborder le domaine de modélisation des drones, par l'étude d'un drone de type quadrotor appelé Parrot Mambo.

# Chapter 2

## Introduction à la théorie de la stabilité asymptotique

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux pour que ce manuscrit puisse être lu avec une certaine autonomie. Dans la section 2.2 on présentera des résultats d'existence et d'unicité des solutions reliées aux équations différentielles ordinaires, ce qui nous a permis de définir précisément la notion de stabilité asymptotique. Dans les sections 2.3 et 2.4 nous allons rappeler brièvement la théorie de stabilité, de stabilité asymptotique et de stabilité exponentielle ainsi que leurs méthodes d'étude. Puis, dans la section 2.5 les notions de fonctions avec barrière et leurs utilisations pour les problèmes de stabilité, de contrôle et de stabilisation sont abordées.

## 2.2 Equations différentielles et stabilité

### 2.2.1 Equations différentielles

On rappelle dans cette section quelques résultats sur les équations différentielles ordinaires [42].

On appelle équation différentielle ordinaire, l'équation

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \tag{2.1}$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  et  $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une application continue sur  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.1** *On appelle trajectoire de (2.1), toute application*

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto x(t),$$

dérivable sur un intervalle non vide  $I \subset [0, +\infty)$  telle que pour tout  $t \in I$ ,

$$\dot{x} = f(t, x(t)).$$

**Définition 2.2** *Une trajectoire  $y : J \subset [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de (2.1) est appelée prolongement d'une trajectoire  $x : I \subset J \longrightarrow \mathbb{R}^n$  si  $\forall t \in I, x(t) = y(t)$ .*

**Définition 2.3** *On appelle trajectoire maximale toute trajectoire qui n'admet pas de prolongement sur un intervalle plus grand.*

Le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Peano, donne une condition suffisante pour l'existence d'une solution de (2.1):

**Théorème 2.4** *Soit une application  $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  continue sur  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ , alors pour toute paire  $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ , il existe au moins une solution:  $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de (2.1), telle que  $x(t_0) = x_0$ , où  $I \subset [0, +\infty)$  est un intervalle contenant  $t_0$  et ouvert dans  $[0, +\infty)$ .*

Lorsque l'application  $f$  est de plus localement Lipchitzienne, on a de plus l'unicité de la solution:

**Théorème 2.5 (Cauchy-Lipchitz)** *Soit une application  $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  continue et localement Lipchitzienne en  $x$ . Alors à tout point  $(t_0, x_0)$  est associée une et une seule solution maximale  $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , telle que  $x(t_0) = x_0$ .*

## 2.2.2 Stabilité asymptotique

On considère le système non commandé

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.2}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t, 0) = 0.$$

Si l'application  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire pour les systèmes de la forme,

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.3}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f(0) = 0$ , le système est dit stationnaire.

Dans (2.2) et (2.3), l'application  $f$  est supposée seulement continue. Ainsi l'unicité des solutions du problème passant par  $(t_0, x_0)$  n'est pas assurée.

Dans la suite on désignera par  $x(t, x_0, t_0)$  une solution de (2.2) vérifiant  $x(t_0) = x_0$ .

$x(\cdot, x_0, t_0)$  désignera toutes les trajectoires de (2.2) passant par  $(t_0, x_0)$ . Les définitions suivantes sont valables pour les systèmes de la forme (2.2) ou (2.3).

Lorsque le système est autonome, la notion d'uniformité n'est pas évoquée.

**Définition 2.6 (Stabilité uniforme au sens de Lyapunov)** *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (2.2) est dit uniformément stable (au sens de Lyapunov) si:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t_0 \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \forall x(\cdot, x_0, t_0), \forall t \geq t_0, |x(t, x_0, t_0)| < \epsilon.$$

**Définition 2.7 (Attractivité)** *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (2.2) est dit:*

1. *localement uniformément attractif sur un voisinage  $O$  de l'origine si:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t_0 > 0, \exists \tau \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \forall x(\cdot, x_0, t_0), \forall t \geq t_0 + \tau, |x(t, x_0, t_0)| < \epsilon.$$

et  $O \subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < \eta\}$ ,

2. globalement uniformément attractif si

$$\forall \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall t_0 > 0, \exists \tau \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$|x_0| < \eta \Rightarrow \forall x(\cdot, x_0, t_0), \forall t \geq t_0 + \tau, |x(t, x_0, t_0)| < \epsilon.$$

**Définition 2.8 (Stabilité asymptotique)** *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (2.2) est dit localement uniformément asymptotiquement stable sur un voisinage  $O$  de l'origine (resp. globalement uniformément asymptotiquement stable), s'il est uniformément stable et localement attractif sur  $O$  (resp. globalement uniformément attractif).*

Dans un but de simplification, nous emploierons l'expression "asymptotiquement stable" à la place de "uniformément asymptotiquement stable". Lorsque le caractère local ou global ne sera pas précisé, il s'agira toujours de stabilité asymptotique globale.

## 2.3 Méthodes d'étude de la stabilité asymptotique

De nombreuses méthodes ont été développées pour étudier la notion de stabilité au sens de Lyapunov. Il existe différents critères pour décider si un système non commandé est asymptotiquement stable (linéarisation, formes normales de Poincaré, variété centre, ...). L'ouvrage de Khalil [44] et de Isidori [43] présentent des panoramas complets de ces méthodes.

### 2.3.1 Méthode de Lyapunov

Pour étudier la stabilité des systèmes non commandés, la première méthode de Lyapunov est basée sur les propriétés du "linéarisé tangent". La stabilité asymptotique du linéarisé permet de conclure à la stabilité asymptotique locale (sur un voisinage  $O$  de 0) du système initial, sans toutefois nous renseigner sur des domaines de stabilité. La seconde méthode de Lyapunov, appelée aussi méthode directe de Lyapunov, permet de définir des domaines de l'espace d'état où la convergence des trajectoires vers un équilibre est garantie.

**Définition 2.9 (Fonction candidate à Lyapunov)** *Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite candidate à Lyapunov stationnaire si elle vérifie les propriétés suivantes:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, a(|x|) \leq V(x) \leq b(|x|),$$

où  $a, b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  sont des fonctions strictement croissantes, s'annulant en 0 et telles que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} a(|x|) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} b(|x|) = +\infty.$$

**Définition 2.10 (Fonction de Lyapunov)** *Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continûment différentiable est une fonction de Lyapunov stationnaire pour le système (2.3), si elle est candidate à Lyapunov stationnaire et elle vérifie,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0.$$

**Définition 2.11 (Fonction de Lyapunov au sens large)** *Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con-*

tinûment différentiable est une fonction de Lyapunov au sens large stationnaire pour le système (2.3), si elle est candidate à Lyapunov stationnaire et elle vérifie,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0.$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour la stabilité asymptotique.

**Théorème 2.12 (Méthode directe de Lyapunov)**

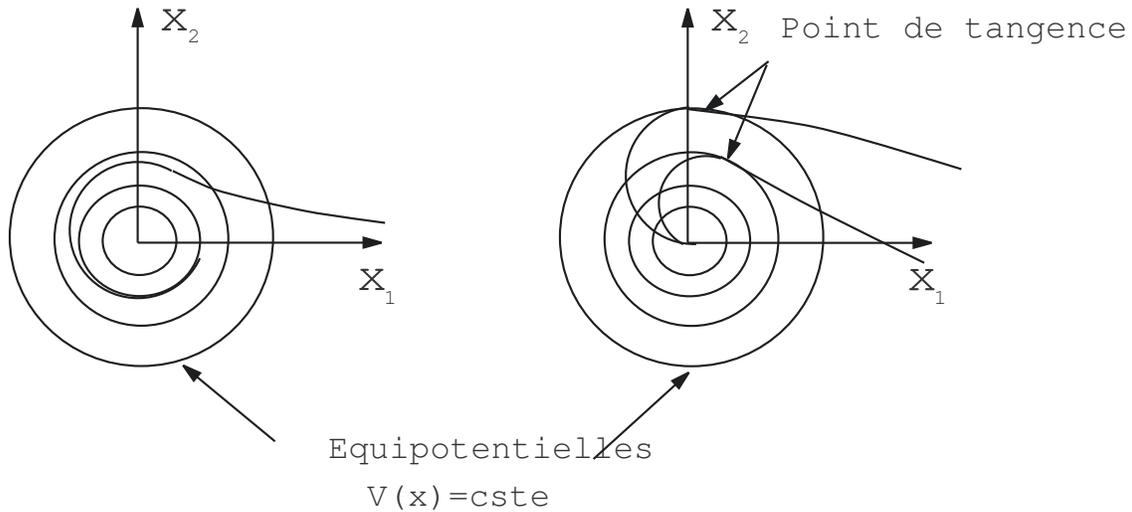
*S'il existe une fonction de Lyapunov stationnaire, sur un voisinage  $O$  de l'origine pour le système (2.3), alors l'origine est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable sur le plus grand ensemble*

$$\{x \in \mathbb{R}^n, V(x) < \alpha\}$$

*qui soit inclus dans  $O$ .*

*Si de plus  $O = \mathbb{R}^n$  alors la stabilité est globale.*

La méthode directe de Lyapunov nécessite la recherche d'une fonction  $V$  candidate à Lyapunov telle que sa dérivée le long des trajectoires soit strictement négative sur un voisinage épointé du point d'équilibre. Géométriquement, ceci correspond à obtenir une fonction candidate à Lyapunov telle que les trajectoires solutions de l'équation différentielle (2.3) soient transverses aux équipotentielles  $V(x) = cste$  (voir Figure 2.1). Cependant, il est clair qu'un point d'équilibre peut être localement ou globalement asymptotiquement stable sans qu'une fonction de Lyapunov soit évidente à priori. De plus d'un point de vue conceptuel, il est intéressant de noter, d'après les théorèmes de Lyapunov inverses [43, 45], que l'existence d'une fonction de Lyapunov est non seulement une condition suffisante



**Figure 2.1:** Méthode de Lyapunov

mais elle est aussi nécessaire pour qu'il y ait stabilité asymptotique.

Le théorème de Kurzweil présente l'un des résultats existant dans la littérature.

**Théorème 2.13** [43, 44, 45] *On considère le système (2.3). Le point d'équilibre  $x = 0$  du système  $\dot{x} = f(x)$  est globalement asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  qui soit candidate à Lyapunov stationnaire et qui vérifie:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0.$$

### 2.3.2 Principe d'invariance de LaSalle

Il arrive dans certains cas où on ne parvient pas à obtenir une fonction de Lyapunov au sens large (voir définition 2.11) pour le système stationnaire (2.3).

On définit alors  $Q$  par:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = 0\}.$$

Si  $Q$  est réduit à  $\{0\}$ , alors la méthode directe de Lyapunov permet de conclure.

Si  $Q$  contient d'autres points, il existe un autre résultat connu sous le nom de principe d'invariance de LaSalle.

**Théorème 2.14 (Principe de l'invariance de LaSalle)** *Considérons le système défini par (2.3). Supposons qu'on ait obtenu une fonction  $V$  de Lyapunov au sens large. Alors toute solution bornée converge vers  $I$  le plus grand ensemble  $f$ -invariant inclus dans  $Q$ . Si de plus  $I$  est réduit  $\{0\}$ , alors  $x = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.3).*

La figure 2.1 illustre bien deux types de comportement possible. En effet soit les trajectoires restent dans un ensemble sur lequel  $\dot{V} = 0$ , dans ce cas on a comportement cycle limite (c'est le cas de la figure de gauche). Soit  $\dot{V}$  ne s'annule que sur des points isolés des trajectoires. Dans ce cas les trajectoires sont tangentes aux équipotentielles en ces points, mais le point d'équilibre  $x = 0$  est asymptotiquement stable (c'est le cas de la figure de droite)

Ce théorème nous permet dans certains cas d'aboutir à la stabilité asymptotique. En effet, il suffit d'obtenir une fonction  $V$  candidate de Lyapunov, telle que sa dérivée le long des trajectoires solutions de (2.3) soit négative ou nulle; et de montrer que la seule trajectoire qui reste dans  $I$  est la trajectoire identiquement nulle.

## 2.4 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous rappelons la définition de la stabilité exponentielle et quelques propriétés.

**Définition 2.15** [44] *L'origine du système dynamique (2.3) est dit localement exponentiellement stable s'il existe des constantes positive  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $r > 0$  telles que pour  $x(0) \in B(0, r)$ , toutes les solutions satisfont:*

$$|x(t)| \leq \gamma_1 |x(0)| e^{-\gamma_2 t}.$$

*Le réel  $\gamma_2 > 0$  est dit vitesse de la convergence ou exposant de la stabilisation.*

*L'origine du système dynamique (2.3) est dit globalement exponentiellement stable, si l'inégalité précédente est vraie pour tout  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ .*

Le théorème suivant donne un résultat de stabilité asymptotique si le système est exponentiellement stable.

**Théorème 2.16** [44] *Si le système (2.3) est exponentiellement stable, alors il est asymptotiquement stable.*

La réciproque est fautive comme le montre l'exemple  $\dot{x} = -x^3$ .

Le théorème suivant donne une stabilité exponentielle du système (2.3) à partir d'une information sur son linéarisé, plus précisément on a:

**Théorème 2.17** [44]

1. Si le linéarisé du système (2.3) est exponentiellement stable, alors le système (2.3) est localement exponentiellement stable.
2. Si le système (2.3) est exponentiellement stable, alors son linéarisé est asymptotiquement stable.
3. Le système (2.3) et son linéarisé ont la même vitesse de décroissance.

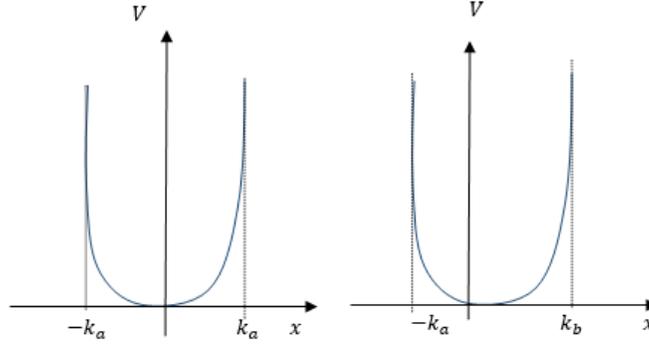
## 2.5 Fonction de Lyapunov avec barrière (BLF)

**Définition 2.18** [47] Une fonction de Lyapunov avec barrière est une fonction scalaire  $V(x)$ , définie par rapport au système  $\dot{x} = f(x, t)$  sur une région ouverte  $\Omega$  contenant l'origine, c'est-à-dire continue et définie positive, a des dérivées partielles continues du premier ordre en tout point de  $\Omega$ , a la propriété  $V(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x$  s'approche de la frontière de  $\Omega$ , et satisfait  $V(x(t)) \leq b, \forall t \geq 0$ , le long de la solution de  $\dot{x} = f(x, t)$  pour  $x(0) \in \Omega$  et  $b$  une constante positive.

Une fonction avec barrière peut être symétrique ou asymétrique selon le caractère de délimitation, qui est illustré à la figure 2.2.

**Hypothèse 2.1** [47] : Pour tout  $k_{c1} > 0$ , il existe des constantes positives  $Y_1, Y_2, \underline{Y}_0$  et  $\bar{Y}_0$  satisfaisant  $\max\{\underline{Y}_0, \bar{Y}_0\} < k_{c1}$ , tel que la trajectoire souhaitée  $y_d(t)$  et ses dérivées temporelles satisfont  $-\underline{Y}_0 \leq y_d(t) \leq \bar{Y}_0$  et  $|\dot{y}_d(t)| \leq Y_1, |\ddot{y}_d(t)| \leq Y_2, \forall t \geq 0$ .

**Théorème 2.19** [47] : Pour toute constante positive  $k_{a1}, k_{b1}$  soit  $\chi_1 = \{x_1 \in \mathbf{R}, k_{a1} < x_1 < k_{b1}\} \subset \mathbf{R}$  et  $\mathbf{N} := \mathbf{R}^l \times \chi_1 \subset \mathbf{R}^{l+1}$  sont des ensembles ouverts. Considérons le



**Figure 2.2:** Symétrique (à droite) et asymétrique (à gauche) fonction de Lyapunov avec barrière

ystème

$$\dot{\eta} = h(\eta, t)$$

où  $\eta = [\omega, x_1] \in \mathbf{N}$ , et  $h : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^{l+1}$  est continu par morceaux par rapport à  $t$  et localement Lipschitz par rapport à  $\eta$ , uniformément par rapport à  $t$ , sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{N}$ . Supposons qu'il existe des fonctions  $U : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}_+$  et  $V_1 : \chi_1 \rightarrow \mathbf{R}_+$  continûment différentiables et définies positives dans leurs domaines respectifs, tels que

$$V_1(x_1) \rightarrow \infty \text{ quand } x_1 \rightarrow -k_{a_1} \text{ ou } x_1 \rightarrow k_{b_1},$$

$$\gamma_1(\|\omega\|) \leq U(\omega) \leq \gamma_2(\|\omega\|)$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des fonctions de classe  $\mathbb{K}^\infty$ . Soit

$$V(\eta) = V_1(x_1) + U(\omega)$$

et  $x_1(0) \in \chi_1$ . Si l'inégalité

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \eta} h \leq -cV + b$$

est valable dans l'ensemble  $\eta \in \mathbf{N}$  et  $c, b$  sont des constantes positives, alors  $x_1(t)$  reste dans l'ensemble ouvert  $\chi_1, \forall t \in [0, \infty[$ .

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé la notion des points d'équilibre d'un système, la notion de stabilité et la stabilisation au sens de Lyapunov et finalement les propriétés des fonctions avec barrière. Dans la suite de ce mémoire, nous allons appliquer la technique de backstepping basée sur les fonctions de Lyapunov avec barrière dans la construction des lois de commande afin de poursuivre une trajectoire de référence pour un drone de type quadrotor.

# Chapter 3

## Modélisation du drone

### 3.1 Introduction

La modélisation nécessite la paramétrisation du système et la mise en place des différentes variables décrivant la position de l'engin dans son espace. Les notions telles que le repère local, repère global, centre de masse, centre de flottabilité..., seront définies pour faciliter la mise en état de la cinématique et de la dynamique du quadrotor. En général, l'approche newtonienne et celle lagrangienne sont couramment utilisées. La première met en exergue la relation entre les forces et les variables généralisées et la seconde se base sur une étude énergétique, par conséquent, nécessite le calcul de l'énergie mécanique du système. L'approche newtonienne est montrée efficace dans le calcul des forces intermédiaires et celle de Lagrange dans l'identification paramétrique, car, les énergies sont indépendantes des accélérations généralisées. Nous allons faire appel à une description newtonienne pour

mieux mettre en avant les différentes forces et moments mises en jeu, ainsi que l'impact de l'architecture sur la représentation du modèle. Les forces et les moments permettant d'établir les mouvements du drone sont d'origines diverses et variées. Elles seront décrites et détaillées tout au long de ce chapitre.

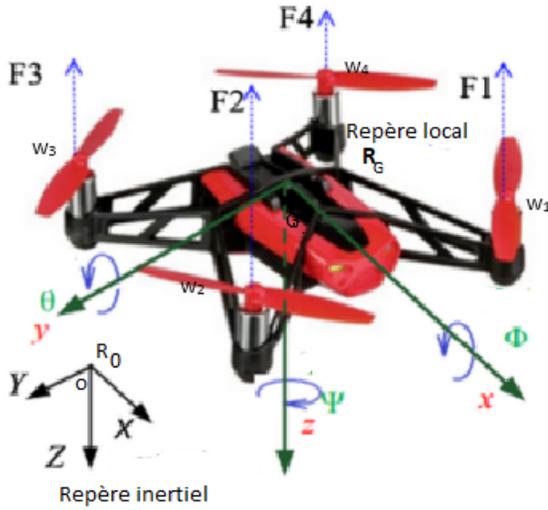
## 3.2 Modèle cinématique

### 3.2.1 Repères associés

La modélisation nécessite l'étape de définir des référentiels par rapport auxquels on décrira l'évolution de l'engin. Pour établir les équations décrivant le mouvement d'un drone de type quadrotor dans l'espace euclidien à trois dimensions, on utilise deux repères [1]. Le premier est le repère inertiel global  $R_0 = (O, X, Y, Z)$  de référence. Ce repère global  $R_0$  étant lié à la terre, sera considéré comme Galiléen et il est orienté comme suit (voir figure 3.1) :  $X$ : dirigé vers le nord ,  $Y$ : dirigé vers l'Est,  $Z$ : dirigé vers le bas. Son origine  $O$  sera choisie arbitrairement et pourra être par exemple la position initiale du quadrotor.

Ensuite un repère local, ayant comme origine le centre de gravité du quadrotor  $G$  est défini à savoir:

-Le repère lié au quadrotor,  $R_G = (G, x, y, z)$ , appelé aussi repère mobile (voir figure 3.1), dont les axes sont choisis de la manière suivante:  $x$  l'axe longitudinal,  $y$  l'axe transversal,  $z$  l'axe normal au plan  $(x, y)$ .



**Figure 3.1:** Parrot Mambo [1].

### 3.2.2 Paramétrisation

Le mouvement de l'engin est décrit par les paramètres suivants:

- On note  $\eta = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$  le vecteur d'état représentant la position et l'orientation du drone dans le repère terrestre  $R_0$ .
- Les coordonnées  $x, y$  et  $z$ , exprimées en mètres, représentent la position du centre du repère  $R_G$  dans le repère  $R_0$ . On note  $\eta_1 = [x, y, z]^T$  le vecteur de position du centre de gravité du quadrotor par rapport au repère fixe  $R_0$  exprimé dans le repère fixe  $R_0$ .
- Les angles  $\phi, \theta$  et  $\psi$ , exprimés en radians, sont les angles qui indiquent l'orientation du repère  $R_G$  par rapport au repère  $R_0$ . Communément appelés angles d'Euler

dans la littérature internationale. Ces angles  $(\phi, \theta, \psi)$  sont nommés respectivement roulis (ou gîte), tangage (ou assiette) et lacet (ou cap). On note  $\eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^T$  qui représente l'attitude du quadrotor par rapport au repère fixe  $R_0$  exprimé dans le repère fixe  $R_0$ .

- On note  $\nu = [u, v, w, p, q, r]^T$  le vecteur qui rassemble les vitesses linéaires et angulaires dans le repère  $R_G$  lié au drone.
- Les vitesses  $u, v$  et  $w$ , exprimées en  $m/s$ , correspondent aux vitesses selon les axes  $Gx, Gy$  et  $Gz$  du véhicule et sont appelées respectivement vitesse longitudinale (surge), vitesse ou dérive transversale (sway) et vitesse de pilonnement (heave). On note  $\nu_1 = [u, v, w]^T$  le vecteur vitesse local de translation par rapport à  $R_0$  exprimé dans le repère local  $R_G$ .
- Les vitesses de rotation  $p, q$  et  $r$ , exprimées en  $rad/s$ , correspondent aux vitesses de rotation autour des axes  $Gx, Gy$  et  $Gz$ , c'est-à-dire les vitesses de roulis, tangage et lacet du véhicule respectivement. On note  $\nu_2 = [p, q, r]^T$  le vecteur vitesse local de rotation par rapport à  $R_0$  exprimé dans le repère local  $R_G$ .

### a) Définition des matrices de passage

La configuration de l'engin est décrite au moyen de trois rotations élémentaires définies par trois angles d'orientation à savoir le lacet  $\psi$ , le tangage  $\theta$  et le roulis  $\phi$ :

$$B(X, Y, Z) \xrightarrow{H_\psi} B(X_1, Y_1, Z) \xrightarrow{H_\theta} B(X_2, Y_1, Z_1) \xrightarrow{H_\phi} B(x, y, z) \quad (3.1)$$

Où  $B(X, Y, Z)$  est la base du repère global  $R_0$ ,  $B(x, y, z)$  la base du repère local  $R_G$ ,

$B(X_1, Y_1, Z)$  et  $B(X_2, Y_1, Z_1)$  sont les bases intermédiaires et  $H_\psi, H_\theta$  et  $H_\phi$  les matrices de rotation orthogonales.

La première rotation d'angle de lacet  $\psi$ , est comptée positivement dans le sens direct par rapport à  $Z$  (voir figure 3.1).

La matrice de passage est  $H_\psi$  entre la base  $B(X, Y, Z)$  et  $B(X_1, Y_1, Z)$ . Elle est représentée par l'expression suivante :

$$H_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (X_1, Y_1, Z)$$

La deuxième rotation d'angle  $\theta$  décrit le tangage autour de l'axe  $Y_1$  et donne la matrice de passage  $H_\theta$  entre les bases  $B(X_1, Y_1, Z)$  et  $B(x, Y_1, Z_1)$  donnée par:

$$H_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ dans la base } (x, Y_1, Z_1)$$

La troisième rotation d'angle de roulis  $\phi$  s'effectue autour de l'axe  $x$  donne la matrice

de passage  $H_\phi$  entre les bases  $B(x, Y_1, Z_1)$  et  $B(x, y, z)$  donnée par:

$$H_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \text{ dans la base } (x, Y_1, Z_1)$$

La matrice de rotation qui décrit la transformation entre le repère global  $R_0$  et le repère local  $R_G$  est donnée par:

$$J_1 = J_1(\eta_2) = H_\psi H_\theta H_\phi$$

par conséquent:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & -\sin(\psi)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\psi) + \sin(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\psi)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\psi)\sin(\phi) & -\cos(\psi)\sin(\phi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

telle que

$$J_1(\eta_2)^T J_1(\eta_2) = J_1(\eta_2) J_1(\eta_2)^T = I_3$$

### b) Transformation des vitesses de translation et de rotation

A l'aide de la matrice de passage de changement de base  $J_1(\eta_2)$ , la transformation des composantes des vitesses de translation, par rapport à  $R_0$  est donnée par:

$$\dot{\eta}_1 = J_1(\eta_2)\nu_1 \quad (3.3)$$

La paramétrisation en lacet, tangage et roulis, permet d'écrire le vecteur vitesse angulaire  $\nu_2 = [p, q, r]^T$  du quadrotor par rapport au repère terrestre  $R_0$  exprimé dans le repère du quadrotor  $R_G$ , de la manière suivante :

$$\nu_2 = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}Y_1 + \dot{\phi}x \quad (3.4)$$

Dans le but d'exprimer  $\nu_2$  dans le repère  $R_G$ , on va commencer par l'écriture des expressions des vecteurs  $Z$  et  $Y_1$  dans  $R_G$ . D'après la matrice de passage  $H_\theta$  entre les bases  $B(X_1, Y_1, Z)$  et  $B(x, Y_1, Z_1)$

$$Z = \cos \theta Z_1 - \sin \theta x$$

De même d'après la matrice de passage  $H_\phi$  on a :

$$Y_1 = \cos \phi y - \sin \phi z$$

$$Z_1 = \cos \phi z + \sin \phi y.$$

On peut alors exprimer le vecteur vitesse de rotation dans la base du repère mobile  $B(x, y, z)$  ainsi:

$$\nu_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

d'où:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

On désigne par  $J_2 = J_2(\eta_2)$  la matrice de passage reliant les composantes des vitesses de rotation dans le repère global à celles relatives au repère local. Soit:

$$J_2 = J_2(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

D'où la deuxième relation cinématique:

$$\dot{\eta}_2 = J_2(\eta_2)\nu_2 \quad (3.8)$$

**Remarque 3.1** *Il est à noter que la paramétrisation en tangage fait apparaître une singularité en  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Cette paramétrisation est inaccessible car grâce aux phénomènes aérostatiques, aérodynamique et à la propulsion, il est impossible pour le drone d'avoir un angle de tangage égale à  $90^\circ$ .*

### c) Equation de la cinématique

A l'aide des équations (3.3) et (3.8), la cinématique du quadrotor peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_1(\eta_2) & 0_{3*3} \\ 0_{3*3} & J_2(\eta_2) \end{pmatrix}}_{J(\eta_2)} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.3 Modèle dynamique

Tout corps mécanique évoluant en temps continu peut être décrit par un système d'équations différentielles régissant sa dynamique. Dans cette section, nous déterminons le modèle dynamique du drone de type quadrotor à quatre hélices. Pour atteindre ce but, nous avons recours à des études mécaniques telles que l'approche Newtonnienne et celle d'Euler-Lagrange.

#### 3.3.1 Dynamique d'accélération

D'après la deuxième loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(mV)}{dt} = \sum F_{ext} \quad (3.10)$$

La vitesse exprimée dans le repère inertiel est :

$$\frac{d(mV)}{dt} = m\dot{V} \quad (3.11)$$

avec  $V = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  : Vecteur de vitesses de translation de la plateforme exprimée dans  $R_0$  .

Les forces extérieures appliquées sur le quadrotor sont :

1. La force de gravité notée

$$P = m * g$$

2. La force de portance:

$$F_p = \sum_{i=1}^4 f_i$$

$f_i$  est la force produite par la rotation de l'hélice  $i$ . Cette force est proportionnelle au carré

de la vitesse de rotation des moteurs, elle est donnée par :

$$f_i = b\omega_i^2$$

avec

- $b$  : est le coefficient de poussée qui dépend des propriétés aérodynamiques.
- $\omega_i$  est la vitesse de rotation du moteur  $i$ .

3. Les forces de trainée:

$$F_t = k\omega_i^2$$

avec  $k$  :coefficient de trainée (drag).

En remplaçant les différentes forces dans l'équation 3.10 on obtient :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{F_p}{m} \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\theta s\phi c\psi - s\psi c\phi & s\theta c\phi c\psi + s\psi s\phi \\ c\theta s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\psi c\phi & s\theta c\phi s\psi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.3.2 Dynamique de rotation

D'après la deuxième loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = \sum \tau_{ext} \quad (3.13)$$

Et comme la vitesse angulaire est exprimée dans le repère lié au quadrotor, alors :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = J\dot{\Omega} + \Omega \times J\Omega \quad (3.14)$$

avec  $\Omega = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$

- $\Omega$ : est le vecteur de vitesses de rotation du quadrotor exprimé dans le repère  $R_G$  (lié à la plateforme) défini en fonction des variations des angles roulis, tangage et lacet  $(\phi, \theta, \psi)$  et décrit dans le repère inertiel.
- $J$ : est la matrice d'inertie. Comme la structure du quadrotor est supposée symétrique, la matrice d'inertie  $J$  est diagonale :

$$J = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Les couples extérieurs sont :

- Les couples aérodynamiques : Les couples aérodynamiques sont donnés par les rotations d'angles d'Euler, ils sont notés

$$\tau_a = \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix}$$

avec  $\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$  est le couple de rotation d'angle  $\phi, \theta$  et  $\psi$ , respectivement.

- Le moment gyroscope: aux mouvements du quadrirotor. L'expression générale de ce moment est donnée par :

$$\begin{aligned}
\tau_g &= \sum_{i=1}^4 \Omega \times J_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^{i+1} \omega_i \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^4 ((-1)^{i+1} \omega_i J_r) \Omega \Lambda e_z \\
&= \begin{pmatrix} -J_r \dot{\theta} (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \\ J_r \dot{\phi} (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_r \dot{\theta} \omega_r \\ J_r \dot{\phi} \omega_r \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec

- $J_r$  est la matrice d'inertie du rotor.
- $\omega_r = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4$  est la vitesse de rotation du quadrirotor dans le repère locale.

D'après les équations (3.13) et (3.14) on peut écrire :

$$J\dot{\Omega} + \Omega \Lambda J \Omega = \tau_a + \tau_g \quad (3.15)$$

Après les développements on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (I_{xx} - I_{yy}) \theta \psi \\ (I_{xx} - I_{zz}) \phi \psi \\ (I_{yy} - I_{xx}) \phi \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -J_r \dot{\theta} \omega_r \\ J_r \dot{\phi} \omega_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

En développant le système (3.10) et (3.13), la forme explicite traduisant les couples entre les variables d'accélération :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{1}{m}(s\theta c\psi c\phi + s\psi s\phi)U_1 \\
\ddot{y} &= \frac{1}{m}(s\theta s\psi s\phi - c\psi s\phi)U_1 \\
\ddot{z} &= \frac{1}{m}(mg - U_1 c\theta c\phi) \\
\ddot{\phi} &= \frac{1}{I_x}[(I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi} - J_r\dot{\theta}w_r + U_2] \\
\ddot{\theta} &= \frac{1}{I_y}[(I_z - I_x)\dot{\phi}\dot{\psi} + J_r\dot{\phi}w_r + U_3] \\
\ddot{\psi} &= \frac{1}{I_z}[(I_x - I_y)\dot{\theta}\dot{\phi} + U_4]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

avec

$$(U_1, U_2, U_3, U_4)^T = (F_p, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T$$

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre présente la construction complète du modèle dynamique du quadrotor. Moyenant le formalisme Newton-Euler les relations entre les forces et les variables généralisées ont été établies par rapport au référentiel terrestre mais qui sont exprimées dans le repère local. Ces équations de la dynamique incluent des études sur des phénomènes aérodynamiques tels que les frottements aérodynamiques ou encore la poussée d'Archimède. Les résultats de ce chapitre vont être exploités pour étudier des problèmes liés à la stabilité et à la stabilisation du drone.

# Chapter 4

## Commande basée sur des fonctions de Lyapunov avec barrière

### 4.1 Introduction

Tout phénomène physique qui évolue en temps continu, peut être décrit par des lois qui sont généralement modélisées par des équations différentielles. Lorsque ces lois dictent entièrement le comportement futur de ces systèmes à partir de son état présent, on parle de systèmes sans contrôles ou sans commandes. Pour obtenir le plus d'informations possible sur l'évolution future du système en temps fini ou à long terme, on introduira un paramètre appelé contrôle ; avec lequel on peut agir pour prédire son futur, on parle alors d'un système contrôlé. Diriger un satellite, commander un navire, piloter automatiquement un avion, maintenir un robot dans une position stable, faire déplacer un bac d'eau d'une position

à une autre,..., sont des exemples de problèmes de contrôles. Dans le même contexte on cherche dans ce chapitre des lois de commande non linéaire, robustes et adaptatives afin de poursuivre une trajectoire de référence d'un drone de type quadrotor. Et à la fin, la performance de cette loi robuste sera illustrée par les résultats de simulations à l'aide du Matlab/Simulink.

## **4.2 Commande non linéaire pour la poursuite de trajectoire d'un quadrotor**

Les systèmes non linéaires peuvent être difficiles à contrôler car ils peuvent avoir des comportements imprévisibles et instables. Pour les commander, on peut utiliser des fonctions de commande qui utilisent des barrières pour limiter les comportements indésirables. Les barrières sont des limites qui sont imposées sur les variables de sortie du système. Elles peuvent être utilisées pour limiter les valeurs extrêmes ou pour empêcher les sorties de certaines zones de l'espace d'état. Dans cette section, nous allons développer des lois de commande pour la poursuite d'une trajectoire de référence d'un quadrotor en utilisant deux types de fonctions avec barrière symétrique et assymétrique.

### **4.2.1 Changement de variables et système d'erreurs**

On dit que le drone suit une trajectoire de référence lorsque la trajectoire réelle coïncide avec la trajectoire de référence souhaitée. Autrement, l'erreur entre la trajectoire réelle et la trajectoire imposée converge vers zéro ou un voisinage de zéro.

## Changement de variables

Considérant le modèle explicite du drone donné par le système (3.17), on pose le changement de variable suivant :

$$x_1 = \phi, x_2 = \dot{x}_1, x_3 = \theta, x_4 = \dot{x}_3, x_5 = \psi, x_6 = \dot{x}_5,$$

$$x_7 = z, x_8 = \dot{x}_7, x_9 = x, x_{10} = \dot{x}_9, x_{11} = y, x_{12} = \dot{x}_{11}.$$

En utilisant ces nouvelles variables, le système (3.17) s'écrit sous la forme générale suivante

:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1x_4x_6 + a_3x_4w_r + b_1U_2 \\ x_4 \\ a_4x_2x_6 + a_6x_2w_r + b_2U_3 \\ x_6 \\ a_7x_2x_4 + b_3U_4 \\ x_8 \\ g - \frac{1}{m}cx_1cx_3U_1 \\ x_{10} \\ \frac{1}{m}U_xU_1 \\ x_{12} \\ \frac{1}{m}U_yU_1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

avec

- $u = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T$  le vecteur de la commande.

- $x = [x_1, \dots, x_{12}]^T$  est le vecteur d'état.

$$- f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + a_3 x_4 \omega_r \\ x_4 \\ a_4 x_2 x_6 + a_6 x_2 \omega_r \\ x_6 \\ a_7 x_2 x_4 \\ x_8 \\ g \\ x_{10} \\ 0 \\ x_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-cx_1 cx_3}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{U_x}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{U_y}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}, \quad a_3 = \frac{-J_r}{I_x}, \quad b_1 = \frac{1}{I_x}$$

$$a_4 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}, \quad a_6 = \frac{J_r}{I_y}, \quad b_2 = \frac{1}{I_y}$$

$$a_7 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z}, \quad b_3 = \frac{1}{I_z}, \quad b_4 = \frac{1}{m}$$

$$U_x = cx_1 s x_3 s x_5 - s x_1 c x_5, \quad U_y = c x_1 s x_3 c x_5 + s x_1 s x_5$$

De manière générale le système (4.1) s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} = f_i(x) + g_i(x)u_i, \quad \forall i \in 1, \dots, 6 \\ y_{2i-1} = x_{2i-1} \end{cases} \quad (4.2)$$

avec

- $x_{2i-1}$  est le vecteur de position et orientation.
- $x_{2i}$  est le vecteur de vitesse linéaire et angulaire.
- $y_{2i-1}$  est le vecteur de sortie.

### Système d'erreurs

L'étude du problème de suivi de trajectoires consiste tout d'abord à définir un système d'erreurs. On pose :

- Erreurs en orientations :  $e_{x_1} = x_1 - \phi_d$ ,  $e_{x_3} = x_3 - \theta_d$  et  $e_{x_5} = x_5 - \psi_d$ .
- Erreurs en positions :  $e_{x_7} = x_7 - z_d$ ,  $e_{x_9} = x_9 - x_d$ ,  $e_{x_{11}} = x_{11} - y_d$ .
- Erreurs en vitesses :  $e_{x_{2i}} = x_{2i} - \alpha_{2i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, 6$ . Les terme  $\alpha_{2i}$  des variables auxiliaires qui seront déterminées dans la suite.

En utilisant le système (4.2) et les nouvelles variables, on définit le système d'erreur suivant

:

$$\begin{cases} \dot{e}_{x_{2i-1}} = \dot{x}_{2i-1} - \dot{y}_{2i-1}^d \\ \dot{e}_{x_{2i}} = \dot{x}_{2i} - \dot{\alpha}_{2i} \end{cases} \quad (4.3)$$

avec  $y_{2i-1}^d = [\phi_d, \theta_d, \psi_d, z_d, x_d, y_d]^T$  la sortie désirée du système.

En remplaçant les expressions de  $\dot{x}_{2i-1}$  et  $\dot{x}_{2i}$  dans le système 4.3, on obtient le système d'erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_{x_{2i-1}} = x_{2i} - \dot{y}_{2i-1}^d \\ \dot{e}_{x_{2i}} = f_i(x) + g_i(x)u_i - \dot{\alpha}_{2i} \end{cases} \quad (4.4)$$

Le problème de poursuite de trajectoires est par conséquent transformé en un problème de stabilisation du système d'erreur (4.4) autour de zéro. La résolution du problème de poursuite du quadrotor revient à trouver une loi de commande qui assure la convergence de l'erreur en position et en orientation vers zéro ou à un voisinage du zéro.

## 4.2.2 Commande basée sur une fonction de Lyapunov avec barrière symétrique (BLF)

Dans cette partie, la conception et l'analyse des commandes sont présentées pour le modèle du drone. On considère le cas où le modèle du drone est connu et le terme de perturbation  $d_{2i}$  est nul. La conception du contrôle est basée sur la technique de backstepping, employant des fonctions symétriques avec barrière dans la première étape, et des fonctions quadratiques dans les étapes restantes.

**Proposition 4.1** [48] : Soit les fonctions définies par:

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1}(\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2)e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \quad (4.5)$$

et on considère le contrôle  $u$  de la forme :

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} \left\{ -\frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} - k_{2i} e_{x_{2i}} - f_i(x) + \dot{\alpha}_{2i} \right\} \quad (4.6)$$

avec  $k_{2i-1}$  et  $k_{2i}$  sont des constantes positives. Alors pour un choix convenable des gains  $k_{2i-1}$  et  $k_{2i}$  le système (4.4) est asymptotiquement stable et  $\eta_{2i-1}$  converge vers  $\eta_{2i-1}^d$ .

**Preuve 4.1 : • Première itération :** On choisit la fonction  $V_1$  sous la forme suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.7)$$

tel que  $-\varepsilon_{2i-1}$  et  $\varepsilon_{2i-1}$  sont deux contraintes symétriques et constantes pour  $e_{x_{2i-1}}$ , et chacune de celle-ci peut être définie indépendamment, en fonction des limites supérieure et inférieure de  $\eta_{2i-1}^d$ .

La dérivée de la fonction  $V_1$  par rapport au temps est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{V}_1 = \frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \dot{e}_{2i-1} = \frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} (e_{x_{2i}} + \alpha_{2i} - \dot{y}_{2i-1}^d) \quad (4.8)$$

On suppose que  $\alpha_{2i}$  prend la forme suivante

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1}(\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2)e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \quad (4.9)$$

avec  $k_{2i-1}$  des constantes positives.

En remplaçant (4.9) dans l'équation (4.8) on obtient

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 + \frac{e_{x_{2i-1}}e_{x_{2i}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \quad (4.10)$$

Quand  $e_{x_{2i}} \rightarrow 0$ , on a

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.11)$$

Alors,  $V_1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Le second terme de  $\dot{V}_1$  sera annulée dans l'étape suivante.

• **Seconde itération** : On définit la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_{x_{2i}}^2, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.12)$$

En dérivant l'équation (4.12), on obtient

$$\dot{V}_2 = -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 + \frac{e_{x_{2i-1}}e_{x_{2i}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + e_{x_{2i}}(f_i(x) + g_i(x)u_i - \dot{\alpha}_{2i}) \quad (4.13)$$

On pose  $u$  de la forme suivante

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} \left\{ -\frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} - k_{2i}e_{x_{2i}} - f_i(x) + \dot{\alpha}_{2i} \right\} \quad (4.14)$$

avec  $k_{2i}$  des constantes positives.

En remplaçant (4.14) dans (4.13), on obtient

$$\dot{V}_2 = -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 \quad (4.15)$$

En utilisant le théorème de Lyapunov (2.13), on conclut que l'erreur  $e_{x_i}$  est asymptotiquement stable et la trajectoire réelle du drone converge vers la trajectoire de référence.

**Proposition 4.2** [46] On considère le système en boucle fermée (4.4), (4.9) et (4.14). Si les conditions initiales sont telles que  $e_{x_i}(0) \in \{e_{x_i} \in \mathbf{R}^{12}; |e_{x_{2i-1}}| < \varepsilon_{2i-1}\}$ , alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. Le signal  $e_{x_i}(t)$  reste dans l'ensemble compact défini par

$$\Omega := \{e_{x_i} \in \mathbf{R}^{12}, |e_{x_{2i-1}}| < D_{e_x}; \|e_{x_{2i}}\| \leq \sqrt{2V_2(0)}\} \quad (4.16)$$

$$D_{e_x} = \varepsilon_{2i-1} \sqrt{1 - e^{-2V_2(0)}} \quad (4.17)$$

avec  $V_2$  est la fonction candidate de Lyapunov obtenue depuis (4.7) - (4.12).

2. L'erreur de suivi de sortie converge asymptotiquement vers zéro;
3. Tous les signaux en boucle fermée sont bornés.

**Preuve 4.2 :**

1.  $\dot{V}_2 \leq 0$ , il s'ensuit que  $V_2(t) \leq V_2(0)$

$$\frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right) \leq V_2(0)$$

En appliquant la fonction exponentielle, l'inégalité suivante peut être obtenue :

$$|e_{x_{2i-1}}(t)| \leq \varepsilon_{2i-1} \sqrt{1 - e^{-2V_2(0)}}$$

De même, du fait que  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 e_{x_{2i}}^2 \leq V_2(0)$ , nous pouvons montrer que  $\|e_{x_{2i}}\| \leq \sqrt{V_2(0)}$ .

2. Comme on peut le voir dans Eq. (4.13),  $\dot{V}_2$  est définie négative lorsque la loi de commande choisie est (4.14). Ainsi, le système est asymptotiquement stable et  $e_{x_i} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

$e_{x_{2i-1}}$  reste dans  $]-\varepsilon_{2i-1}, \varepsilon_{2i-1}[$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ . Par conséquent, les contraintes ne seront jamais violées.

3.  $x_{2i-1}(t) = e_{x_{2i-1}}(t) + y_{2i-1}^d(t)$ , où  $y_{2i-1}^d = (\phi_d, \theta_d, \psi_d, x_d, y_d, z_d)^T$ ,  $|e_{x_{2i-1}}(t)| \leq \varepsilon_{2i-1}$  et  $\underline{Y}_0(t) \leq y_{2i-1}^d(t) \leq \overline{Y}_0(t)$ , alors,

$$|x_{2i-1}| \leq \varepsilon_{2i-1} + \overline{Y}_0(t)$$

La limitation de  $e_{x_{2i-1}}$  et  $y_{2i-1}^d$  implique que l'état  $x_{2i-1}$  est borné. Avec le fait que  $\dot{y}_{2i-1}^d$  est borné, il est clair, d'après l'équation (4.9), la fonction auxiliaire stabilisante  $\alpha_{2i}$  est aussi bornée.

### 4.2.3 Commande basée sur une fonction de Lyapunov avec barrière asymétrique (ABLF)

Dans cette partie, on considère des fonctions avec barrière asymétrique afin d'élargir la notion de commande avec barrière. Notre objectif est d'assurer la poursuite de trajectoire de référence du drone.

**Proposition 4.3** [49] : Soit les fonctions définies par:

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1} \left( \frac{1 - q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \quad (4.18)$$

et on considère le contrôle  $u$  de la forme :

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} \left\{ - \left( \frac{1 - q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} - k_{2i} e_{x_{2i}} - f_i(x) + \dot{\alpha}_{2i} \right\} \quad (4.19)$$

avec  $\varepsilon_{2i-1}, \mu_{2i-1}, k_{2i-1}$  et  $k_{2i}$  sont des constantes positives. Alors pour un choix convenable des gains  $k_{2i-1}$  et  $k_{2i}$ , le système (4.4) est asymptotiquement stable et  $\eta_{2i-1}$  converge vers  $\eta_{2i-1}^d$ .

**Preuve 4.3** : Soit la fonction de Lyapunov suivante  $V_1$  définie par

$$V_1 = \frac{1}{2} (1 - q(e_{x_{2i-1}})) \log \left( \frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) + \frac{1}{2} q(e_{x_{2i-1}}) \log \left( \frac{\mu_{2i-1}^2}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) \quad (4.20)$$

avec  $q(e_{x_{2i-1}})$  est une fonction qui vérifie :

$$q(e_{x_{2i-1}}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < e_{x_{2i-1}} < \varepsilon_{2i-1} \\ 0, & \text{si } -\mu_{2i-1} < e_{x_{2i-1}} < 0 \end{cases}$$

$\varepsilon_{2i-1}$  et  $-\mu_{2i-1}$  sont deux contraintes non symétriques pour l'erreur  $e_{x_{2i-1}}$ , et chacun de ceux-ci peut être défini indépendamment, en fonction des limites supérieure et inférieure de  $y_{2i-1}^d$ .

En dérivant Eq. (4.20), on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= (1-q) \frac{e_{x_{2i-1}} \dot{e}_{2i-1}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - z_1^2} + q \frac{e_{x_{2i-1}} \dot{e}_{2i-1}}{\mu_{2i-1}^2 - z_1^2} \\
&= \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} \dot{e}_{2i-1} \\
&= \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} (e_{x_{2i}} + \alpha_{2i} - \dot{y}_{2i-1}^d) \tag{4.21}
\end{aligned}$$

On définit la variable auxiliaire  $\alpha_{2i}$  de la forme suivante :

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1} \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \tag{4.22}$$

avec  $k_{2i-1}$  sont des constantes positives.

L'équation (4.22) est remplacée dans l'équation (4.21) on a :

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1} e_{x_{2i-1}}^2 + \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} e_{x_{2i}} \tag{4.23}$$

Lorsque  $e_{x_{2i}} \rightarrow 0$ , on trouve

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1} e_{x_{2i-1}}^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{4.24}$$

ce qui implique,  $V_1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Le second terme de l'expression de  $\dot{V}_1$  peut être éliminé dans l'étape suivante.

• **Seconde itération** : On combine la fonction  $V_1$  avec une fonction quadratique

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_{x_{2i}}^2 \quad (4.25)$$

La dérivée de Eq. (4.25) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 + \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}}e_{x_{2i}} \\ & + e_{x_{2i}}(f_i(x) + g_i(x)u_i + d_{2i}(t) - \dot{\alpha}_{2i}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

En choisissant l'entrée  $u$  de la manière suivante

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} \left\{ - \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} - k_{2i}e_{x_{2i}} - f_i(x) + \dot{\alpha}_{2i} \right\} \quad (4.27)$$

avec  $k_{2i}$  sont des constantes positives.

L'équation (4.27) est remplacée dans l'équation (4.26). Finalement on obtient

$$\dot{V}_2 = -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 \quad (4.28)$$

On peut conclure que le signal  $e_{x_{2i-1}}$  reste dans l'intervalle  $-\mu_{2i-1} < e_{x_{2i-1}}(t) < \varepsilon_{2i-1}$ ,  $\forall t > 0$ , à condition que  $-\mu_{2i-1} < e_{x_{2i-1}}(0) < \varepsilon_{2i-1}$ .

**Remarque :**

1.  $U_1 = \sum_{i=1}^4 f_i$  avec  $f_i = b\omega_i^2$ ,  $b$  est une constante positive donnée et  $\omega_i$  la vitesse angulaire résultante du moteur  $i$ .
2. L'entrée  $U_1$  du système est strictement positive.

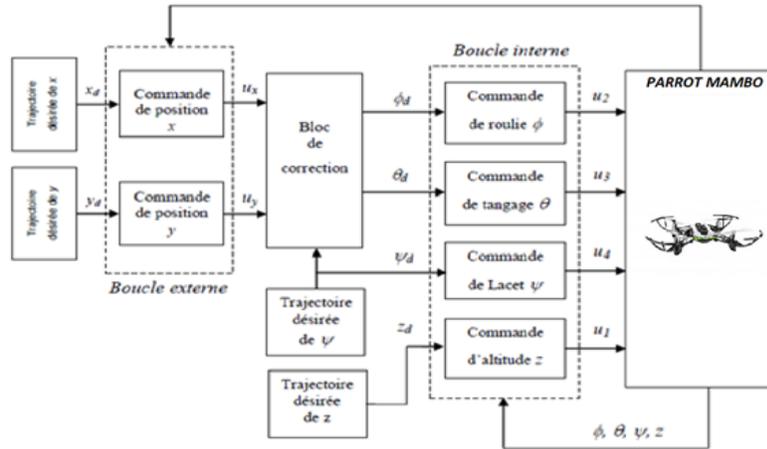
3. Le drone ne peut pas faire un angle de roulis ou de tangage égale a  $\pm\frac{\pi}{2}$ .
4. Les commandes auxiliaires  $U_x$  et  $U_y$  sont utilisées pour calculer les angles souhaités  $\phi_d$  et  $\theta_d$ , qui sont représentés dans [1] par l'expression suivante

$$\begin{aligned}\phi_d &= \arcsin(U_x \sin \psi_d - U_y \cos \psi_d) \\ \theta_d &= \arcsin\left(\frac{U_x \sin \psi_d - U_y \cos \psi_d}{\cos \phi_d}\right)\end{aligned}\tag{4.29}$$

La stratégie de contrôle du drone est illustrée dans la figure 4.1. Le modèle du drone est un système sous-actionné. Quatre entrées sont utilisées pour contrôler un système de six degrés de liberté. La stratégie de contrôle est basée sur deux boucles de contrôle. La première boucle est la boucle de contrôle interne qui contrôle le roulis  $\phi$ , tangage  $\theta$ , lacet  $\psi$  et altitude  $z$ , comme indiqué sur le schéma de la figure 4.1. La boucle de contrôle interne utilise les valeurs de référence pour générer les signaux de contrôle approprié. La deuxième boucle est la boucle de contrôle externe qui contrôle les positions  $x$  et  $y$ . Le but de la commande externe est de calculer le roulis désiré  $\phi_d$  et le tangage désiré  $\theta_d$  en fonction de la position désirée en utilisant les commandes de positions  $u_x, u_y$  et le lacet désiré  $\psi_d$ . La position souhaitée  $(x_d, y_d, z_d)$  et le lacet souhaité  $\psi_d$  proviennent directement de l'utilisateur.

#### 4.2.4 Simulations et résultats numériques

Dans cette section, des simulations numériques sont effectuées pour illustrer les résultats théoriques des sections précédentes. Les valeurs des paramètres du système (unités SI) utilisées pour les simulations sont données dans le tableau 4.1. Les trajectoires de référence



**Figure 4.1:** Structure de la commande

**Table 4.1:** Paramètres du système

Paramètres	Valeurs
m	0.063 kg
$I_x$	$58.2857 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$
$I_y$	$71.9614 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$
$I_z$	$10^{-4} \text{ kgm}^2$
g	$9.81 \text{ m/s}^2$
l	0.0624 m
b	$0.0107 \text{ Ns}^2$
d	$0.78264 \times 10^{-3} \text{ Nm s}^2$
$J_r$	$0.1021 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$

utilisées dans les simulations sont :

1. Trajectoire de référence 1 :

$$\begin{cases} x_d = 0 & t \leq 3 \text{ secondes} \\ x_d = 0.5 \sin(0.1t) & t > 3 \text{ secondes} \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} y_d = 0 & t \leq 3 \text{ secondes} \\ y_d = 0.5 \sin(0.1t) + 0.5 & t > 3 \text{ secondes} \end{cases} \quad (4.31)$$

$$z_d = 1, \quad \psi_d = 0$$

2. Trajectoire de référence 2 :

$$\begin{cases} x_d = 0.5 \cos(t/2); \\ y_d = 0.5 \sin(t/2) \\ z_d = 1 + (t/10). \end{cases} \quad (4.32)$$

### Résultats de simulation : Commande BLF

Dans cette section, nous présenterons les résultats de simulation de la méthode BLF. Les paramètres sont choisis par essais erreur comme suit

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{10} \quad \varepsilon_2 = \frac{\pi}{10}$$

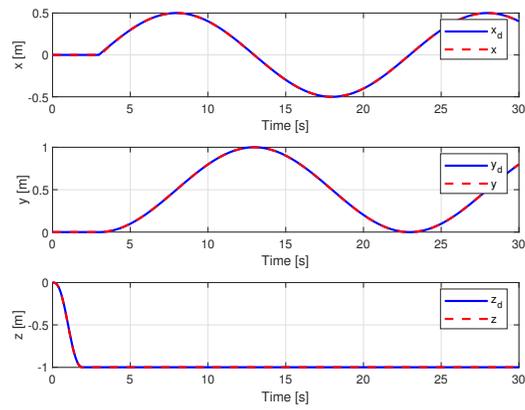
$$\varepsilon_3 = \pi \quad \varepsilon_4 = 5$$

$$\varepsilon_5 = 5 \quad \varepsilon_6 = 5$$

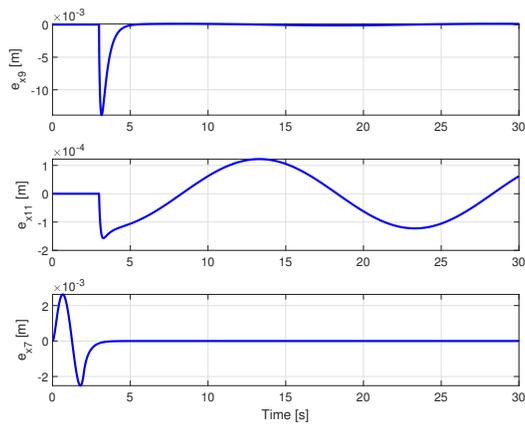
$$k_1 = k_3 = k_5 = 0.1 \quad k_7 = k_9 = k_{11} = 1$$

$$k_2 = k_4 = k_6 = 10 \quad k_8 = k_{10} = k_{12} = 10$$

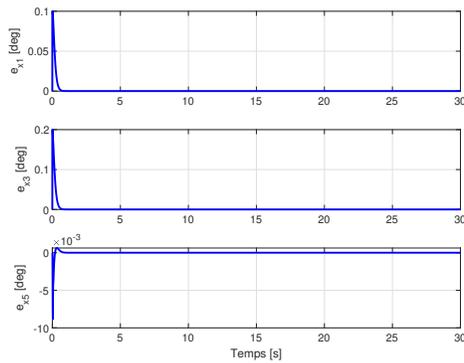
La courbe 4.2 représente le comportement du drone selon les trois axes ainsi que la position de référence. Les courbes 4.3 et 4.4 représentent les erreurs de poursuites en position et orientation. Les courbes 4.5 et 4.6 représentent la trajectoire stabilisante du drone en



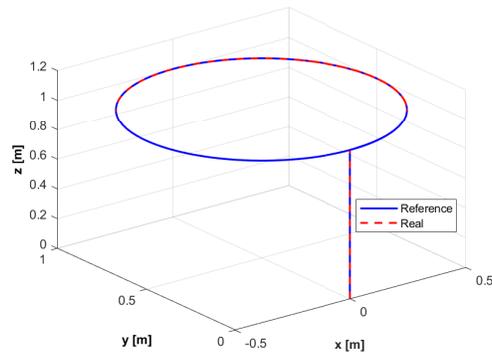
**Figure 4.2:** Poursuite de trajectoire en position (BLF)



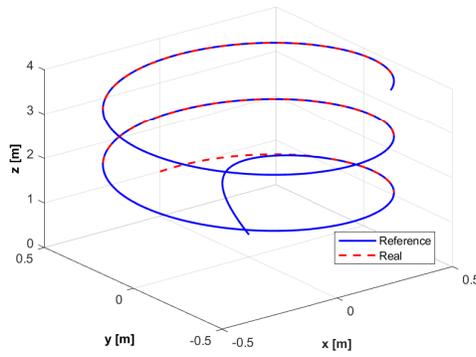
**Figure 4.3:** Erreurs en position (BLF)



**Figure 4.4:** Erreurs en orientation (BLF)

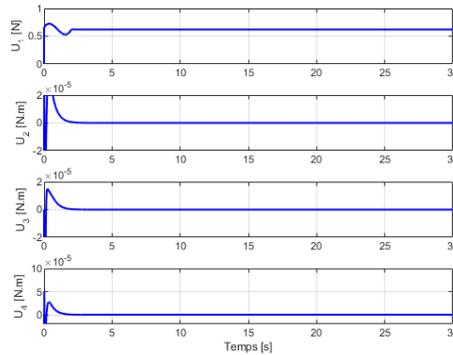


**Figure 4.5:** Trajectoire en 3D (BLF)



**Figure 4.6:** Trajectoire en 3D (BLF)

trois dimensions pour les deux trajectoires de références.



**Figure 4.7:** Comportement de la commande (BLF)

La courbe (4.7) représente les commandes stabilisantes  $U_i$  nécessaires pour suivre la tra-

jectoires de référence 1.

### Résultats de simulations : Commande ABLF

Dans cette section, nous présenterons les résultats de simulation de la méthode ABLF.

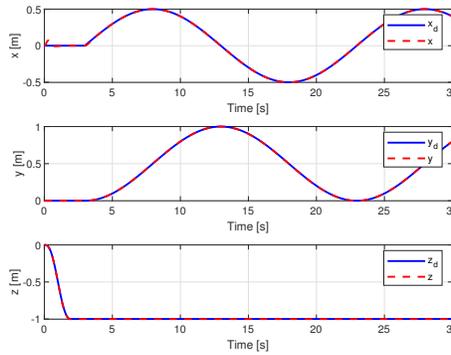
Les paramètres sont choisis comme suit :

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{10} \quad \varepsilon_2 = \frac{\pi}{10} \quad \varepsilon_3 = \frac{\pi}{10} \quad \varepsilon_4 = 3 \quad \varepsilon_5 = 5 \quad \varepsilon_6 = 5$$

$$\mu_1 = \frac{\pi}{10} \quad \mu_2 = \frac{\pi}{10} \quad \mu_3 = \pi \quad \mu_4 = 3 \quad \omega_5 = 5 \quad \mu_6 = 5$$

$$k_1 = k_3 = k_5 = 0.1 \quad k_7 = k_9 = k_{11} = 1$$

$$k_2 = k_4 = k_6 = 10 \quad k_8 = k_{10} = k_{12} = 10$$

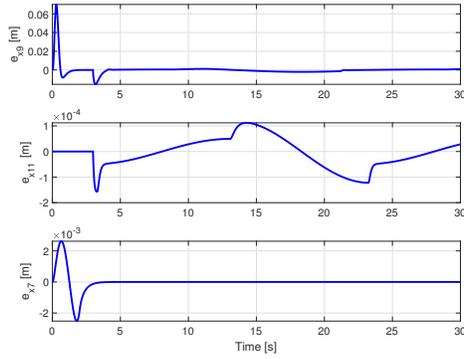


**Figure 4.8:** Poursuite de trajectoire en position (ABLF)

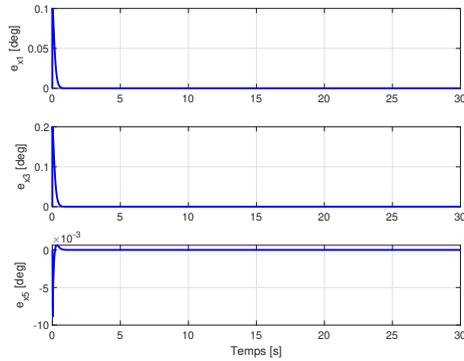
La courbe 4.8 représente le comportement du drone selon les trois axes ainsi que la position de référence.

Les courbes 4.9 et 4.10 représentent les erreurs de poursuites en position et orientation.

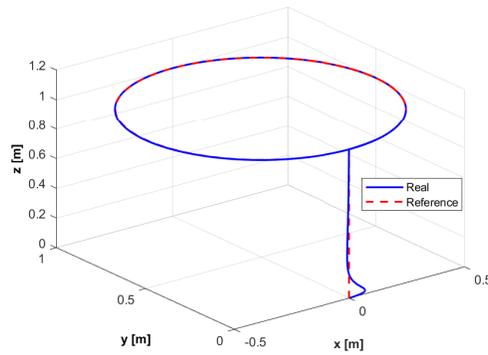
Les courbes 4.11 et 4.12 représentent la trajectoire stabilisante du drone en trois dimensions pour les deux trajectoires de références. La courbe (4.13) représente les commandes



**Figure 4.9:** Erreurs en position (ABLF)



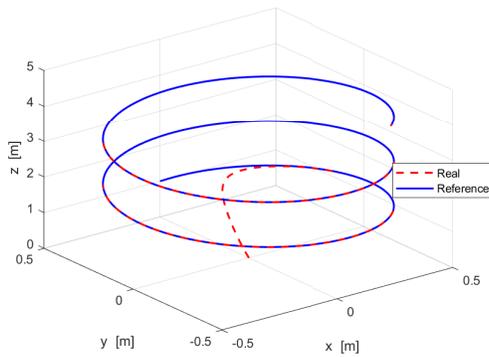
**Figure 4.10:** Erreurs en orientation (ABLF)



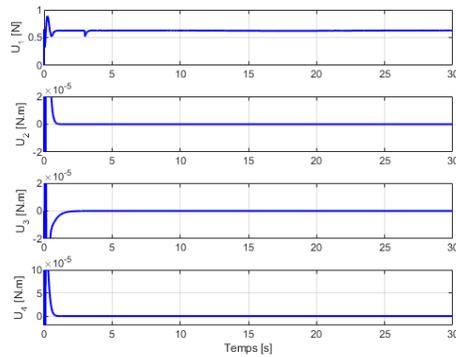
**Figure 4.11:** Trajectoire en 3D (ABLF)

stabilisantes  $U_i$  nécessaires pour suivre la trajectoires de référence 1.

Il est clair d'après les résultats de simulations que les commandes BLF et ABLF assurent la poursuite de trajectoire de référence, en plus les contraintes liées au modèle ont été



**Figure 4.12:** Trajectoire en 3D (ABLF)



**Figure 4.13:** Comportement de la commande (ABLF)

respectées ce qui nous affirme les performances de cette commande.

### 4.3 Commande non linéaire robuste

Dans cette section, la conception et l'analyse des contrôles sont présentées pour le modèle du quadrotor où le terme de perturbation externe  $d_{2i}(t)$  est non nul. On considère le cas où le modèle du système est connu. Dans ce cas le système décrivant le modèle du quadrotor s'écrit sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} = f_i(x) + g_i(x)u_i + d_{2i}(t), \quad \forall i \in 1, \dots, 6 \\ y_{2i-1} = x_{2i-1} \end{cases} \quad (4.33)$$

### 4.3.1 Commande BLF

Considérons d'abord le cas où les fonctions  $f(x)$  sont connus. La conception du contrôle est basée sur la technique de backstepping, en utilisant une fonction barrière symétrique dans la première étape, et une fonction de Lyapunov quadratique dans les autres étapes.

**Proposition 4.4** : Soit les fonctions définies par:

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1}(\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2)e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \quad (4.34)$$

et on considère le contrôle  $u$  de la forme :

$$u = \frac{1}{g(x)} \left\{ -\frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} - k_{2i}e_{x_{2i}} - f(x) + \dot{\alpha}_{2i} - \hat{\eta}_{2i} \text{sign}(e_{x_{2i}}) \right\} \quad (4.35)$$

et la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\hat{\eta}}_{2i} = \gamma |e_{x_{2i}}| \quad (4.36)$$

avec  $\varepsilon_{2i-1}, \gamma, k_{2i-1}$  et  $k_{2i}$  sont des constantes positives. Alors pour un choix convenable des gains  $k_{2i-1}$  et  $k_{2i}$ , le système (4.33) est asymptotiquement stable et  $y_{2i-1}$  converge vers  $y_{2i-1}^d$ .

**Preuve 4.4** : • **Première itération** : On choisit une fonction asymétrique avec barrière de

la forme suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.37)$$

avec  $-\varepsilon_{2i-1}$  et  $\varepsilon_{2i-1}$  les contraintes symétriques de  $e_{x_{2i-1}}$ , et chacun de ceux-ci peut être défini indépendamment, en fonction des limites supérieure et inférieure de  $\eta_{2i-1}^d$ .

En dérivant l'équation (4.37), on trouve l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \dot{e}_{2i-1} \\ &= \frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} (e_{x_{2i}} + \alpha_{2i} - \dot{y}_{2i-1}^d) \end{aligned} \quad (4.38)$$

On définit le contrôl virtuel  $\alpha_{2i}$  sous cette forme

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1}(\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2)e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \quad (4.39)$$

avec  $k_{2i-1}$  des constantes positives.

En remplaçant l'équation (4.39) dans (4.38), on obtient

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 + \frac{e_{x_{2i-1}}e_{x_{2i}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \quad (4.40)$$

lorsque  $e_{x_{2i}} \rightarrow 0$ , on a

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.41)$$

Alors,  $V_1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Le second terme de  $\dot{V}_1$  peut être négligé dans l'étape suivante.

• **Seconde itération** : On définit une fonction  $V_2$  sous cette forme

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_{x_{2i}}^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\eta}_{2i}^2, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.42)$$

avec  $\tilde{\eta}_{2i} = \hat{\eta}_{2i} - \eta_{2i}$  est l'estimation de la borne supérieure de l'incertitude  $\eta_{2i}$  et on suppose que  $|d_{2i}(t)| \leq \eta_{2i}$ .  $\gamma$  est une constante positive. Dérivons l'équation (4.42), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 + \frac{e_{x_{2i-1}}e_{x_{2i}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \\ & + e_{x_{2i}}(f_i(x) + g_i(x)u_i + d_{2i}(t) - \dot{\alpha}_{2i} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\eta}_{2i}\dot{\tilde{\eta}}_{2i}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

La loi de commande robuste peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_i = & \frac{1}{g_i(x)} \left\{ -\frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} - k_{2i}e_{x_{2i}} - f_i(x) \right. \\ & \left. + \dot{\alpha}_{2i} - \hat{\eta}_{2i} \text{sign}(e_{x_{2i}}) \right\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

avec  $k_{2i}$  des constantes positives.

L'équation (4.44) est substituée dans (4.43) pour obtenir

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 + (d_i(t) - \hat{\eta}_{2i} \text{sign}(e_{x_{2i}}))e_{x_{2i}} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\eta}_{2i}\dot{\tilde{\eta}}_{2i} \\ = & -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 - (\eta_{2i} \text{sign}(e_{x_{2i}}) - d_{2i}(t))e_{x_{2i}} - \tilde{\eta}_{2i} \left( |e_{x_{2i}}| - \frac{1}{\gamma}\dot{\hat{\eta}}_{2i} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

La loi d'adaptation peut être conçue comme suit :

$$\dot{\hat{\eta}}_{2i} = \gamma |e_{x_{2i}}| \quad (4.46)$$

En remplaçant (4.46) dans (4.45), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 - (\eta_{2i}\text{sign}(e_{x_{2i}}) - d_{2i}(t))e_{x_{2i}} \\ &\leq -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 - |e_{x_{2i}}| (\eta_{2i} - |d_{2i}(t)|) \end{aligned} \quad (4.47)$$

En utilisant la théorie de Lyapunov et le théorème de LaSalle, nous concluons que la dynamique des erreurs de position et d'orientation est asymptotiquement stable, et que la position et l'orientation du quadrotor suivent asymptotiquement leur état désiré.

### 4.3.2 ABLF

Dans cette partie on choisit une fonction avec barrière asymétrique sous la forme suivante

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}(1 - q(e_{x_{2i-1}})) \log\left(\frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}q(e_{x_{2i-1}}) \log\left(\frac{\mu_{2i-1}^2}{\omega_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec la fonction  $q$  sous cette forme

$$q(e_{x_{2i-1}}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < e_{x_{2i-1}} < \varepsilon_{2i-1} \\ 0, & \text{si } -\mu_{2i-1} < e_{x_{2i-1}} < 0 \end{cases}$$

$\varepsilon_{2i-1}$  et  $-\mu_{2i-1}$  les deux contraintes de  $e_{x_{2i-1}}$ , et chacune d'entre elles peut être définie indépendamment, en fonction des limites supérieure et inférieure de  $\phi_d, \theta_d, \psi_d, z_d, x_d$ , et  $y_d$ .

En dérivant l'équation (4.48), on obtient l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= (1-q) \frac{e_{x_{2i-1}} \dot{e}_{2i-1}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - z_1^2} + q \frac{e_{x_{2i-1}} \dot{e}_{2i-1}}{\mu_{2i-1}^2 - z_1^2} \\
&= \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} \dot{e}_{2i-1} \\
&= \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} (e_{x_{2i}} + \alpha_{2i} - \dot{y}_{2i-1}^d) \quad (4.49)
\end{aligned}$$

On définit le contrôl virtuel  $\alpha_{2i}$  sous cette forme

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1} \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \quad (4.50)$$

avec  $k_{2i-1}$  des constantes positives.

L'équation (4.50) est substituée dans (4.49) pour obtenir

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1} e_{x_{2i-1}}^2 + \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} e_{x_{2i}} \quad (4.51)$$

Lorsque  $e_{x_{2i}} \rightarrow 0$ , on a

$$\dot{V}_1 = -k_{2i-1} e_{x_{2i-1}}^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.52)$$

Alors,  $V_1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Le second terme de  $\dot{V}_1$  peut être négligé dans l'étape suivante.

• **Seconde itération** : On définit la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_{x_{2i}}^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\eta}_{2i}^2 \quad (4.53)$$

avec  $\tilde{\eta}_{2i} = \hat{\eta}_{2i} - \eta_{2i}$  est l'estimation de la limite supérieure de l'incertitude  $\eta_{2i}$  et  $|d_{2i}(t)| \leq \eta_{2i}$ .  $\gamma$  est une constante positive. Dérivons l'équation (4.53), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 + \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}}e_{x_{2i}} \\ & + e_{x_{2i}}(f_i(x) + g_i(x)u_i + d_{2i}(t) - \dot{\alpha}_{2i}) + \frac{1}{\gamma}\tilde{\eta}_{2i}\dot{\tilde{\eta}}_{2i} \end{aligned} \quad (4.54)$$

La loi de commande robuste peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} u_i = & \frac{1}{g_i(x)} \left\{ - \left( \frac{1-q(e_{x_{2i-1}})}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{q(e_{x_{2i-1}})}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} \right. \\ & \left. - k_{2i}e_{x_{2i}} - f_i(x) + \dot{\alpha}_{2i} - \hat{\eta}_{2i} \text{sign}(e_{x_{2i}}) \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

avec  $k_{2i}$  des constantes positives.

L'équation (4.55) est remplacée dans (4.54) pour obtenir

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 + (d_{2i}(t) - \hat{\eta}_{2i} \text{sign}(e_{x_{2i}}))e_{x_{2i}} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\eta}_{2i}\dot{\tilde{\eta}}_{2i} \\ = & -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 - (\eta_{2i} \text{sign}(e_{x_{2i}}) - d_{2i}(t))e_{x_{2i}} - \tilde{\eta}_{2i}(|e_{x_{2i}}| - \frac{1}{\gamma}\hat{\eta}_{2i}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

La loi adaptative peut être conçue comme suit:

$$\dot{\hat{\eta}}_{2i} = \gamma |e_{x_{2i}}| \quad (4.57)$$

En substituant (4.57) dans (4.56), on peut obtenir

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 - (\eta_{2i}\text{sign}(e_{x_{2i}}) - d_{2i}(t))e_{x_{2i}} \\ &\leq -k_{2i-1}e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i}e_{x_{2i}}^2 - |e_{x_{2i}}| (\eta_{2i} - |d_{2i}(t)|) \end{aligned} \quad (4.58)$$

En utilisant la théorie de Lyapunov et le théorème de LaSalle, nous concluons que la dynamique des erreurs de position et d'orientation est asymptotiquement stable, et que la position et l'orientation du quadrotor suivent asymptotiquement leur état désiré.

### 4.3.3 Simulation numérique

Dans cette sous-section, des simulations numériques sont effectuées pour illustrer les résultats théoriques des sections précédentes.

– La trajectoire de référence est donnée par :

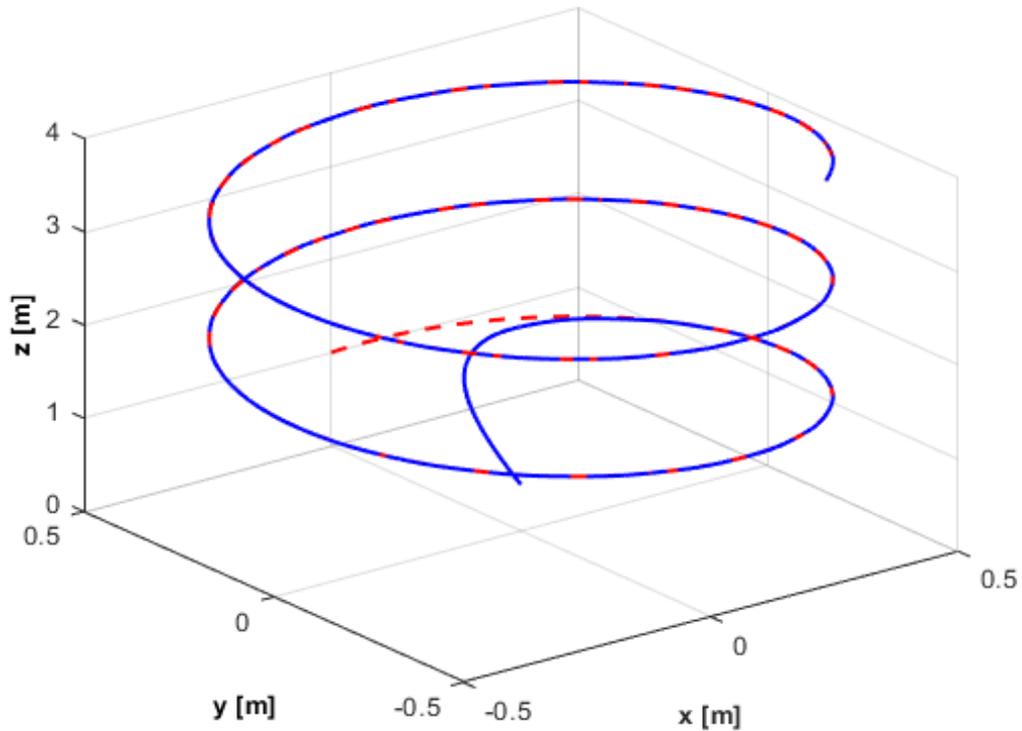
$$\begin{cases} x_d = 0.5 \cos(t/2); \\ y_d = 0.5 \sin(t/2) \\ z_d = 1 + (t/10). \end{cases} \quad (4.59)$$

– La perturbation  $d_{2i}(t)$  est donnée par :

$$d_{2i} = (0, 0, 0, 0.1 \sin 10 * t, 0.1 \sin 10 * t, 0.1 \sin 10 * t)^T$$

### Résultats de simulations : Commande BLF

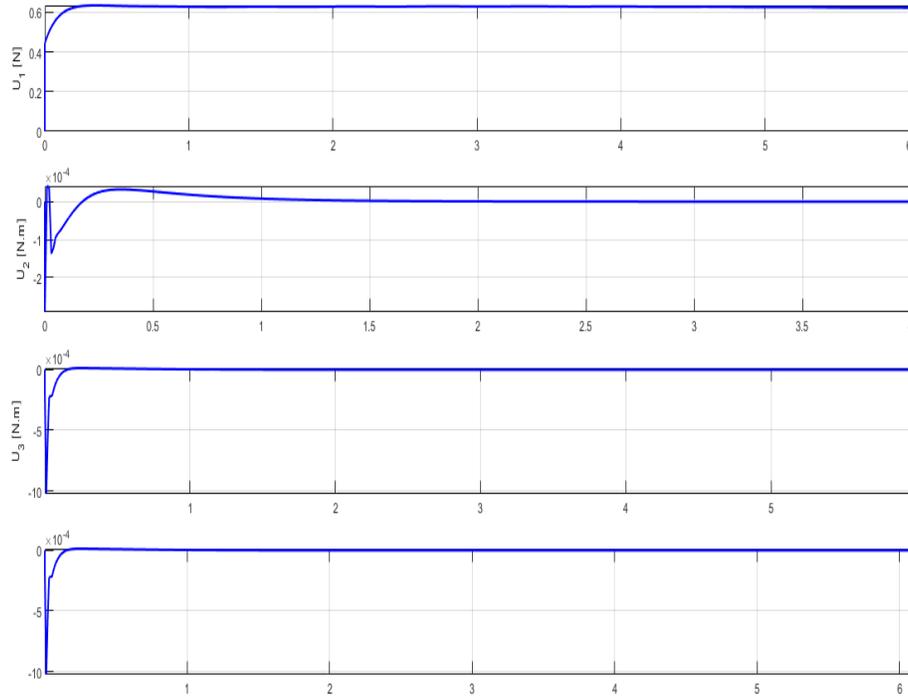
Dans cette partie nous exposons les résultats de simulation dans le cas où la fonction avec barrière est symétrique.



**Figure 4.14:** Trajectoire du quadrotor en 3D (BLF).

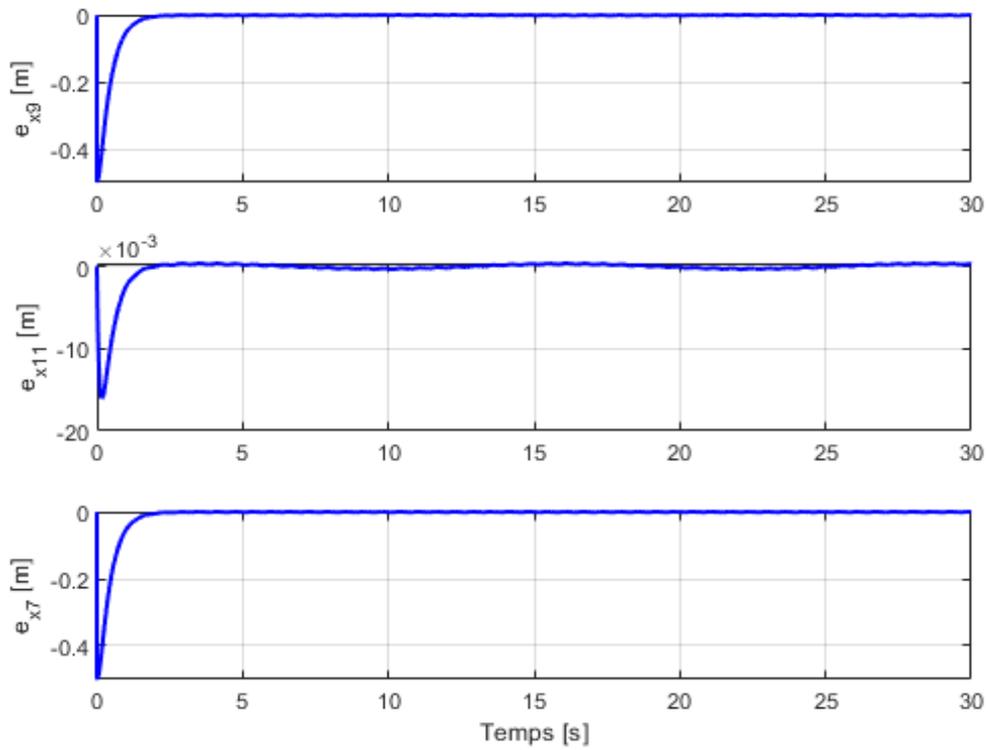
La figure 4.14 représente l'évolution du drone selon les trois axes sous l'action du loi de commande robuste en utilisant une fonction symétrique avec barrière. On voit bien que la commande assure la poursuite désirée. La courbe en rouge représente la trajectoire réelle

du drone et la courbe en bleu représente la trajectoire de référence. Au bout de 5 secondes la trajectoire du drone converge vers la trajectoire de référence.



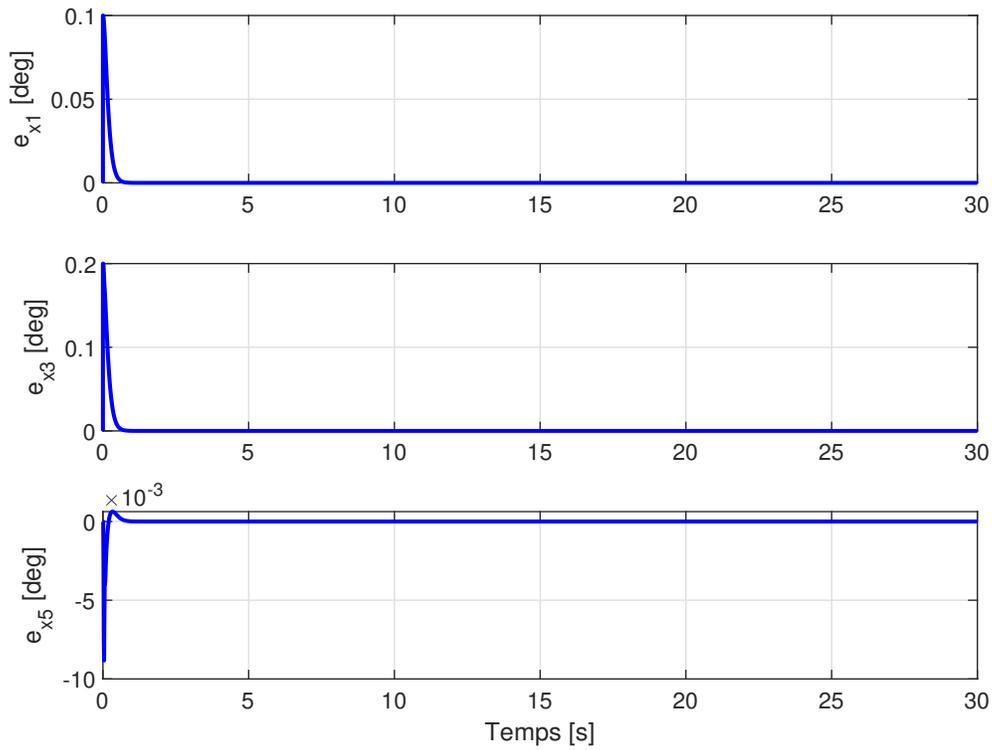
**Figure 4.15:** Commande de poursuite de trajectoire (BLF).

La figure 4.15 représente les commandes en force et en moments nécessaire pour atteindre la trajectoire de référence et rester sur la même trajectoire.



**Figure 4.16:** Évolution de l'erreur en position en fonction du temps (BLF).

La figure 4.16 représente l'erreur entre la position réelle du drone et la position désirée. Il est clair que l'erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. Par exemple  $e_{x_7}$  tend vers zéro c'est à dire la position réelle  $z$  converge vers la position désirée  $z_d$ .



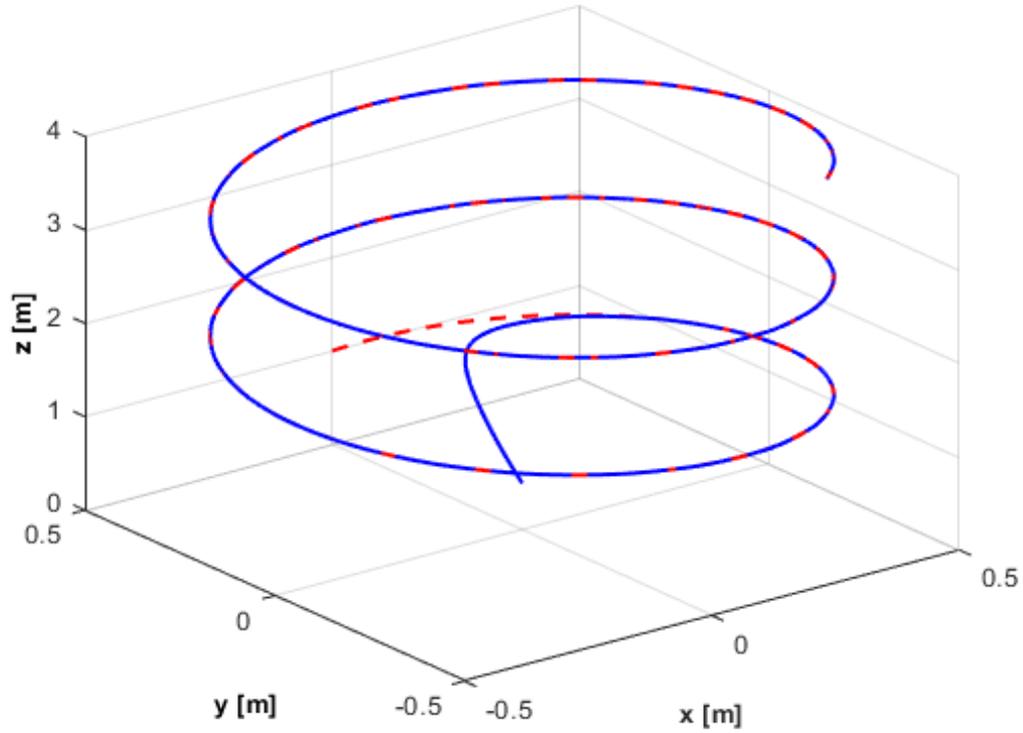
**Figure 4.17:** Évolution de l’erreur en orientation en fonction du temps.

La figure 4.17 représente l’erreur entre l’orientation réelle du drone et la position désirée.

Il est clair que l’erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. par exemple  $e_{x_1}$  tend vers zéro c’est à dire l’angle réelle  $\phi$  converge vers l’angle désirée  $\phi_d$ .

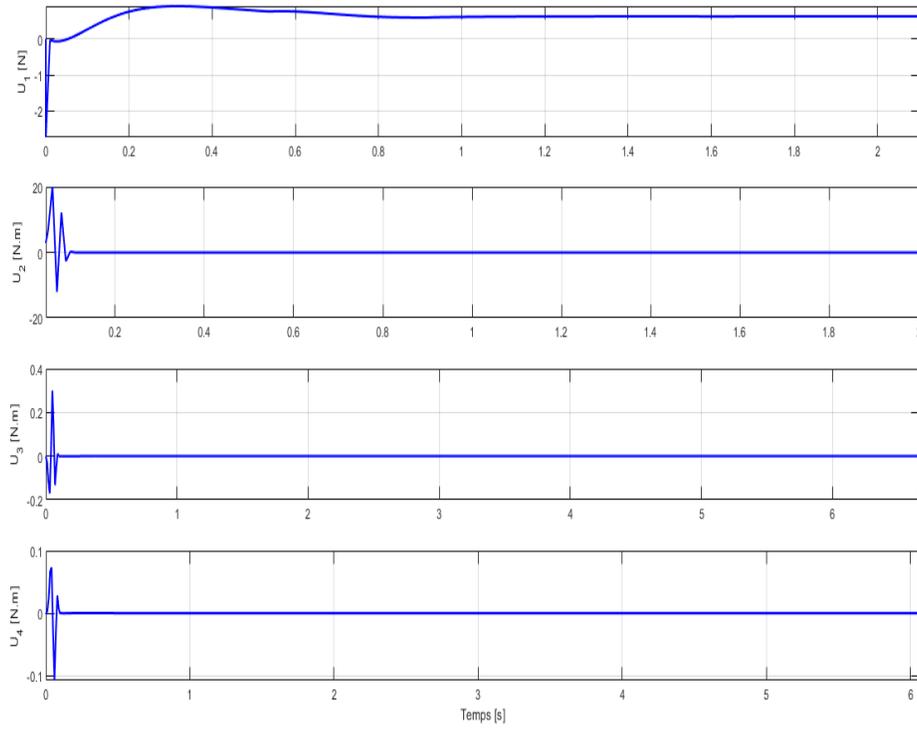
### Résultats de simulations : Commande ABLF

Dans cette partie nous exposons les résultats de simulation dans le cas où la fonction avec barrière est asymétrique.



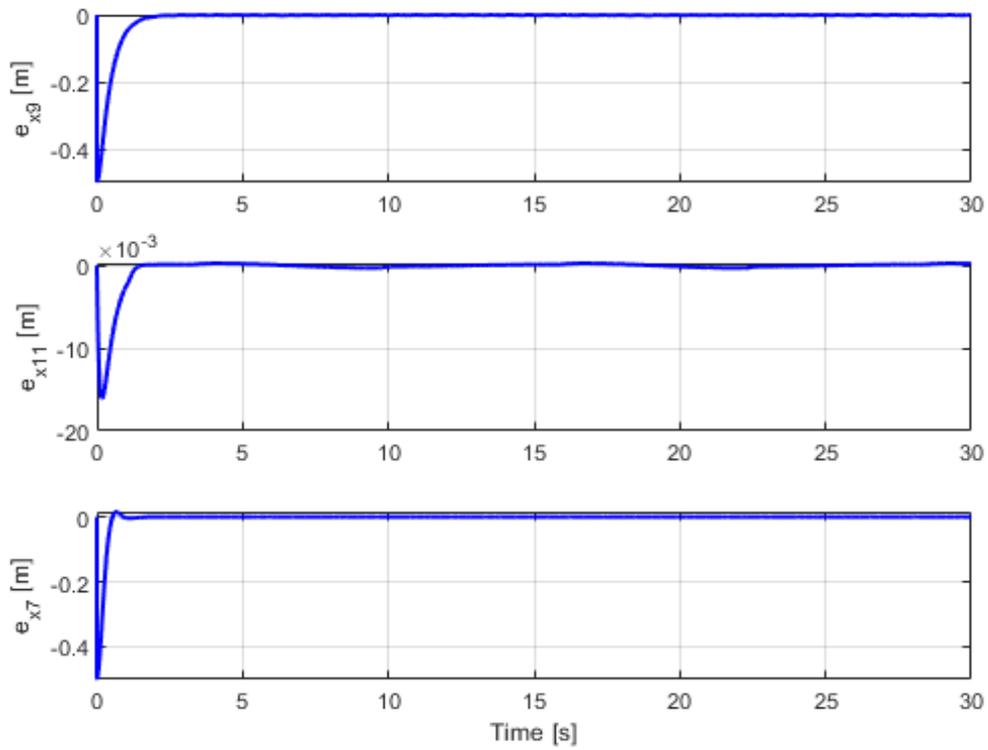
**Figure 4.18:** Trajectoire du quadrotor en 3D (ABLF).

La figure 4.18 représente l'évolution du drone selon les trois axes sous l'action de la loi de commande robuste en utilisant une fonction asymétrique avec barrière. On voit bien que la commande assure la poursuite désirée. La courbe en rouge représente la trajectoire réelle du drone et la courbe en bleu représente la trajectoire de référence. Au bout de 5 secondes la trajectoire du drone converge vers la trajectoire de référence.



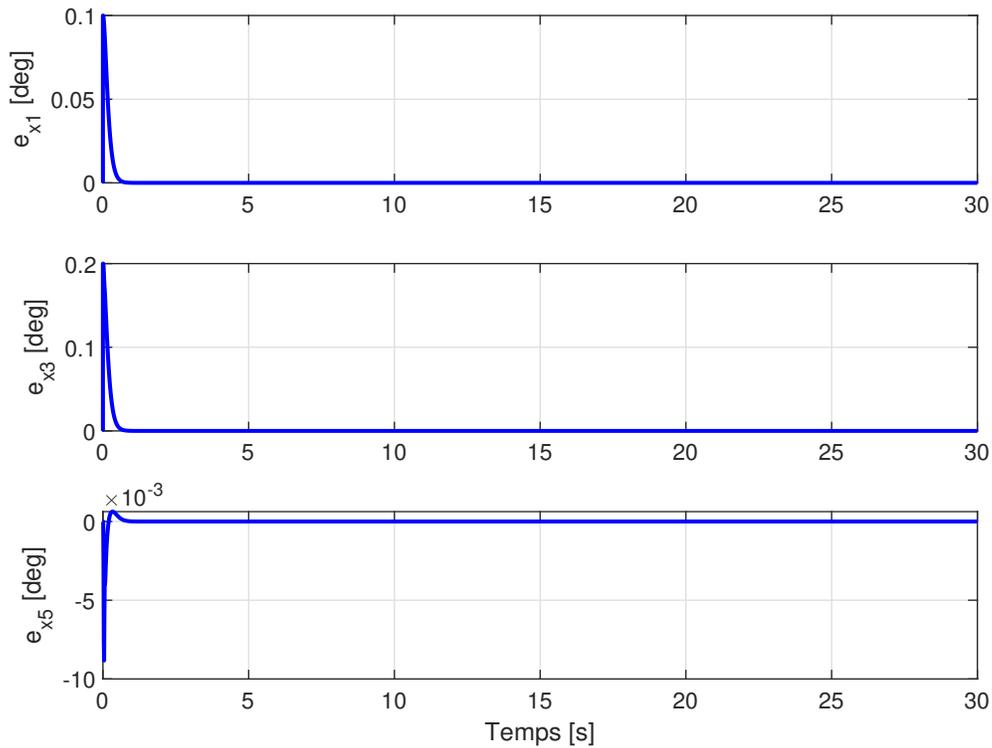
**Figure 4.19:** Commande pour la poursuite de trajectoire (ABLF).

La figure 4.19 représente les commandes en force et en moments nécessaire pour atteindre la trajectoire de référence et rester sur la même trajectoire.



**Figure 4.20:** Évolution de l'erreur en position en fonction du temps (ABLF).

La figure 4.20 représente l'erreur entre la position réelle du drone et la position désirée. Il est clair que l'erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. Par exemple  $e_{x_{11}}$  tend vers zéro c'est à dire la position réelle  $y$  converge vers la position désirée  $y_d$ .



**Figure 4.21:** Évolution de l'erreur en orientation en fonction du temps (ABLF).

La figure 4.21 représente l'erreur entre l'orientation réelle du drone et la position désirée. Il est clair que l'erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. Par exemple  $e_{x_3}$  tend vers zéro c'est à dire l'angle réel  $\theta$  converge vers l'angle désirée  $\theta_d$ .

## 4.4 Commande adaptative

La commande adaptative est une technique où les paramètres de commande varient en temps réel pour s'adapter à des changements dans la dynamique du système. Ces changements peuvent être dus à des erreurs de modélisation, à des incertitudes paramétriques ou à des perturbations. Afin d'augmenter la robustesse des lois de commandes élaborées, on

cherche dans cette section à élargir notre choix en supposant que les paramètres du modèle du quadrotor ne sont pas connus.

#### 4.4.1 Commande BLF

Les fonctions non linéaires  $f(x)$  peuvent être incertaines, et dans plusieurs cas, ils satisfont à la condition de paramètres linéaires (LIP) suivante :  $f_i(x) = a^T \varphi_i(x)$  avec  $\varphi_{2i}(x)$  sont des fonctions, et  $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ . Alors le système (4.2) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} = a^T \varphi_i(x) + g_i(x)u_i \end{cases} \quad (4.60)$$

En choisissant une fonction avec barrière et symétrique sous la forme suivante

$$V_1 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right) + \frac{1}{2} \tilde{a}^T \Gamma^{-1} \tilde{a} \quad (4.61)$$

avec  $\tilde{a} = \hat{a} - a$  est l'erreur entre le paramètre réel  $a$  et son estimé  $\hat{a}$ . On peut montrer que  $V_1$  est défini positif et continûment différentiable dans l'ensemble  $|e_{x_{2i-1}}| < \varepsilon_{2i-1}$ , et donc une fonction de Lyapunov. Le contrôle adaptatif est conçu comme suit :

$$\alpha_{2i} = -k_{2i-1}(\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2)e_{x_{2i-1}} + \dot{x}_{2i-1}^d \quad (4.62)$$

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} \left\{ -\hat{a}^T \varphi_i(x) - \frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} - k_{2i} e_{x_{2i}} + \dot{\alpha}_{2i} \right\} \quad (4.63)$$

$$\dot{\hat{a}} = \Gamma \tilde{a} \varphi_i(x) e_{x_{2i}} \quad (4.64)$$

ce qui donne le système en boucle fermée suivant :

$$\dot{e}_{2i-1} = -k_{2i-1}(\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2) e_{x_{2i}} \quad (4.65)$$

$$\dot{e}_{2i} = -k_{2i} e_{x_{2i}} - \frac{e_{x_{2i-1}}}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} - \tilde{a}^T \varphi_i(x) \quad (4.66)$$

On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_{x_{2i}}^2 \quad (4.67)$$

La dérivée de  $V_2$  le long de (4.65)-(4.66) est donnée par  $\dot{V}_2 = -k_{2i-1} e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i} e_{x_{2i}}^2$ .

En utilisant le théorème 2.17, le signal d'erreur  $e_{x_{2i-1}}$  satisfait  $|e_{x_{2i-1}}(t)| \leq \varepsilon_{2i-1} \forall t > 0$  à condition que  $|e_{x_{2i-1}}(0)| \leq \varepsilon_{2i-1}$ . En utilisant le théorème de Lyapunov (2.12) et le théorème de LaSalle (2.14), nous concluons que la dynamique des erreurs de position et d'orientation est asymptotiquement stable, et que la position et l'orientation du quadrotor suivent asymptotiquement l'état désiré.

#### 4.4.2 ABLF

En utilisant une méthodologie de conception similaire à celle de la section 5.1, les résultats pour le cas incertain peuvent être dérivés. Les fonctions non linéaires  $f(x)$  peuvent être incertaines, dans plusieurs cas, ils satisfont à la condition de paramètres

linéaires (LIP) suivante :  $f(x) = a^T \varphi(x)$  avec  $\varphi$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$ , et  $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ .

Alors la dynamique (4.2) peut être réécrite comme

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} = a^T \varphi_i(x) + g_i(x) u_i \end{cases} \quad (4.68)$$

En sélectionnant la fonction Lyapunov à barrière symétrique

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} (1 - q(e_{x_{2i-1}})) \log\left(\frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right) \\ &+ \frac{1}{2} q(e_{x_{2i-1}}) \log\left(\frac{\mu_{2i-1}^2}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2}\right) + \frac{1}{2} \tilde{a}^T \Gamma^{-1} \tilde{a} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Où  $\tilde{a} = \hat{a} - a$  est l'erreur entre  $a$  et son estimation,  $\hat{a}$ . On peut montrer que  $V_1$  est définie positive et continuellement différentiable dans l'ensemble  $-\mu_{2i-1} < e_{x_{2i-1}} < \varepsilon_{2i-1}$ , et donc une fonction candidate de Lyapunov.

Le contrôle adaptatif est conçu comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_{2i} &= -k_{2i-1} \{ (1 - q(e_{x_{2i-1}})) (\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2) \\ &+ q(e_{x_{2i-1}}) (\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2) \} e_{x_{2i-1}} + \dot{y}_{2i-1}^d \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{g_i(x)} \{ -\hat{a}^T \varphi_i(x) - k_{2i} e_{x_{2i}} + \dot{\alpha}_{2i} \\ &- \left( \frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{\mu_{2i-1}^2}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} \} \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\dot{\hat{a}} = \Gamma \tilde{a} \varphi_i(x_{2i}) e_{x_{2i}} \quad (4.72)$$

Ce qui donne le système en boucle fermée sous cette forme :

$$\dot{e}_{2i-1} = -k_{2i-1} (\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2) e_{x_{2i}} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{2i-1} = & -k_{2i} e_{x_{2i}} - \tilde{a}^T \varphi_{2i}(x) \\ & - \left( \frac{\varepsilon_{2i-1}^2}{\varepsilon_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} + \frac{\mu_{2i-1}^2}{\mu_{2i-1}^2 - e_{x_{2i-1}}^2} \right) e_{x_{2i-1}} \end{aligned} \quad (4.74)$$

On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_{x_{2i}}^2 \quad (4.75)$$

La dérivée de  $V_2$  le long de (4.73) est donnée par  $\dot{V}_2 = -k_{2i-1} e_{x_{2i-1}}^2 - k_{2i-1} e_{x_{2i}}^2$ . Selon le théorème (2.17), le signal d'erreur  $e_{x_{2i-1}}$  satisfait  $|e_{x_{2i-1}}(t)| \leq \varepsilon_{2i-1} \forall t > 0$  à condition que  $|e_{x_{2i-1}}(0)| \leq \varepsilon_{2i-1}$ .

En utilisant la théorème de Lyapunov (2.12) et le théorème de LaSalle (2.14), nous concluons que la dynamique des erreurs de position et d'orientation est asymptotiquement stable, et que la position et l'orientation du quadrotor suivent asymptotiquement l'état désiré.

### 4.4.3 Simulation numérique

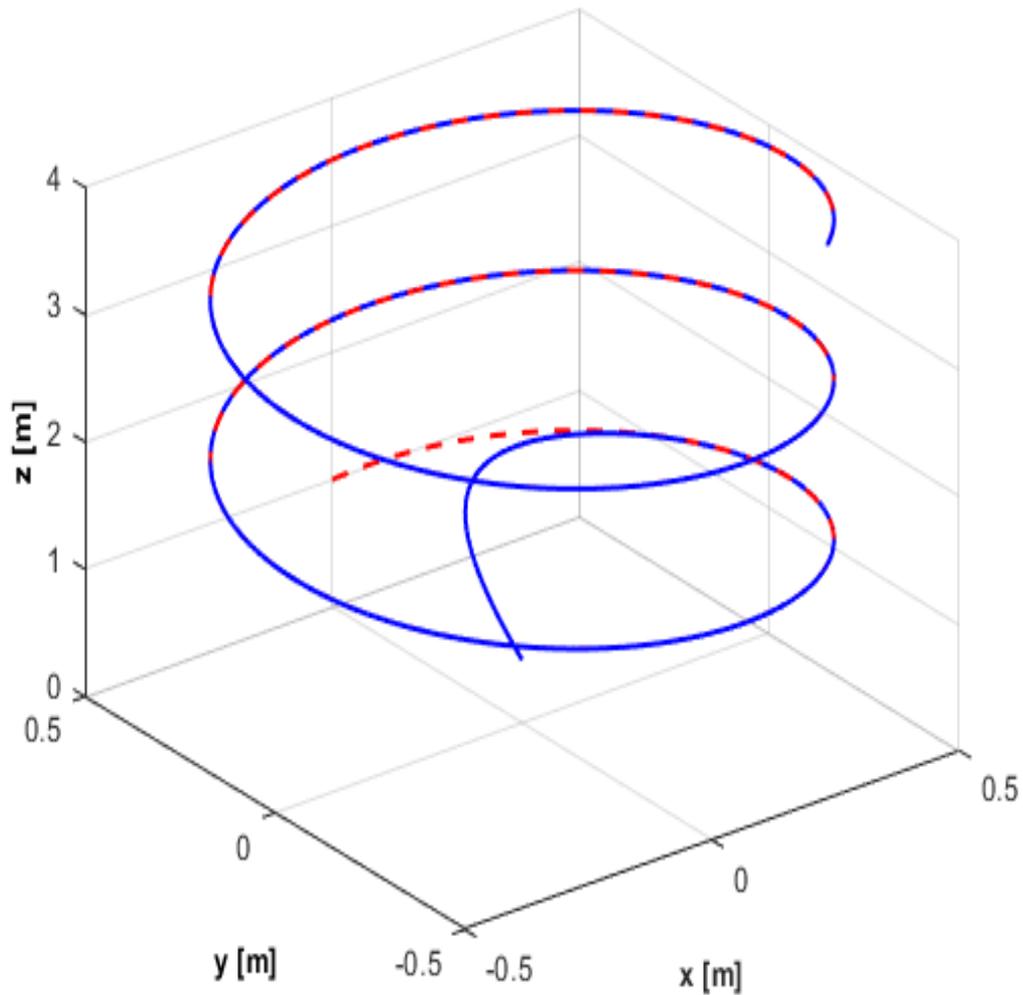
Dans cette sous-section, des simulations numériques sont effectuées pour illustrer les résultats théoriques de la section précédente. La loi de commande appliquée est adaptative et

les paramètres sont variants dans le temps. La trajectoire de référence est donnée par :

$$\begin{cases} x_d = 0.5 \cos(t/2); \\ y_d = 0.5 \sin(t/2) \\ z_d = 1 + (t/10). \end{cases} \quad (4.76)$$

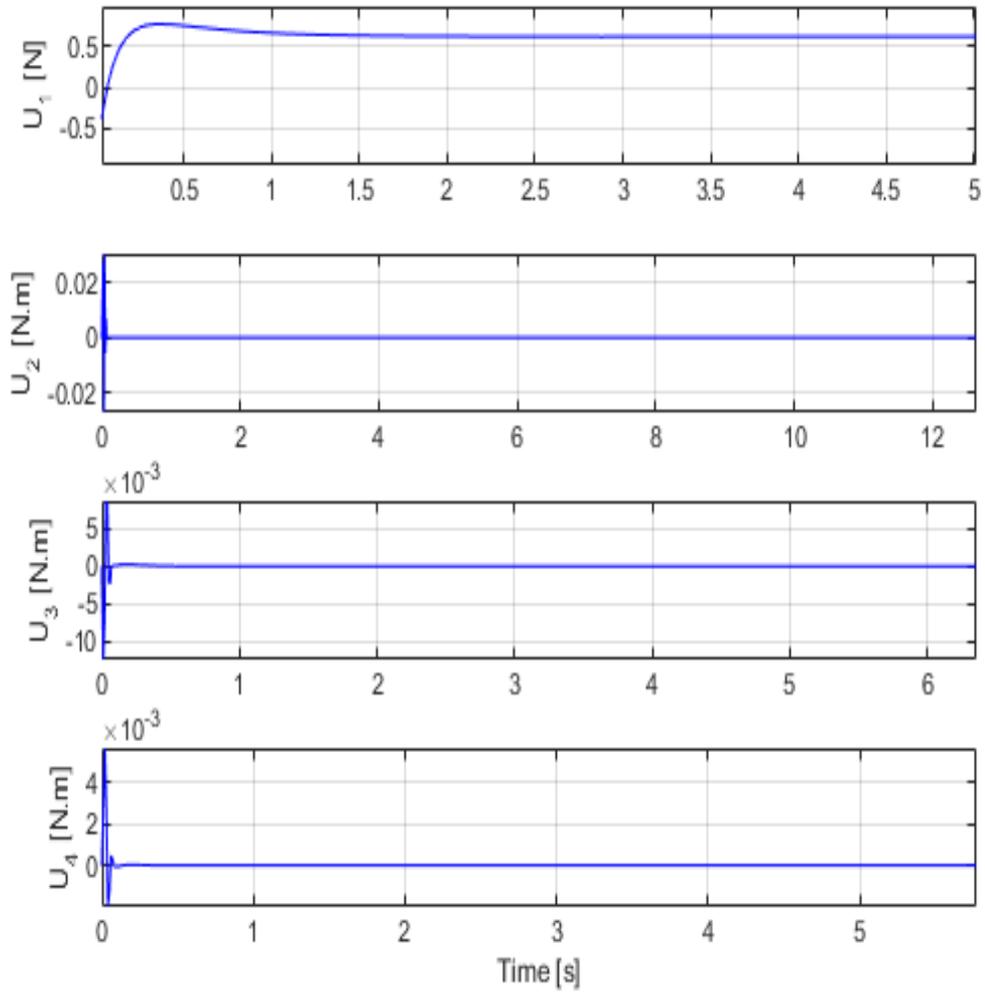
### **Résultats de simulations : Commande BLF**

Dans cette partie nous exposons les résultats de simulation dans le cas où la fonction avec barrière est symétrique.



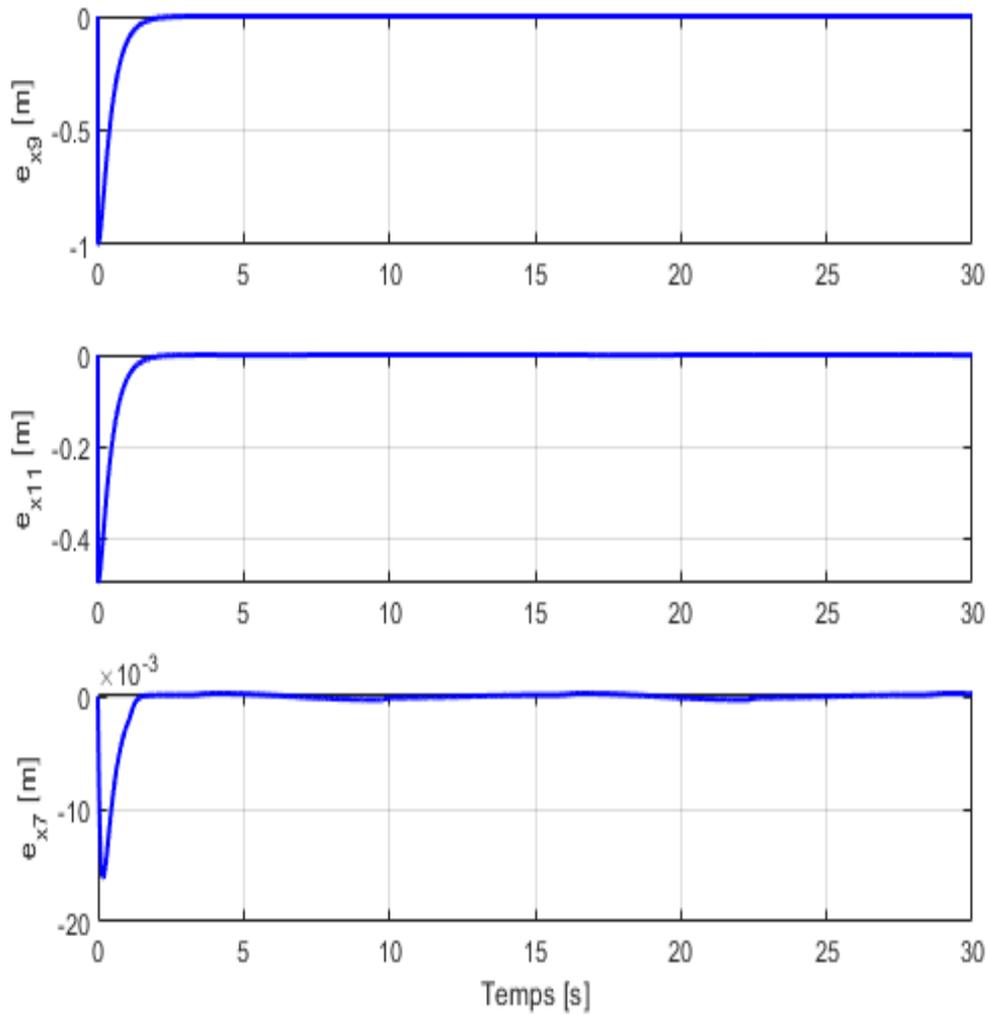
**Figure 4.22:** Trajectoire du quadrotor en 3D (BLF).

La figure 4.22 représente l'évolution du drone selon les trois axes sous l'action du loi de commande robuste en utilisant une fonction symétrique avec barrière. On voit bien que la commande assure la poursuite désirée. La courbe en rouge représente la trajectoire réelle du drone et la courbe en bleu représente la trajectoire de référence. Au bout de 5 secondes la trajectoire du drone converge vers la trjectoire de référence.



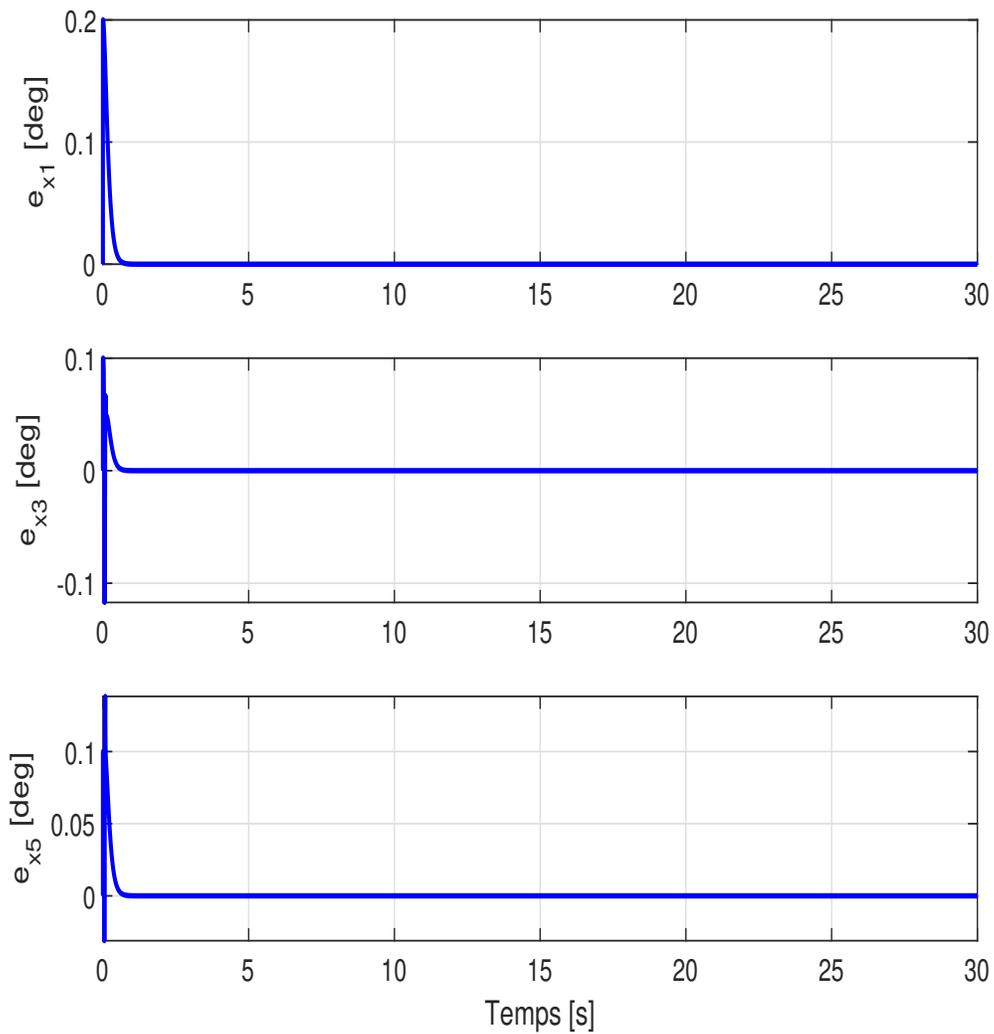
**Figure 4.23:** Commande pour la poursuite de trajectoire (BLF).

La figure 4.23 représente les commandes en force et en moment nécessaire pour atteindre la trajectoire de référence et rester sur la même trajectoire.



**Figure 4.24:** Évolution de l'erreur en position en fonction du temps (BLF).

La figure 4.24 représente l'erreur entre la position réelle du drone et la position désirée. Il est clair que l'erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. Par exemple  $e_{x_9}$  tend vers zéro c'est à dire la position réelle  $x$  converge vers la position désirée  $x_d$ .



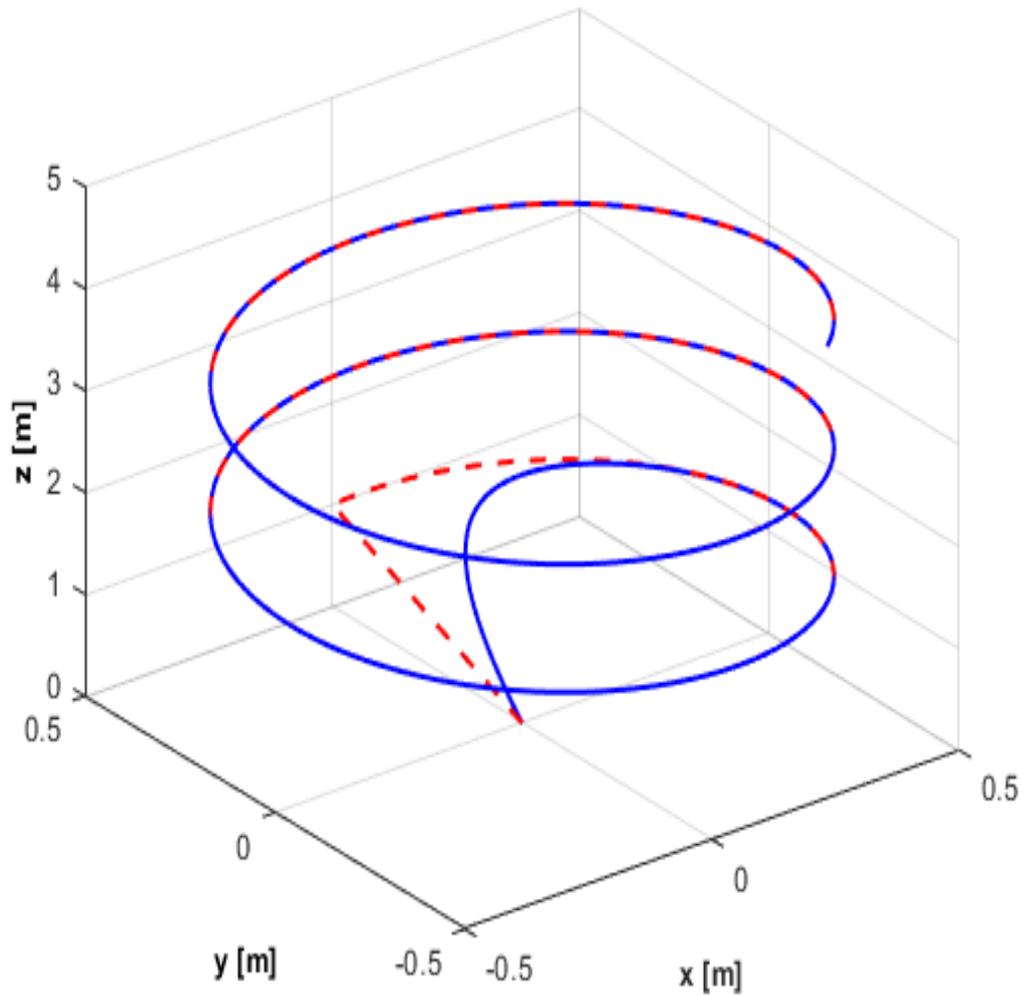
**Figure 4.25:** Évolution de l'erreur en orientation en fonction du temps (BLF).

La figure 4.25 représente l'erreur entre l'orientation réelle du drone et la position désirée.

Il est clair que l'erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. Par exemple  $e_{x_5}$  tend vers zéro c'est à dire l'angle réelle  $\psi$  converge vers l'angle désirée  $\psi_d$ .

## Résultats de simulations : Commande ABLF

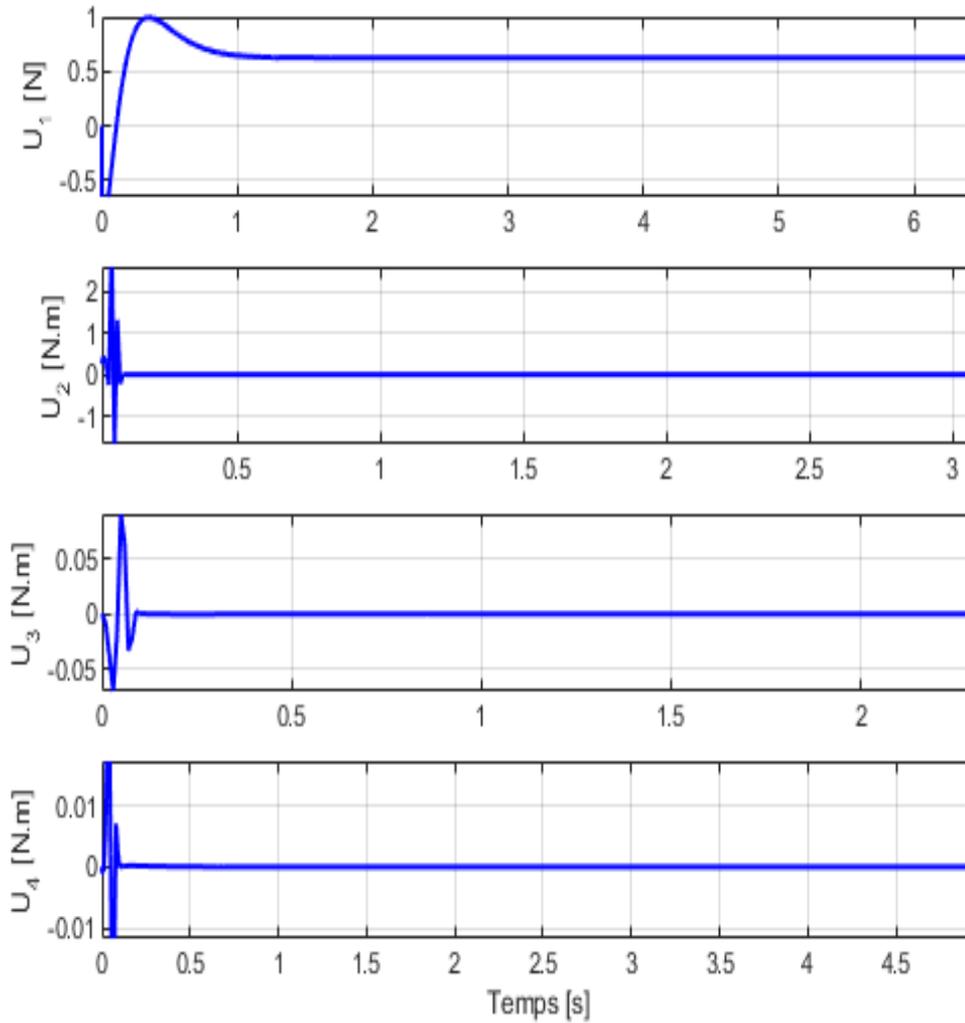
Dans cette partie nous exposons les résultats de simulation dans le cas où la fonction avec barrière est asymétrique.



**Figure 4.26:** Trajectoire du quadrotor en 3D (ABLF).

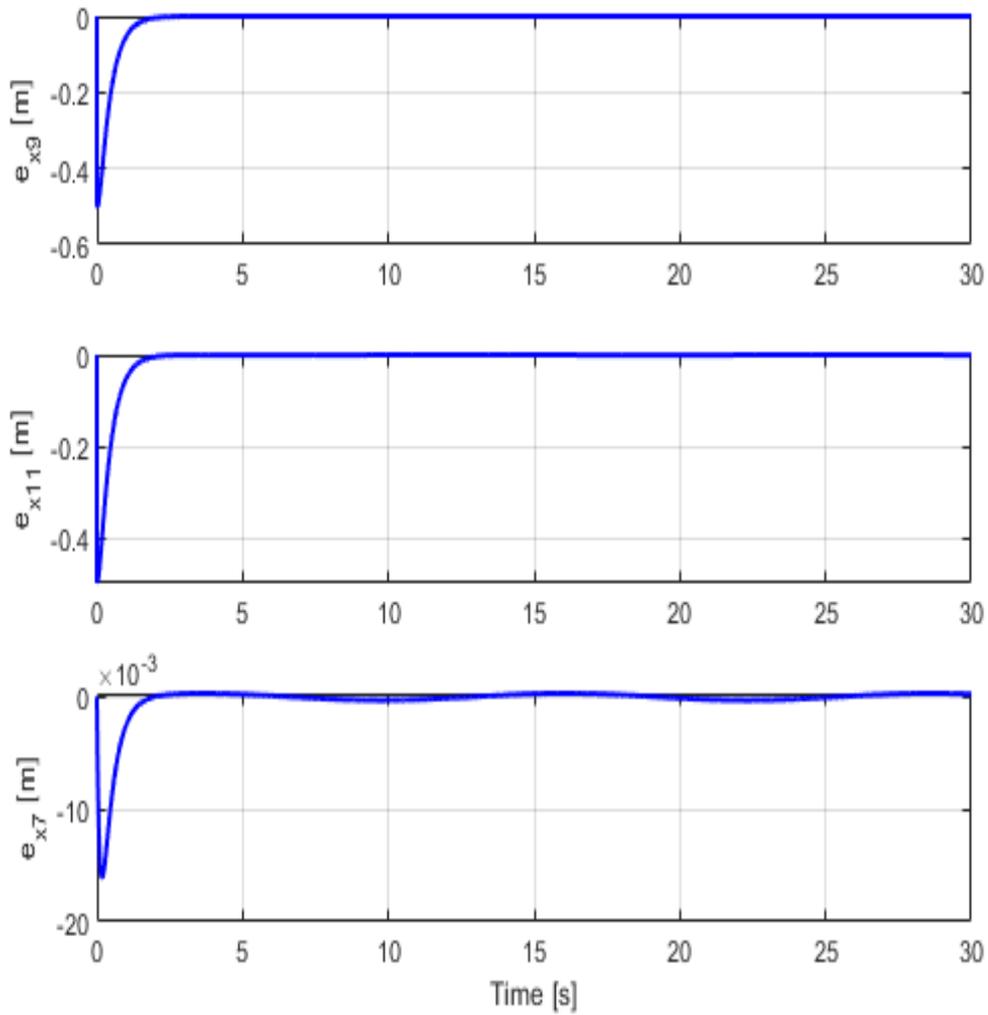
La figure 4.26 représente l'évolution du drone selon les trois axes sous l'action de loi de commande adaptative en utilisant une fonction asymétrique avec barrière. On voit bien

que la commande assure la poursuite désirée. La courbe en rouge représente la trajectoire réelle du drone et la courbe en bleu représente la trajectoire de référence. Au bout de 5 secondes la trajectoire du drone converge vers la trajectoire de référence.



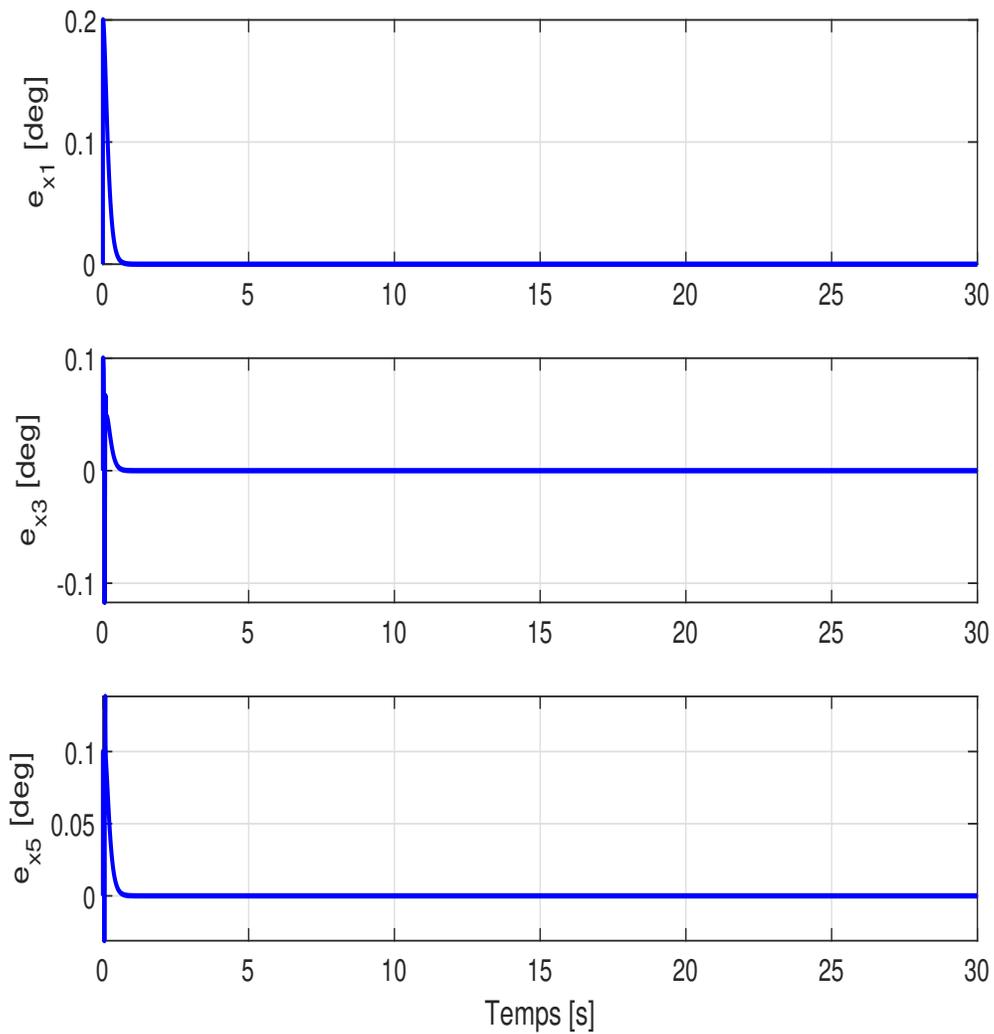
**Figure 4.27:** Commande pour la poursuite de trajectoire (ABLF).

La figure 4.27 représente la commande en force et en moments nécessaire pour atteindre la trajectoire de référence et rester sur la même trajectoire.



**Figure 4.28:** Évolution de l'erreurs en position en fonction du temps (ABLF).

La figure 4.28 représente l'erreurs entre la position réelle du drone et la position désirée. Il est claire que l'erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. Par exemple  $e_{x_9}$  tend vers zéro c'est à dire la position réelle  $x$  converge vers la position désirée  $x_d$ .



**Figure 4.29:** Évolution de l'erreur en orientation en fonction du temps (ABLF).

La figure 4.29 représente l'erreurs entre l'orientation réelle du drone et la position désirée.

Il est claire que l'erreur  $e_{x_i}$  converge vers un voisinage proche de zéro. Par exemple  $e_{x_5}$  tend vers zéro c'est à dire l'angle réelle  $\psi$  converge vers l'angle désirée  $\psi_d$ .

# Conclusions et perspectives

Cette étude se situe dans le domaine du contrôle des véhicules aériens autonomes sous-actionnés. Plus précisément, on s'est intéressé à l'étude de la poursuite de trajectoires d'un drone de type quadrotor. Le quadrotor est un système mécanique non linéaire. Sa dynamique hautement couplée rend la modélisation précise de ce type d'appareils télécommandés difficile à obtenir et à concevoir. Une telle modélisation, par le formalisme de Newton-Euler, facilite par la suite la tâche pour trouver une solution pour commander le système avec une meilleure stabilisation.

Une commande non linéaire basée sur des fonctions avec barrière combinée avec la technique de backstepping, a été développée afin d'assurer la poursuite d'une trajectoire de référence.

Dans le but d'améliorer la qualité du contrôle non linéaire élaboré et d'éviter les défauts de stabilité et l'incertitude des paramètres qui se produisent dans le système dynamique, nous avons fait une étude de robustesse de cette commande en ajoutant des termes de perturbations dans le modèle du drone.

Aussi nous avons étudié le cas où le système n'est pas certain et les paramètres sont variables. Dans ce cas une commande adaptative a été élaborée.

Par la suite, des simulations du modèle, conçue à l'aide du logiciel Matlab pour valider les différents contrôleurs de poursuite par une trajectoire complexe dont la dérivée par rapport au temps n'est pas nulle. En effet, les résultats ont montré la performance de ces commandes et le quadrotor converge vers la trajectoire de référence désirée.

Il sera important d'examiner en perspectives la robustesse des lois de commande élaborées vis à vis aux perturbations de différentes natures. Il est possible de construire des commandes basées sur les observateurs et de comparer les résultats avec d'autres types de commande, par exemple un PID. Aussi, l'implémentation des lois de commandes sur un quadrotor réelle.

# Bibliography

- [1] Alqaisi, Walid, “Nonlinear Control and Perturbation Compensation in UAV Quadrotors,” Université de Nice Sophia Antipolis, Thèse de doctorat électronique, Montréal, École de technologie supérieure, (2019).
- [2] L. Martins, C. Cardeira and P. Oliveira, “Feedback linearization with zero dynamics stabilization for quadrotor control,” *J. Intell. Robotic Syst.* vol. 101, no. 1, pp. 1 a 17 (2021).
- [3] K. Mueller, M. Fennel and Trommer, F. Gert, “Model predictive control for vision-based quadrotor guidance,” in *Proc. IEEE/ION Position, Location Navigat. Symp.* Portland, OR, USA, pp. 50-61 (2020).
- [4] D. Lee, H. J. Kim and S. Sastry, “Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter, Int. J. Control,” *Autom., Syst.* vol. 7, no. 3, pp. 419-428 (2009).
- [5] C. Chung-Cheng and C. Yen-Ting, “Feedback linearized optimal control design for quadrotor with multi-performances,” *IEEE Access.* VOLUME 9, pp. 26674-26695, (2021).
- [6] Y. Zhang, W. Wang, P. Huang and Z. Jiang, “Monocular Vision-based Sense and

- Avoid of UAV Using Nonlinear Model Predictive Control,” *Robotica*. 37(9), 1582-1594 (2019).
- [7] S. I. Han, J. Y. Cheong and J. M. Lee, “Barrier Lyapunov function based sliding mode control for guaranteed tracking performance of robot manipulator,” *Math. Problems Eng.* pp. 1-9 (2013).
- [8] A. Rauh and L. Senkel, “Interval methods for robust sliding mode control synthesis of high-temperature fuel cells with state and input constraints,” *Variable-Structure Approaches*. Springer, pp. 53-85 (2016).
- [9] W. Qin, “Unit sliding mode control for disturbed crowd dynamics system based on integral barrier Lyapunov function,” *IEEE Access*. vol. 8, pp. 257-264 (2020).
- [10] C. Dong, Y. Liu, and Q. Wang, “Barrier Lyapunov function based adaptive finite-time control for hypersonic flight vehicles with state constraints,” *ISA Trans.* vol. 96, pp. 163-176 (2020).
- [11] H. Ye, H. Jiang, S. Ma, B. Tang and L. Wahab, “Linear model predictive control of automatic parking path tracking with soft constraints,” *International Journal of Advanced Robotic Systems*. vol. 16, no 3 (2019).
- [12] M. S. Mahmoud and M. Saad, “Robust adaptive multilevel control of a quadrotor,” *IEEE Access*. vol. 8, pp. 167684-167692 (2020).
- [13] M. Hossny, A. El-Badawy and R. Hassan, “Fuzzy model predictive control of a quadrotor unmanned aerial vehicle,” in *Proc. Int. Conf. Unmanned Aircr. Syst.*, Athens, Greece, pp. 1-4 (2020).

- [14] K. Mueller, M. Fennel and Trommer, F. Gert, "Model predictive control for vision-based quadrotor guidance," in *Proc. IEEE/ION Position, Location Navigat. Symp.* Portland, OR, USA, pp. 50-61 (2020).
- [15] Y. Zhang, W. Wang, P. Huang and Z. Jiang, "Monocular Vision-based Sense and Avoid of UAV Using Nonlinear Model Predictive Control," *Robotica*. 37(9), 1582-1594 (2019).
- [16] H. Khebbache, "Tolérance aux défauts via la méthode backstepping des systèmes non linéaires: application système UAV de type quadrotor," 2018.
- [17] M. S. Mahmoud and M. Saad, "Robust adaptive multilevel control of a quadrotor," *IEEE Access*. vol. 8, pp. 167684-167692 (2020).
- [18] M. Labbadi and M. Cherkaoui, "Robust adaptive nonsingular fast terminal sliding-mode tracking control for an uncertain quadrotor UAV subjected to disturbances," *ISA Trans.* vol. 99, pp. 290-304, Apr. (2020).
- [19] A. Das, F. Lewis and K. Subbaro, "A Modified backstepping control of quadrotor," *J. Intell. Robot. Syst.* vol. 56, pp. 127-151 (2009).
- [20] J. Liu, W. Gai, J. Zhang and Y. Li, "A Nonlinear adaptive backstepping with ESO for the quadrotor trajectory tracking control in the multiple disturbances," *Int. J. Control, Autom. Syst.* vol. 17, no. 11, pp. 2754-2768 (2019).
- [21] K. Alexis, G. Nikolakopoulos and A. Tzes, "Model predictive quadrotor control: Attitude, altitude and position experimental studies," *IET Control Theory Appl.* vol. 6, no. 12, pp. 1812-1827 (2012).

- [22] J. Yang and W. X. Zheng, "Offset-free nonlinear MPC for mismatched disturbance attenuation with application to a static var compensator," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 61, no. 1, pp. 49-53, (2014).
- [23] S. Sihao, R. Angel, F. Philipp, K. Elia and D. Scaramuzza, "A comparative study of nonlinear mpc and differential-flatness-based control for quadrotor agile flight," *IEEE Transactions on Robotics*. pp. 1-17 (2022).
- [24] N. Gupta and M. Kothari, "Modeling and Control of Inverted Flight of a Variable-Pitch Quadrotor," 2017.
- [25] Y. Yang and Y. Yan, "Attitude regulation for unmanned quadrotors using adaptive fuzzy gain-scheduling sliding mode control," *Aerosp. Sci. Technol.* vol. 54, pp. 208-217 (2016).
- [26] H. Ríos, R. Falcón, O. A. González and A. Dzul, "Continuous sliding mode control strategies for quadrotor robust tracking: Real-time application," *IEEE Trans. Ind. Electron.* vol. 66, no. 2, pp. 1264-1272 (2019).
- [27] Z. Hou, P. Lu and Z. Tu, "Nonsingular terminal sliding mode control for a quadrotor UAV with a total rotor failure," *Aerosp. Sci. Technol.* vol. 98, (2020).
- [28] M. Labbadi and M. Cherkaoui, "Robust adaptive nonsingular fast terminal sliding-mode tracking control for an uncertain quadrotor UAV subjected to disturbances," *ISA Trans.* vol. 99, pp. 290-304, Apr. (2020).
- [29] M. Basri, M. Abidin and N. Subha, "Simulation of backstepping-based nonlinear control for quadrotor helicopter," *Applications of Modelling and Simulation*. vol. 2, no. 1, pp. 34-40 (2018).

- [30] M. Wang, B. Chen and C. Lin, “Fixed-time Backstepping control of quadrotor trajectory tracking based on neural network,” *IEEE Access*. vol. 8, pp. 177092-177099 (2020).
- [31] C. Fuyang, J. Rongqiang, Z. Kangkang, J. Bin and T. Gang, “Robust Backstepping Sliding-Mode Control and Observer-Based Fault Estimation for a Quadrotor UAV,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Volume: 63, Issue: 8, pp. 5044 - 5056 (2016).
- [32] Y. Wei, C. Li, Y. Sun and G. Ma, “Backstepping approach for controlling a quadrotor using Barrier Lyapunov Functions,” *Proceedings of the 2017 Chinese Control Conference*. 6235-6239 (2017).
- [33] H. Zhongjun, C. Qiang, H. Yi and C. Cong, “Barrier Lyapunov Function Based Finite-Time Backstepping Control of Quadrotor with Full State Constraints,” *Proceedings of the 37th Chinese Control Conference*. July 25-27, Wuhan, China (2018).
- [34] S. I. Han, J. Y. Cheong and J. M. Lee, “Barrier Lyapunov function based sliding mode control for guaranteed tracking performance of robot manipulator,” *Math. Problems Eng.* pp. 1-9 (2013).
- [35] A. Rauh and L. Senkel, “Interval methods for robust sliding mode control synthesis of high-temperature fuel cells with state and input constraints,” *Variable-Structure Approaches*. Springer, pp. 53-85 (2016).
- [36] C. Fu, W. Hong, H. Lu, L. Zhang, X. Guo, and Y. Tian, “Adaptive robust backstepping attitude control for a multi-rotor unmanned aerial vehicle with time-varying output constraints,” *Aerosp. Sci. Technol.* vol. 78, pp. 593-603 (2018).

- [37] T. Jiang , D. Lin and T. Song, “Finite-time backstepping control for quadrotors with disturbances and input constraints,” *IEEE Access*. vol. 6, pp. 62037-62049 (2018).
- [38] N. Liu, X. Shao, J. Li, and W. Zhang, “Attitude restricted back-stepping anti-disturbance control for vision based quadrotors with visibility constraint,” *ISA Trans.* vol. 100, pp. 109-125 (2020).
- [39] A. T. Nguyen, N. Xuan-Mung and S. K. Hong, “Quadcopter adaptive trajectory tracking control: A new approach via backstepping technique,” *Appl. Sci.* vol. 9, no. 18, 3873 (2019).
- [40] D. Shihong, P. Ju H and C. Chih-Chiang, “Second-order sliding mode controller design with output constraint,” *Automatica*. vol. 112, Art. no. 108704 (2020).
- [41] T. Keng Peng and G. Shuzhi Sam and T. Eng Hock, “Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems,” *Automatica*. 45, pp. 918-927 (2009).
- [42] Ludovic Faubourg, “Construction de fonctions de Lyapunov contrôlées et stabilisation non-linéaire, ” *Université de Nice Sophia Antipolis*, Thèse de doctorat, (2001).
- [43] A. Isidori, “Nonlinear control systems, ” *Springer-Verlag*, (1995), London, third edition.
- [44] H. K. Khalil, “Nonlinear Systms, ” *Prentice Hall*, (2002).
- [45] Zabczyk, Jersy, “Mathematical control theory, ” *Birkhäuser*,(1992), ISBN 3-7643-3645-5.
- [46] N. Rouche and P. Habets and P. Laloy, “Stability theory by Lyapunov’s direct method, ” *Applied mathematical sciences*, (1977), Springer.

- [47] T. Keng Peng and G. Shuzhi Sam and T. Eng Hock, "Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems," *Automatica*. 45, pp. 918-927 (2009).
- [48] A. Khadhraoui, A. Zouaoui, M. Saad, "Barrier Lyapunov Function and Adaptive Backstepping Based Control of a Quadrotor UAV, " *Robotica*, (2023).
- [49] Adel Khadhraoui, and Mohamad Saad, "Barrier Lyapunov Function Based Trajectory Tracking Controller of a Quadrotor UAV", In Proceedings of the *IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*, (2023).
- [50] T. Hu, Z. Lin and B. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*. 38, pp. 351-359 (2020).
- [51] C. K. Wong and Y. Y. Lee, "Lane-Based Traffic Signal Simulation and Optimization for Preventing Overflow," *Mathematics*. vol. 8, no. 1368 (2020).