

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

ÉCOLE DE GÉNIE

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU CHAUFFAGE
DIÉLECTRIQUE DES BIOCOMPOSITES MULTICOUCHES**

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR

HOUDA BEN ALI

MARS 2020



Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans [Depositum](#), site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous. L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) obtained the permission of the author to use a copy of this document for nonprofit purposes in order to put it in the open archives [Depositum](#), which is free and accessible to all. The author retains ownership of the copyright on this document. Neither the whole document, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

DÉDICACE

Louange à Allah Maître des univers, le miséricordieux le tout miséricordieux

Je dédie ce travail à

L'âme de mon père (Habib), à ma mère (Samia),

*"Ô Seigneur fais-leur miséricorde à tous deux comme ils m'ont élevée lorsque j'étais
petite"*

À mes deux frères Hadi et Aymen !

REMERCIEMENT

Je remercie sincèrement mon directeur de recherche, le Professeur Fouad Erchiqui pour sa pédagogie souple, le partage de ses connaissances, sa disponibilité et la chaleur de nos échanges qui ont créé un climat propice pour la réussite de ce projet.

Je remercie aussi les membres du jury en l'occurrence le Professeur Fouad Slaoui Hasnaoui d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance et le Professeur Guyh Dituba Ngoma d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Mes remerciements vont également à Theubou Tameghe Tommy Andy pour son aide et son appui durant ce projet.

Je remercie beaucoup ma famille, mes amis et mes collègues.

Finalement, j'espère que toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réussite de ce projet trouve ici mes remerciements les plus sincères.

Table des matières

DÉDICACE	III
REMERCIEMENT	IV
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	8
1.1 Contexte et problématique	8
1.2 Objectifs.....	9
1.3 Méthodologie	10
1.4 Hypothèses.....	11
CHAPITRE 2 : REVUE DE LITTÉRATURE	12
2.1 Généralités sur les composites bois-polymères	12
2.2 Constituants des matériaux CBP.....	14
2.2.1 Fibres de bois	15
2.2.2 Polymères thermoplastiques.....	16
2.2.3 Agents de couplage	17
2.3 Chauffage des bio-composites	17
2.3.1 Chauffage conventionnel en plasturgie	17
2.3.2 Matériaux diélectriques	18

2.3.3	Chauffage diélectrique	19
2.3.4	Propriétés diélectriques des CBP	19
CHAPITRE 3 : DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE		21
3.1	Formulation par éléments finis de l'équation d'énergie 1D	22
3.2	Expression mathématique de l'énergie dissipée par micro-ondes dans un multicouche.....	23
3.2.1	Énergie dissipée par micro-ondes dans un diélectrique homogène et isotrope.....	28
3.2.2	Expression analytique de l'énergie dissipée par micro-ondes dans un diélectrique multicouche	31
CHAPITRE 4 : ÉTUDES DE CAS.....		34
4.1	Validation numérique d'un bloc glace-eau	34
4.2	Validation numérique d'un bloc glace-eau-glace	36
4.3	Simulation numérique du chauffage diélectrique des composites bois-polymère	39
4.3.1	Étude du cas 1 : Multicouche A-B-C	40
4.3.2	Étude du cas 2 : Multicouche C-B-A	44
4.4	Interprétation des résultats	47
4.4.1	Amplitude et puissance	47
4.4.2	Température	48

CHAPITRE 5 : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	50
RÉFÉRENCES.....	52

Liste des Figures

Figure 2.1 Classification des matériaux composites selon leurs structures (Bourai 2010)	13
Figure 2.2 Structure de fibres de bois (Jaouen 2007).....	15
Figure 3.1 Les composants électromagnétiques d'une onde (Ay et Sahin 2004)	23
Figure 3.2 Transit de puissance lorsqu'une onde électromagnétique atteint un matériau électrique (Callebaut 2007)	30
Figure 3.3 Schéma représentatif du milieu diélectrique à trois couches étudiées.....	32
Figure 4.1 Amplitude du champ électrique en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert.....	35
Figure 4.2 Puissance absorbée par le composite en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert.....	35
Figure 4.3 Bloc multicouche glace-eau-glace.....	36
Figure 4.4 Amplitude du champ électrique en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert.....	37
Figure 4.5 Puissance absorbée par le composite en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert.....	37
Figure 4.6 Amplitude du champ électrique en fonction de la profondeur de pénétration, avec la méthode analytique et loi de Lambert du CBP	40

Figure 4.7 Puissance absorbée pas le composite en fonction de la profondeur de pénétration.....	41
Figure 4.8 Profil de la température pendant 6 minutes du CBP par le modèle 1D.....	43
Figure 4.9 Amplitude du champ électrique en fonction de profondeur de pénétration, avec la méthode analytique et loi de Lambert du CBP	44
Figure 4.10 Puissance absorbée par le composite en fonction de la profondeur de pénétration.....	45
Figure 4.11 Profil de la température pendant 6 minutes du CBP par le modèle 1D...	46
Figure 4.12 Profil de température pendant 6 minutes du CBP pour une épaisseur de 16 mm par le modèle 1D.....	47

Liste des tableaux

Tableau 4.1 Les propriétés diélectriques de la glace et l'eau.....	36
Tableau 4.2 Les propriétés diélectriques et thermiques des CBP	40

Nomenclature

Symbole Latin

SYMBOLE	GRANDEUR	UNITÉ
D_p	Profondeur de pénétration	m
t	Temps	s
T	Température	°C
C	Vitesse de la lumière	m/s
F	Fréquence	HZ
K	Constante de propagation	NA
A	Amplitude	V/m
Q	Puissance absorbée	W
C_p	Capacité thermique	J/k
K	Conductivité thermique	w/m.°C
ρ	Densité	NA

Vecteurs

SYMBOLE	GRANDEUR	UNITÉ
S	Vecteur de Poynting	W.m ⁻²
E, E*	Champ électrique et son conjugué	V. m ⁻¹
H, H*	Champ magnétique et son conjugué	T
J	Flux de courant	A. m ⁻²
B	Induction magnétique	C. m ⁻²
D	Déplacement électrique	NA

Symbole grecs

SYMBOLE	GRANDEUR	UNITÉ
μ, μ_0	Perméabilités du milieu et du vide	H. m ⁻¹
ω	Pulsation	rad/s
σ	Masse volumique	Kg. m ⁻³
$\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon_0$	Permittivités diélectriques	C.V-1.m-1
κ', κ''	Permittivités diélectriques relatives	F/m
α	Facteur d'atténuation	m-1
θ	Angle de phase	rad

Résumé

Le chauffage diélectrique par micro-ondes est une technique qui consiste à chauffer des matériaux peu conducteurs électriquement et, généralement, thermiquement. Cette méthode est utilisée dans plusieurs secteurs de l'ingénierie tels que l'agroalimentaire, le traitement phytosanitaire des produits en bois et le séchage des structures. Toutefois, le chauffage par micro-ondes des multicouches, à base de composites bois-polymère (CBP), ne semble pas être élucidé dans la littérature. C'est dans ce cadre que le projet est inscrit et porte sur le chauffage diélectrique d'un CBP multicouche (trois couches). Pour cela, une approche couplant l'équation de l'énergie (1D), d'une part, avec les équations de Maxwell (1D) et, d'autre part, avec le modèle de Berr-Lambert est utilisée.

Le CBP étudié est composé de 70% de polypropylène PP et de 30% de fibres de bois (*Leucaena Leucocephala*). Pour cette étude; trois tailles de ce dernier ont été considérées : 100, 200 et 500 μm . En ce qui concerne la modélisation numérique, on a utilisé la méthode des éléments finis pour l'équation d'énergie (1D). La fréquence des micro-ondes utilisée est 2,47 GHz et les propriétés thermo-physiques et diélectriques de chaque couche sont considérées constantes. Les simulations numériques ont permis de confronter et de valider les résultats obtenus vis-à-vis ceux issus de la littérature. Ensuite, l'impact des micro-ondes sur la puissance dissipée dans les multicouches et sur l'évolution et la distribution de la température ont été calculées. Les résultats obtenus, montrent que la dissipation maximale de l'énergie par micro-ondes est localisée dans la couche intermédiaire renforcée par les fibres du bois de taille 200 μm .

Mots clés : chauffage diélectrique par micro-ondes, composites bois-polymères, profil de température, dissipation d'énergie, Modélisation, éléments finis.

Abstract

Dielectric heating by microwave is a technique which consists in heating low-conductive materials electrically and, generally, thermally. This method is used in several engineering sectors such as the agri-food, the phytosanitary treatment of wooden products and the drying of structures. However, microwave heating of multilayers, based on wood-polymer composites (WPC), does not seem to have been elucidated in the literature. It is within this framework that the project is inscribed and concerns the dielectric heating of a multilayer PBC (three layers). For this, an approach coupling the equation of energy (1D), on the one hand, with the Maxwell equations (1D) and, on the other hand, with the Berr-Lambert model is used. The WPC studied is composed of 70% PP polypropylene and 30% wood fibers (*Leucaena Leucocephala*). For this study, three sizes of the latter were considered: 100, 200 and 500 μm . For numerical modeling, we used the finite element method for the energy equation (1D). The microwave frequency used is 2.47 GHz and the thermo-physical and dielectric properties of each layer are considered to be constant. Numerical simulations made it possible to compare and validate the results obtained with those obtained from the literature. Then, the impact of microwaves on the power dissipated in the multilayers and on the evolution and distribution of the temperature were calculated. The results obtained show that the maximum dissipation of energy by microwave is localized in the intermediate layer reinforced by the wood fibers of size 200 μm .

Keywords: microwave dielectric heating, wood-polymer composites, temperature profile, energy dissipation, Modeling, finite elements.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1 Contexte et problématique

Conditionnée par les exigences environnementales et économiques, la tendance des marchés montre que les bio-composites auront une influence marquée sur plusieurs secteurs de l'industrie manufacturière. La valorisation des fibres en bois serait une initiative stratégique pour la fabrication ou l'amélioration de produit. Effectivement, la fabrication des bio-composites, de type bois-plastique (CBP), bénéficiant de l'avantage des caractéristiques intrinsèques des fibres du bois et des plastiques tout en réduisant les coûts de production. Ces renforts naturels possèdent plusieurs qualités comparées aux renforts minéraux: faible masse volumique, faible coût et moins abrasifs. Leur teneur élevée en cellulose les rend facilement biodégradables et recyclables. De plus, des études ont démontré que les interactions entre la matrice polymérique et la distribution de la charge en bois sont des facteurs déterminants quant à l'obtention de matériaux ayant de bonnes propriétés mécaniques et diélectriques. À cela s'ajoute, la résistance des CBP aux détériorations biologiques.

Les composites bois-polymères sont, de plus en plus, utilisés dans diverses industries, notamment dans le secteur de la construction et la production industrielle de certains meubles, planchers et pièces de véhicule automobile. Malheureusement, il semble que les CBP sont de très mauvais conducteurs thermiques lorsqu'ils sont exposés à la

radiation infrarouge et, par contre, on soupçonne que les composites bois-plastique auraient un niveau de performance intéressant au niveau de chauffage diélectrique; ce qui permettrait leurs utilisations en ingénierie. Cet intérêt est basé sur les divers avantages qu'offre cette technique de chauffage par micro-ondes comparativement aux techniques de chauffage conventionnelles; tel que le chauffage par convection. Concernant le bois, cette technique semble assurer un chauffage rapide et uniforme sur toute l'épaisseur du matériau et permet également de réduire le temps et le coût du traitement et d'économiser la consommation d'énergie (Ay et Sahin 2004, Barba et d'Amore 2012). Dans le cas de multicouche, à base de thermoplastique et de fibres en bois, il ne semble pas exister des études sur la potentialité de l'utilisation des micro-ondes pour leurs chauffages. C'est dans ce contexte que ce projet de mémoire s'inscrit et a pour objectif de caractériser la réponse thermique d'un multicouche (trois couches) aux micro-ondes. La majorité des travaux rencontrés sont plus concentrés sur la caractérisation diélectrique du bois et de CBP (Gaur et al. 1982, Azlan et al. 2014, Elloumi 2016).

1.2 Objectifs

L'objectif général de ce travail est d'étudier numériquement, à l'aide de la méthode des éléments finis (1D), le chauffage par micro-onde d'un multicouche, de type bio-composite à base d'une matrice thermoplastique (le polypropylène, PP) et fibres de bois, à trois couches CBP en fonction de la taille de fibre.

Plus spécifiquement ce projet vise à :

- Quantifier la chaleur dissipée par la micro-onde dans chaque couche de composite;

- Comparer la puissance dissipée, par micro-onde dans le multicouche, obtenue par le modèle exacte (Équations de Maxwell) vis-à-vis le modèle approximatif de Beer-Lambert;
- Coupler l'équation de la chaleur avec le terme source électromagnétique;
- Utiliser la méthode des éléments (1D) pour déterminer le profil de la température induit dans chaque couche.

1.3 Méthodologie

La méthodologie adoptée pour étudier le chauffage diélectrique par micro-ondes du multicouche est la suivante :

1. Bibliographie sur le chauffage diélectrique des bio-composites
2. Mise en équations analytique du problème de chauffage diélectrique :
 - a. Expression analytique de l'équation d'énergie
 - b. Expression du terme source associé à la dissipation de la chaleur par micro-ondes dans le système multicouche
3. Formulation numérique, par la méthode des éléments finis. Du problème de chauffage diélectrique :
 - a. Discrétisation spatiale et formulation algébrique du système à résoudre
 - b. Discrétisation temporelle pour l'analyse transitoire du problème de chauffage diélectrique
4. Calcul de la puissance dissipée par les micro-ondes dans chaque couche du matériau
5. Validation numérique vis-à-vis la littérature
6. Application numérique et analyse du chauffage du multicouche PP-fibres du bois
7. Conclusions et perspectives

1.4 Hypothèses

- Incidence normale des micro-ondes sur le multicouche
- Micro-ondes : planes
- Milieu multicouche : isotrope et homogène
- Propriétés thermophysiques du multicouche : constantes

Pour mener ce projet on a considéré les chapitres suivants :

Chapitre 1 : Introduction générale;

Chapitre 2 : Revue de littérature;

Chapitre 3 : Développement théorique et numérique de chauffage diélectrique;

Chapitre 4 : Validation numérique et études de cas;

Chapitre 5 : Conclusions et perspectives.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Généralités sur les composites bois-polymères

Les composites bois-polymères sont des matériaux fabriqués à partir d'un mélange de polymère et de fibres de bois souvent à l'état fondu. Ces bio-composites sont des matériaux pouvant être utilisés dans diverses applications, telles que les matériaux de construction, l'infrastructure municipale, des planchés, les intérieurs de portières des voitures, etc. Selon le type de renfort, les matériaux composites se présentent sous différente forme (Figure 2.1) :

- **Composites à renforts de particules**

Le renfort est considéré comme une particule si toutes ses dimensions sont approximativement égales et petites devant les autres dimensions du matériau. Les particules dures sont dispersées aléatoirement dans la matrice moins rigide.

- **Composites à renforts de paillettes**

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces particules minces est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

- **Composites à renforts de fibres**

Les renforts de ce type de composites se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques). Selon leurs applications, les fibres utilisées prennent la longueur de la pièce (fibres longues noyées dans une matrice isotrope avec orientation établie) ou coupées en petite longueur (fibres courtes dispersées dans la matrice, généralement sans orientation préférentielle).

- **Composites stratifiés**

Le composite est constitué par au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être composées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.

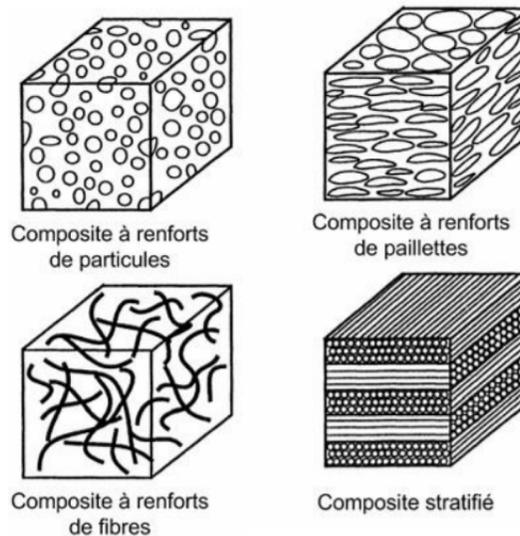


Figure 2.1 Classification des matériaux composites selon leurs structures (Bourai 2010)

L'intérêt porté aux CBP est une conséquence des considérations économique, environnementale et politique. En plus, la demande croissante en CBP s'explique par les multiples avantages qu'offre ce matériau comparativement aux plastiques. Les CBP sont des matériaux qui tendent à remplacer les plastiques notamment dans des applications nécessitant une rigidité supérieure. Les CBP possèdent généralement une meilleure performance thermique (isolation thermique) que les matières plastiques, ce qui pourrait permettre leur utilisation dans de nombreuses applications de construction structurale (Wechsler et Hiziroglu 2007). Sur le plan environnemental, la fabrication des bio-composites favorise l'utilisation de sous-produits naturels permettant de réduire la production de plastique ce qui le rend un matériau à caractère écologique. Sur le plan économique, le prix du plastique étant beaucoup plus cher que celui du bois sur le marché international, l'incorporation du bois dans les matériaux plastiques entraînerait une baisse du coût lié à une moindre utilisation de ces matériaux. Sur le plan technologique, les bio-composites sont des matériaux présentant une résistance élevée à la traction et une grande rigidité. Néanmoins, l'utilisation des bio-composites présente également quelques inconvénients. À titre d'exemple, l'incorporation de fibres de bois dans une matrice de plastique complique le recyclage de ces deux matériaux. De plus, le prix de ventes élevées des bio-composites (Nishino, Matsuda et al. 2003), leur apparence « synthétique » et leur résistance mécanique inférieure à celle du bois sont des obstacles à la progression des CBP (Wegst et Ashby 2004).

2.2 Constituants des matériaux CBP

Dans cette partie on présent les différents constituants des CBP à savoir les fibres de bois utilisées en tant que renforts, les polymères thermoplastiques de la matrice et les agents de couplage permettant d'assurer la liaison entre ces deux matériaux.

2.2.1 Fibres de bois

Le bois est un matériau de construction présentant de multiples avantages dont les principaux sont sa légèreté, sa capacité à absorber les chocs, son caractère isolant et sa facilité de transformation. Chaque variété d'essences offre une gamme de propriétés qui lui est spécifique. Ainsi, les propriétés d'un bois feuillu diffèrent de celles d'un bois résineux (Zobel 1981). Les bois résineux tels que le sapin ou l'épicéa, légers et solides, seront privilégiés pour des structures porteuses alors que les bois durables tels que le châtaignier ou le cèdre rouge, capables de résister aux intempéries, seront privilégiés dans des applications en extérieur. La fibre végétale de bois est constituée principalement de trois polymères organiques : la cellulose, les hémicelluloses et la lignine. Ces polymères sont agencés dans la paroi de la fibre d'une façon précise. Ces parois sont caractérisées par l'orientation des fibres de cellulose ainsi que par la proportion de lignines et d'hémicelluloses, qui assure la cohésion de la fibre végétale. (Jaouen 2007). Les proportions et le positionnement des différents constituants varient d'une variété d'essence à l'autre. La Figure 2.2 illustre schématiquement la structure d'une fibre de bois.

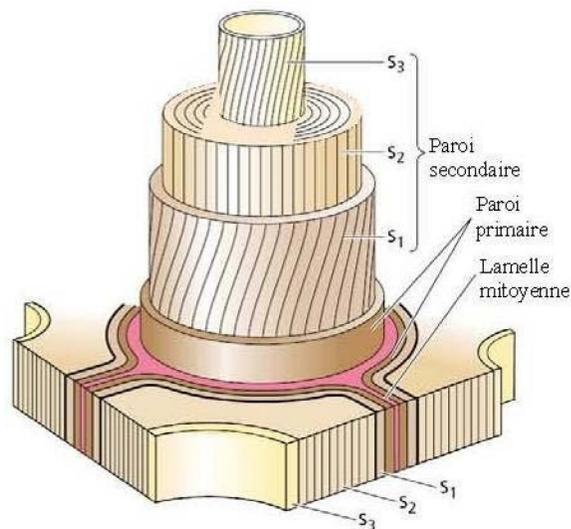


Figure 2.2 Structure de fibres de bois (Jaouen 2007)

La paroi primaire de la fibre de bois est constituée de micro fibrilles de cellulose prises dans une matrice constituée principalement de lignines, de substances pectiques et d'hémicelluloses (Jaouen 2007). La paroi secondaire est quant à elle constituée de trois couches (S1, S2 et S3) déposées à l'intérieur de la paroi primaire, la couche S1 étant la plus externe. La couche S2 qui se distingue par son épaisseur représente jusqu'à 85% de la paroi de chaque fibre et les propriétés physiques des parois des fibres de bois dépendent de l'orientation de la matière cette couche (Jaouen 2007). Les micros fibrilles de cellulose y ont, en temps normal, une inclinaison de 5 à 30° par rapport à l'axe longitudinal de la cellule. Dans les couches S1 et S3, l'inclinaison des microfibrilles est de 60 à 90° (Jaouen 2007). Finalement, la lamelle mitoyenne, située entre les fibres joue le rôle d'une colle assurant la cohésion entre les fibres (Jozsa et Middleton 1994).

2.2.2 Polymères thermoplastiques

D'un point de vue chimique, un polymère est une macromolécule constituée de la répétition de nombreuses sous-unités ou monomères. Il existe différentes classes de polymère. Les plus répandus étant les thermoplastiques et les thermodurcissables. Les polymères thermoplastiques sont des chaînes de polymères linéaires ou ramifiées. Ils changent d'état physique selon la variation de la température. Ils ramollissent sous l'effet de la chaleur, et se solidifient en cas de refroidissement. Généralement, les polymères thermodurcissables sont des plastiques qui offrent une stabilité dimensionnelle et une résistance à la chaleur ou aux produits chimiques aussi bonne que les thermoplastiques. Néanmoins, les thermoplastiques offrent une meilleure résistance à l'impact et leur mise en œuvre est plus facile et ils sont de très loin les polymères les plus utilisés (Maddah 2016). La structure moléculaire des polymères thermoplastiques solides est soit amorphe (non organisée), soit cristalline (organisée). Ces deux structures peuvent coexister en proportions variables. On parle alors de polymère semi-cristallin. Le degré de polymérisation, directement proportionnel à la

masse molaire du polymère, conditionne les propriétés mécaniques et thermiques des polymères thermoplastiques ainsi que l'aptitude à leur mise en œuvre sur machines (Maddah 2016).

2.2.3 Agents de couplage

Les performances mécaniques des bio-composites à matrice thermoplastique renforcés de fibre de bois dépendent de la qualité de l'adhésion entre la matrice polymérique et les renforts organiques. Le lien entre la matrice thermoplastique (hydrophobe) et les renforts de fibre de bois (hydrophiles), peu compatibles, doit être amélioré à l'aide d'agents de couplage ou par traitement chimique de la surface des fibres de bois (George et al. 2001). Les agents couplant jouent le rôle de ponts entre la fonction hydroxyle de la fibre de bois et la liaison hydrogène du polymère (Georgopoulos et al. 2005). Les agents de couplage peuvent être organiques (amides et anhydride), inorganiques (silicates) ou bien organiques-inorganiques (titanates) (Lu et al. 2007). La proportion idéale de l'agent du couplage dans le bio-composite doit être de l'ordre de 3% de la masse totale (Li 2012). D'autres approches tels que l'estérification, l'acétylation ainsi que le traitement aux silanes, alcalins ou enzymatiques peuvent être utilisés pour assurer le lien entre les fibres de bois et la matrice polymérique. Pour plus d'informations concernant ces types de traitement, consulter (Tazi 2015).

2.3 Chauffage des bio-composites

2.3.1 Chauffage conventionnel en plasturgie

L'étape de chauffage est cruciale dans plusieurs applications en ingénierie qui relèvent principalement de la plasturgie. Dans la majorité des procédés rencontrés en plasturgie (thermoformage, injection, extrusion, etc.) la matrice thermoplastique subit des transformations structurales permettant sa déformation et donc sa mise en forme. En dessous de la température de transition vitreuse du thermoplastique, les chaînes

moléculaires ne sont pas assez mobiles et le matériau est solide. Au-dessus de la température de fusion, les liaisons entre les chaînes sont rompues et le matériau est liquide (Bourai 2010). Entre ces deux températures, les chaînes sont mobiles et leur configuration peut changer. C'est cet état qui est recherché dans les procédés de fabrication et de mise en forme, car il permet à une déformation facile du matériau. Les techniques conventionnelles les plus couramment utilisées pour le chauffage des composites à matrice thermoplastique sont le chauffage par conduction, le chauffage par rayonnements infrarouge et le chauffage par convection forcée. Toutefois, ces approches présentent des inconvénients majeurs tels que la lenteur du chauffage, le risque de surchauffe surfacique, la nécessité, parfois, d'utiliser un agent de démoulage et l'opacité totale ou partielle des bio-composites aux rayonnements infrarouges (Bourai 2010). Dans ce contexte, le chauffage diélectrique des CBP connaît un intérêt grandissant, car il permet pallier les problèmes rencontrés avec les méthodes de chauffage conventionnelles.

2.3.2 Matériaux diélectriques

Les matériaux diélectriques sont des matériaux présentant une résistivité élevée et qui sont capables d'emmagasiner des quantités élevées d'énergie électrique avec une faible dissipation de cette énergie sous forme de chaleur. Ils sont employés dans de nombreux secteurs industriels tels que les domaines de l'électronique et de l'électrotechnique. Les matériaux diélectriques ne contiennent pas de charges électriques susceptibles de se déplacer, car les atomes partagent leurs électrons et sont donc liés structurellement par des forces électriques. Les matériaux diélectriques peuvent être polaires ou non polaires, dépendamment de la distribution des charges électriques dans les molécules. Les diélectriques polaires sont constitués de molécules possédant une distribution asymétrique des charges. Dans ce type de matériaux, les molécules possèdent un moment dipolaire permanent même en absence de champ électrique externe (Diaz-Quijano et al. 2010). Les diélectriques apolaires sont quant à eux constitués de molécules présentant une répartition des charges symétrique.

2.3.3 Chauffage diélectrique

Le chauffage diélectrique est basé sur le mécanisme de transfert d'énergie des micro-ondes vers le matériau à travers des interactions moléculaires avec le champ électromagnétique (Elloumi 2016). Contrairement aux techniques de chauffage conventionnelles où le matériau est chauffé en premier lieu à la surface puis vers l'intérieur, le chauffage par micro-onde a la particularité de produire la chaleur directement au cœur du matériau ce qui permet un chauffage rapide et uniforme sur toute l'épaisseur du matériau. Le chauffage diélectrique permet notamment de réduire le temps et le coût du traitement et d'économiser la consommation d'énergie (Ay et Sahin 2004). Dans l'industrie, le chauffage par micro-ondes est effectué soit à une fréquence proche de 915 MHz ou 2450 MHz, dans le but d'éviter toute interférence avec les systèmes de télécommunication (Elloumi 2016).

2.3.4 Propriétés diélectriques des CBP

Les propriétés diélectriques des CBP jouent un rôle crucial pour leur chauffage par micro-ondes. Toutefois, dans la littérature, très peu d'informations sont disponibles concernant les propriétés diélectriques des CBP. La combinaison de la matrice polymère et des renforts de fibres de bois engendre de nouvelles propriétés diélectriques spécifiques au composite (Elloumi 2016). Plusieurs facteurs influencent le comportement diélectrique des matériaux composites et notamment la fréquence du champ électrique appliqué, la nature de la matrice polymérique, l'humidité contenue dans le CBP ainsi que l'essence et la concentration massique des renforts de fibres de bois dispersés dans la matrice polymérique (Notingher et al. 2010). L'effet de la variation de la proportion des renforts organiques sur les propriétés diélectriques a été étudié et il s'est avéré que la constante diélectrique augmente avec la teneur en fibres de bois du fait de la présence des groupes polaires hygroscopiques de la cellulose (Markiewicz et al. 2012).

Dans ce travail, pour l'étude de chauffage par micro-ondes d'un multicouche (trois couches), on considère les propriétés diélectriques complexes, obtenues à la fréquence de 2,5 GHz (Basak 2004). Concernant les propriétés thermophysiques, on considère les données fournies dans la référence (Azlan et al. 2014) pour trois CBP, à base d'une résine thermoplastique le PP (polypropylène) et des fibres du bois de différentes tailles.

CHAPITRE 3

DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, l'accent est mis d'une part, sur les équations qui gouvernent le transfert de chaleur dans un milieu absorbant et, d'autre part, sur la formulation, du problème de chauffage diélectrique. Pour la résolution numérique, on a considéré la méthode des éléments finis par l'entremise de la méthode de Galerkin.

Pour l'analyse, on suppose que le milieu multicouche est isotrope et homogène. La répartition de la température dans le matériau peut être déduite de la résolution de l'équation de conservation de l'énergie thermique à l'aide de l'équation suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = Q \quad (3.1)$$

Q est le terme source associé à l'énergie dissipée par les micro-ondes dans le matériau multicouches. C_p , ρ et k représentent, respectivement, la chaleur spécifique, la densité et la conductivité thermique du CBP. Pour compléter le problème, il faut ajouter les conditions initiales et aux limites :

$$k \nabla T \cdot n + h(T - T_\infty) - q_{rad} \cdot n = 0 \quad (3.2)$$

q_{rad} est le flux de chaleur reçu par la surface du matériau, h est son coefficient d'échange de chaleur par convection et T_∞ est la température du milieu ambiant (air).

Le terme $h(T-T_\infty)$ représente le transfert de chaleur par convection à partir du milieu matériel vers le milieu ambiant.

3.1 Formulation par éléments finis de l'équation d'énergie 1D

La méthode des éléments finis de type Galerkin est largement utilisée pour la modélisation du transfert de chaleur. Indépendamment de la dimensionnalité spatiale du problème de la chaleur, la méthode des éléments finis mène aux équations de premier ordre, du rang égales au nombre total des nœuds formant le maillage géométrique de la membrane :

$$M \frac{\partial T}{\partial t} + K \cdot T = F \quad (3.3)$$

Où M , K et F sont respectivement les matrices globales de capacité thermique, de conductance thermique et de charge thermique. T est le vecteur nodal global des températures. Les expressions explicites des matrices M , K et F sont données dans l'Annexe A.

Dans ce travail, le schéma mono-pas implicite d'intégration en temps est utilisé. Dans ce cas, l'équation ci-dessus de transfert de chaleur devient (voir Annexe A) :

$$\bar{M} \cdot T^{n+1} = \bar{K} \cdot T^n + \bar{F} \quad (3.4)$$

Où \bar{M} , \bar{K} et \bar{F} sont respectivement les matrices globales modifiées de capacité thermique, de conductance thermique et de charge thermique du système. T^n est le vecteur nodal global des températures à l'instant t_n . La matrice C est constante pour les problèmes linéaires tant que le pas de temps ne change pas. Son inverse n'est évalué qu'une seule fois. Pour la stabilité de la méthode, on considère le schéma de Crank Nicolson (Hamani 2007).

3.2 Expression mathématique de l'énergie dissipée par micro-ondes dans un multicouche

La propagation des micro-ondes dans un système multicouche peut être décrite par l'équation de Maxwell qui repose à la fois sur les ondes émises et réfléchies. Pour caractériser l'énergie dissipée dans le matériau, il est nécessaire d'appliquer le théorème de Poynting pour déterminer l'énergie dissipée dans le matériau. Concernant la loi de Beer-Lambert, elle repose uniquement sur la transmission des micro-ondes (pas de réflexion). Autrement dit, cette loi ne peut être valide que pour un échantillon semi-infini (la validité de la loi de Lambert pour un assemblage multicouche est limitée par les épaisseurs de chaque couche formant le système multicouche). Dans la section ci-dessous on expose, dans un premier temps, les équations de Maxwell et, ensuite, par l'entremise du théorème de Poynting, on donne l'expression de l'énergie dissipée dans un matériau diélectrique.

Les équations de Maxwell fournissent des relations entre les variations des grandeurs électromagnétiques (champs électrique et magnétique) en tout point de l'espace. La Figure 3.1 illustre une onde électromagnétique et ses composantes.

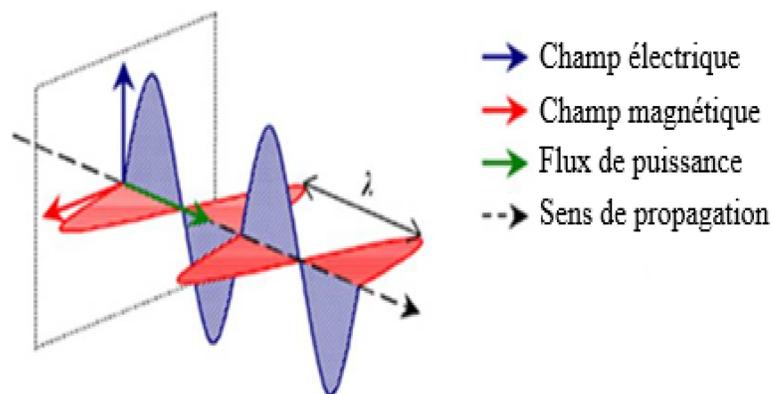


Figure 3.1 Les composants électromagnétiques d'une onde (Ay et Sahin 2004)

Si on désigne par \vec{E} , \vec{H} , \vec{J} , \vec{D} , et \vec{B} respectivement le champ électrique, le champ magnétique, le flux de courant, le déplacement électrique et l'induction magnétique, on a alors pour les équations de Maxwell les expressions suivantes :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.6)$$

Avec :

$$\vec{J} = \sigma(\omega) \vec{H}(t) \quad (3.7)$$

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E}(t) \quad (3.8)$$

$$\vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}(t) \quad (3.9)$$

Tel que : σ , ε et μ sont respectivement la conductivité, la permittivité et la perméabilité du milieu. ω représente la pulsation de l'onde électromagnétique et t le temps.

Pour une pulsation ω particulière, les champs \vec{E} et \vec{B} , en régime harmonique, s'écrivent :

$$\vec{E} = \bar{E} \exp(-j\omega t) \quad (3.10)$$

$$\vec{H} = \bar{H} \exp(-j\omega t) \quad (3.11)$$

En substituant (3.11) dans (3.8) et en tenant compte de l'expression (3.9), on a obtenu :

$$\nabla \times \bar{E} = j\omega\mu(\omega)\bar{H} \quad (3.12)$$

De même, en substituant (3.11) dans (3.6) et en tenant compte des expressions (3.8) et (3.9), on a obtenu :

$$\nabla \times \bar{H} = [\sigma(\omega) - j\omega\varepsilon(\omega)]\bar{E} \quad (3.13)$$

Généralement dans les matériaux diélectriques incluant le bois et les bio-composites, l'hypothèse que la proposition $\mu(\omega) = \mu_0$ Est généralement considérée (Erchiqui 2013). En appliquant le rotationnel ($\nabla \times$) à chaque membre (droite et gauche) de l'expression (3.12) on déduit :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = j\omega\mu(\omega)\nabla \times \bar{H} \quad (3.14)$$

Et par l'utilisation de (3.13), l'expression (3.14) devient :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = j\omega\mu(\omega)[\sigma(\omega) - j\omega\varepsilon(\omega)]\bar{E} \quad (3.15)$$

Finalement, en considérant la relation vectorielle suivante :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} \quad (3.16)$$

On déduit, par substitution du terme gauche de l'expression (3.16) par son équivalent dans le terme droit de (3.15), l'équation différentielle qui caractérise la propagation d'un champ électrique harmonique dans milieu diélectrique :

$$\nabla(\nabla \times \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = \omega^2\mu(\omega) \left[j\frac{\sigma(\omega)}{\omega} + \varepsilon(\omega) \right] \bar{E} \quad (3.17)$$

Puisque nos matériaux sont diélectrique, $\nabla(\nabla \times \bar{E}) = 0$ (électro-neutralité), alors l'équation de propagation de l'onde, donnée par l'expression (3.17), se simplifie et deviennent l'équation de Helmholtz (Erchiqui 2013) :

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0 \quad (3.18)$$

Avec :

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \left[j \frac{\sigma(\omega)}{\omega} + \varepsilon(\omega) \right] = \omega^2 \mu_0 \left[j \frac{\sigma(\omega)}{\omega} + (\varepsilon'(\omega) + j \varepsilon''(\omega)) \right] \quad (3.19)$$

k représente la constante de propagation. La conductivité $\sigma(\omega)$, la constante diélectrique $\varepsilon(\omega)$ et la perméabilité magnétique $\mu(\omega)$ sont en général des fonctions complexes de la pulsation (fréquence) ω de l'onde. Pour une représentation pratique, il est opportun de représenter la constante de propagation k sous la forme suivante :

$$k = \alpha + j\beta \quad (3.20)$$

α représente la partie réelle de k et β sa partie imaginaire. Pour cela, introduisons les définitions des constantes diélectriques relatives κ' et de perte κ'' données par les formules suivantes:

$$\kappa' = \frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} \quad (3.21)$$

$$\kappa'' = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} \quad (3.22)$$

Dans ce cas, l'expression (3.19) devienne :

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \left[j \frac{\sigma(\omega)}{\omega} + \varepsilon_0 (\kappa'(\omega) + j \kappa''(\omega)) \right] \quad (3.23)$$

En absence de charge électrique (cas des diélectriques), l'équation (3.20) devient :

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa' + j\kappa'') \quad (3.24)$$

En tenant compte que la vitesse de la lumière c est définie par $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, on déduit :

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\kappa' + j\kappa''} \quad (3.25)$$

qui peut être représentés sous la forme suivante (Erchiqui 2013) :

$$k = \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \kappa' \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa''}{\kappa'}\right)^2} + 1 \right)} \right) + i \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \kappa' \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa''}{\kappa'}\right)^2} - 1 \right)} \right) \quad (3.26)$$

En introduisant l'angle de perte δ défini par :

$$\text{tang}(\delta) = \frac{\kappa''}{\kappa'} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad (3.27)$$

On déduit pour la relation (3.24) l'expression suivante :

$$k = \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\frac{\kappa'}{2} \left(\sqrt{1 + (\text{tang}(\delta))^2} + 1 \right)} \right) + j \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\frac{\kappa'}{2} \left(\sqrt{1 + (\text{tang}(\delta))^2} - 1 \right)} \right) \quad (3.28)$$

Puisque $k = \alpha + j\beta$, on déduit de (3.26) :

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\kappa'}{2} \left(\sqrt{1 + (\text{tang}(\delta))^2} + 1 \right)} \quad (3.29)$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\frac{\kappa'}{2} \left(\sqrt{1 + (\text{tang}(\delta))^2} - 1 \right)} \right) \quad (3.30)$$

Dans les deux équations ci-dessus on remarque que le paramètre β contrôle la vitesse à laquelle l'intensité du champ électrique incident décroît dans le matériau. Ce

paramètre est appelé épaisseur de pénétration et représente la distance à laquelle l'intensité du champ électrique diminue à 1/e de sa valeur incidente.

Finalement, il est opportun de souligner que la partie réelle $\kappa (= \kappa' + j\kappa'')$ représente la capacité du matériau à emmagasiner l'énergie électrique et sa partie imaginaire quantifie la perte diélectrique à travers l'énergie dissipée. κ est en fonction de la température, de la fréquence et de la teneur en humidité dans le matériau. Dans le cas d'échantillon semi-infini, et on désignant par x la direction de la propagation de l'énergie, l'intensité du champ obéit à l'équation de Beer-Lambert :

$$\bar{E} = E_0 \exp(-\beta x) \quad (3.31)$$

On constate clairement selon la relation ci-dessus, que l'énergie dissipée dans le matériau décroît exponentiellement dans la direction x.

3.2.1 Énergie dissipée par micro-ondes dans un diélectrique homogène et isotrope

- *Théorème de Poynting*

Le vecteur de Poynting, noté \vec{S} , indique la direction de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isotrope. Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface est égal à la puissance véhiculée par l'onde à travers cette surface. Le module du vecteur de Poynting est donc une puissance par unité de surface et s'exprime en W/m² et il est donné par la relation suivante :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (3.32)$$

Avec E le champ électrique et H* le conjugué du champ magnétique.

- *Énergie dissipée par micro-ondes dans un milieu homogène et isotrope*

L'énergie dissipée par micro-ondes dans un milieu diélectrique homogène et isotrope est reliée au à la divergence du vecteur Poynting. Pour obtenir la divergence de ce vecteur Poynting à l'intérieur du matériau diélectrique, on peut utiliser le théorème de divergence qui traduit la conservation du flux (Ayappa et al. 1991) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{S} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{S} \, d\Omega \quad (3.33)$$

Γ est la frontière du milieu matériel, de volume Ω , dans lequel l'énergie électrique (partie réelle de l'intégrale) et l'énergie magnétique (partie imaginaire de l'intégrale) sont emmagasinées.

Dans le cas d'une propagation électromagnétique harmonique, le premier terme intégral de surface intervenant de l'équation (3.33) est donné par (Erchiqui 2013) :

$$\oint S \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Omega} -\frac{1}{2} \omega_0 \mu_0 \varepsilon_0 \kappa'' E \cdot E^* + j\omega \left[\frac{\mu_0}{2} H \cdot H^* + \frac{\varepsilon_0 \kappa'}{2} E \cdot E^* \right] \, d\Omega \quad (3.34)$$

On déduit alors :

$$\nabla \cdot S = -\frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_0 \kappa'' E \cdot E^* + j\omega \left(\frac{\mu_0}{2} H \cdot H^* + \frac{\varepsilon_0 \kappa'}{2} E \cdot E^* \right) \quad (3.35)$$

En considérant la partie réelle de l'équation (3.35) on trouve l'expression de l'énergie dissipée dans le matériau diélectrique, soit (Ayappa et al. 1991):

$$Q_{\text{microwave}} = -R_e(\nabla \cdot S) = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_0 \kappa'' |E|^2 \quad (3.36)$$

- *Loi de Beer-Lambert*

La loi de Beer-Lambert est utilisée pour exprimer l'énergie électromagnétique. L'intensité du flux d'énergie, $I(z)$ dans la direction z , transmis dans le milieu matériel,

supposé semi-infini et unidirectionnel, en fonction de la distance z à partir de la surface du matériau est exprimé par la relation ci-dessous (Erchiqui 2013)

$$I(z) = I_0 e^{-\beta z} \quad (3.37)$$

Avec I_0 représente l'intensité d'énergie incidente à la surface du matériau et pénétrant dans le matériau matériel. L'énergie absorbée par unité de volume est exprimée par l'équation suivante :

$$p^{Lambert}(z) = -\frac{dI}{dx} = 2\beta I(z) = 2I_0\beta e^{-\beta z} \quad (3.38)$$

- *Profondeur de pénétration*

Lorsqu'une onde électromagnétique atteint la surface d'un matériau, une partie de l'onde pénètre dans la matière et se propage à travers le matériau tandis qu'une autre partie est réfléchiée (Figure 3.2). L'énergie de cette onde émise est absorbée progressivement par le matériau. Cette absorption est caractérisée par la profondeur de pénétration D_p (Huang 2009).

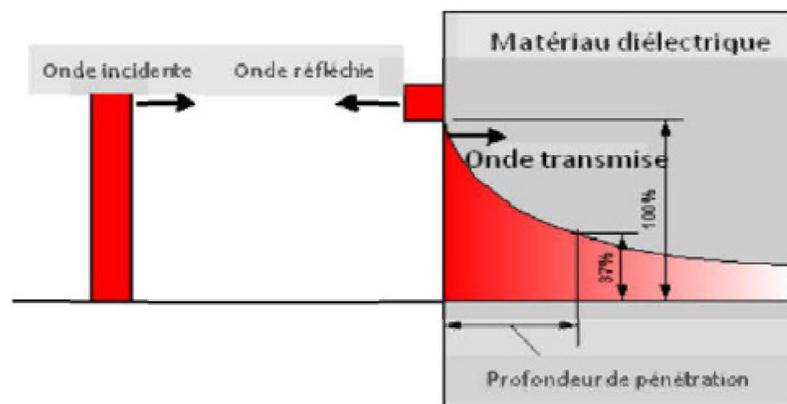


Figure 3.2 Transit de puissance lorsqu'une onde électromagnétique atteint un matériau électrique (Callebaut 2007)

Si on désigne par z la direction normale de propagation de micro-ondes, la puissance transmise par cette onde décroît exponentiellement avec la profondeur de pénétration et peut être calculée selon l'équation suivante:

$$P_{trans}(z) = P_{trans}(z=0)e^{-2\alpha z} \quad (3.39)$$

$P_{trans}(z)$ et $P_{trans}(z=0)$ représentent, respectivement, la puissance dissipée en chaque point z [$W.m^{-2}$] et la puissance à la surface au point $z=0$. La profondeur de pénétration peut être définie par la formule suivante:

$$D_p = \frac{1}{2\alpha} \quad (3.40)$$

Le facteur d'atténuation α indique le taux d'absorption de la puissance de l'onde au sein du matériau. Il est dépendant de ses propriétés diélectriques et de la fréquence selon la formule suivante :

$$\alpha = \frac{2\pi f}{2,998 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{\epsilon'}{2}} \left[\sqrt{(1 + (\tan \delta)^2)} - 1 \right] \quad (3.41)$$

La profondeur de pénétration est un paramètre important pour les applications de séchage du bois par micro-ondes. Elle influe sur le choix de la fréquence de séchage et sur la distribution de la température dans le matériau.

3.2.2 Expression analytique de l'énergie dissipée par micro-ondes dans un diélectrique multicouche

Dans cette section, on suppose, d'une part, que les micro-ondes sont planes uniformes et, d'autre part, que la direction de propagation des ondes est normale au milieu multicouche. Pour illustrer ce problème, considérons le cas particulier d'un diélectrique à trois couches (Figure 3.3).

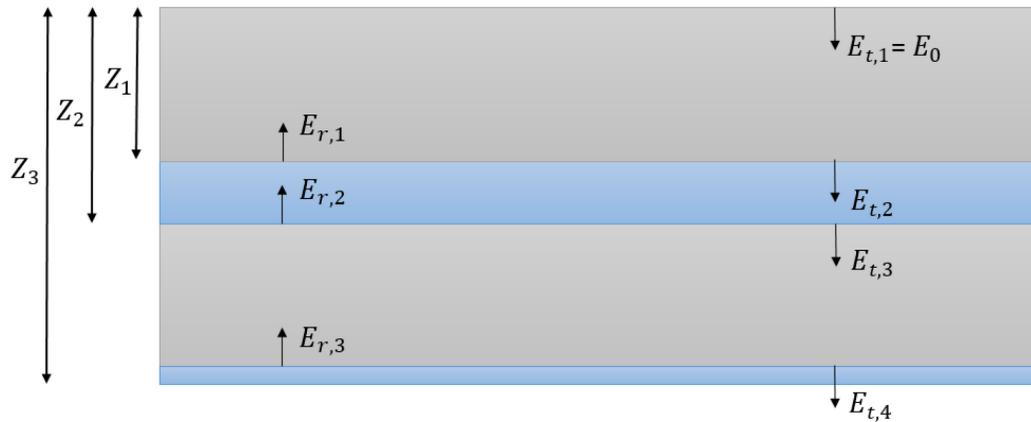


Figure 3.3 Schéma représentatif du milieu diélectrique à trois couches étudiées

L'intensité du champ transmis pour le premier milieu ($E_{t,1}$) et l'intensité du champ réfléchi pour le $n^{\text{ième}}$ milieu ($E_{r,n}$) sont connues. $E_{t,1} = E_0$ et $E_{r,n} = 0$. On peut représenter le champ électrique dans un échantillon multicouche par la relation suivante (Basak 2004) :

$$\frac{d^2 E_n}{dZ^2} + k^2 E_n = 0 \quad (3.42)$$

La solution générale de cette équation est représentée sous forme d'une combinaison linéaire de déplacements des ondes qui se propagent dans des directions opposées. Les conditions aux limites sont :

$$E_{n-1} = E_n$$

$$\frac{dE_{n-1}}{dz} = \frac{dE_n}{dz}$$

Avec $n =$ nombre de couches $1, 2, \dots, x$ et $Z = Z_1, Z_2, \dots, Z_n$

La solution générale du champ électrique pour chaque couche obtenue par l'équation fondamentale de l'onde :

$$E_n = E_t e^{jKZ} + E_r e^{-jKZ} \quad Z \geq Z_n$$

E_n : Intensité du champ électrique

E_t : L'intensité du champ électrique due à la transmission

E_r : L'intensité du champ électrique due à la réflexion

Le champ électrique des couches 1 et 2 considérons les conditions aux limites.

Les coefficients de transmission et de réflexion sont obtenus via la solution du système d'équations dérivé tel que $M*Y = B$ tel que donnée par (Basak, 2004) (Annexe B).

Dans ce qui suit, le système algébrique ci-dessus sera déployé pour déterminer l'énergie dissipée en chaque point du multicouche. Ensuite, par l'entremise de l'équation de l'énergie, on peut déterminer l'évolution de la température dans le milieu multicouche. Le chapitre suivant concerne la validation de l'approche utilisée et son application au chauffage multicouche d'un système bio-composite de type PP-fibres du bois.

CHAPITRE 4

ÉTUDES DE CAS

4.1 Validation numérique d'un bloc glace-eau

Pour la validation, on considère le problème exposé dans la référence (Basak 2004). Pour le premier cas de validation, on va étudier le chauffage par micro-ondes d'un bloc multicouches glace-eau. La décongélation par micro-ondes de la glace est parfois réalisée avec l'utilisation d'une couche d'eau. Ce système multicouche est un exemple typique de décongélation de la glace par micro-ondes. Pour cela, on s'intéresse à la détermination du champ électrique et la puissance dissipée par micro-ondes dans chaque couche du milieu composite. Deux approches sont considérées pour la validation; l'une concerne la solution analytique exacte et l'autre concerne le modèle approximatif associé à la loi de Lambert. Pour cette validation, on a considéré les données sont extraites de la référence (Basak 2004), soit un multicouche à deux couches : l'une d'épaisseur 50 mm représentant la glace et l'autre de 20 mm représentant l'eau. La fréquence de l'onde est 2,47 GHz. Les propriétés diélectriques de ses deux matériaux sont fournies également dans la référence (Basak 2004). L'intensité du champ électrique incident est égale à 7000 V m^{-1} . Les résultats obtenus sont confrontés avec les résultats de l'article (Basak 2004). Les Figures 4.1 et 4.2 illustrent, respectivement en en fonction de la profondeur de pénétration, l'amplitude du champ électrique et la puissance absorbée obtenues par la méthode analytique et

celui associé à la loi de Lambert. Les résultats sont similaires à ceux fournis par (Basak 2004).

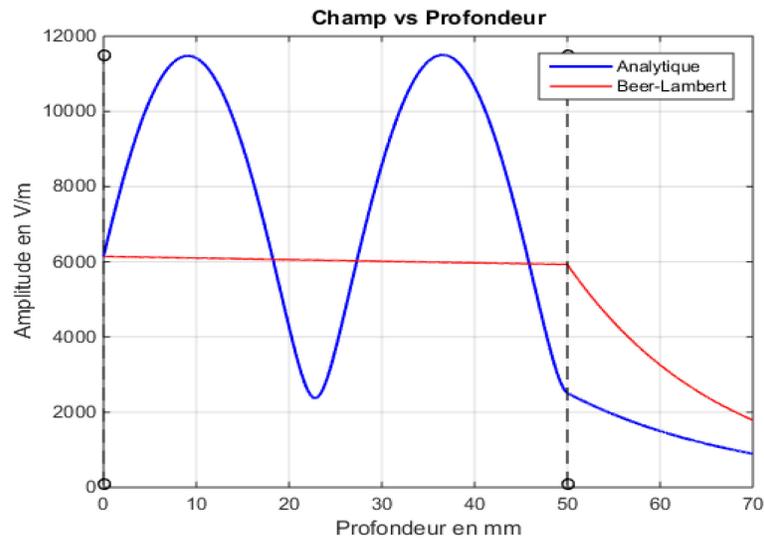


Figure 4.1 Amplitude du champ électrique en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert

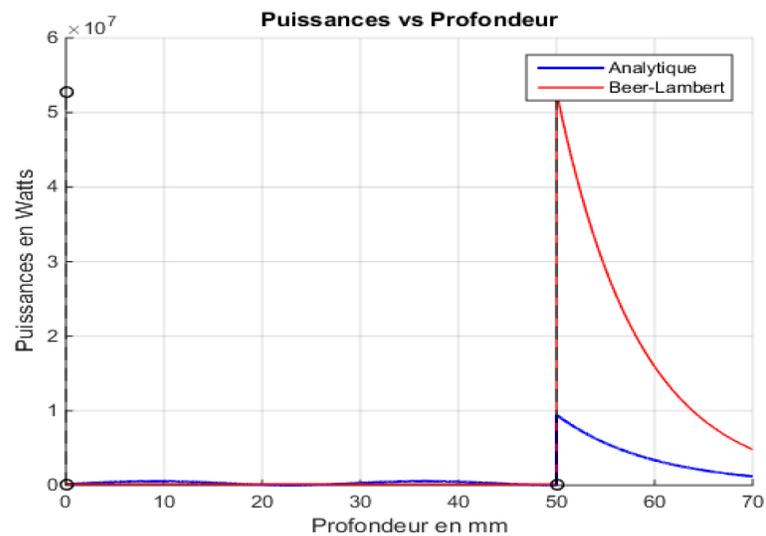


Figure 4.2 Puissance absorbée par le composite en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert

4.2 Validation numérique d'un bloc glace-eau-glace

Dans cette partie on suppose que l'épaisseur totale du bloc multicouche est de 160 mm (20 mm pour l'épaisseur de la couche d'eau et 70 mm pour chaque couche englobant l'eau). La fréquence des micro-ondes est 2,47 GHz et l'intensité du champ électrique incident est égale à 7000 Vm⁻¹.



Figure 4.3 Bloc multicouche glace-eau-glace

Le Tableau 4.1 représente les propriétés diélectriques de la glace ainsi que de l'eau (Rattanadecho 2004) utilisées pour la simulation.

Tableau 4.1 Les propriétés diélectriques de la glace et l'eau

Propriétés	Eau	Glace
P (kg/m ³)	1000	1910,9
λ (W/m K)	0,610	1,48
C_p (KJ/Kg K)	4,186	1,28
μ_r (H/m)	1	1
ϵ_r (F/m)	87,737	5,1
tng δ	0,2523	0,0124

Les résultats obtenus analytiquement pour l'amplitude du champ électrique, en fonction de la profondeur de pénétration, avec la méthode analytique exacte et celle donnée par la loi de Beer-Lambert sont illustrés sur la Figure 4.4. La Figure 4.5 présente graphiquement les résultats obtenus, en fonction de la profondeur de pénétration, de la puissance absorbée par le multicouche dans les cas de la solution exacte et celle donnée par la loi de Beer-Lambert. Dans l'ensemble, les résultats obtenus sont conformes à ceux fournis dans la référence (Basak 2004). Selon les résultats obtenus par la solution approximative associée au modèle Beer-Lambert, dans les couches 1 et 3, l'amplitude reste constante avec une valeur moins importante dans la 3^{ème} couche. Par contre, on remarque une décroissance exponentielle dans la couche de l'eau. En revanche l'amplitude oscille de manière sinusoïdale dans la première couche de la glace et elle s'amortit à partir de la deuxième couche de l'eau pour la solution exacte. La réflexion dans la couche d'eau est presque négligeable et l'amplitude du champ électrique stationnaire presque constante. On remarque que le champ de Lambert surestime davantage le champ électrique, dans les couches 2 et 3, que celui basé sur la solution exacte. Dans la couche 1, le modèle Beer-Lambert sous-estime le champ électrique vis-à-vis la solution exacte. La Figure 4.5 représente la puissance, dissipée dans le multicouche, obtenue par la loi de Lambert et exacte. Selon cette Figure, les puissances obtenues suivent ceux obtenues pour les amplitudes : la loi de Beer-Lambert estime une valeur constante pour la puissance dans les couches de glace, par contre la solution exacte représente une légère oscillation dans la première couche pour qui s'annule par la suite. La loi de Beer-Lambert fournit une puissance considérablement supérieure à celle basée sur la solution exacte dans la couche d'eau. En conclusion, le modèle de Beer-Lambert est mal appropriée pour la caractérisation de la puissance dissipée dans le multicouche et donc à éviter.

Les caractéristiques contrastées entre la loi de Lambert et la solution analytique sont importantes pour les modèles théoriques et auront un impact sur le chauffage par micro-ondes de matériaux multicouches. La loi de Lambert est purement basée sur le champ

transmis et qu'une quantité importante de réflexion dans la couche de glace, qui joue un rôle essentiel dans la détermination de la distribution de la puissance dans le système multicouche, n'est pas considérée dans l'évaluation de la puissance pour l'eau. Bien que la Lambert prédit des résultats non similaires à ceux de la solution exacte dans le matériau à faible diélectrique, la puissance absorbée par la loi de Lambert peut être surestimée dans le matériau à forte diélectrique (Basak 2004).

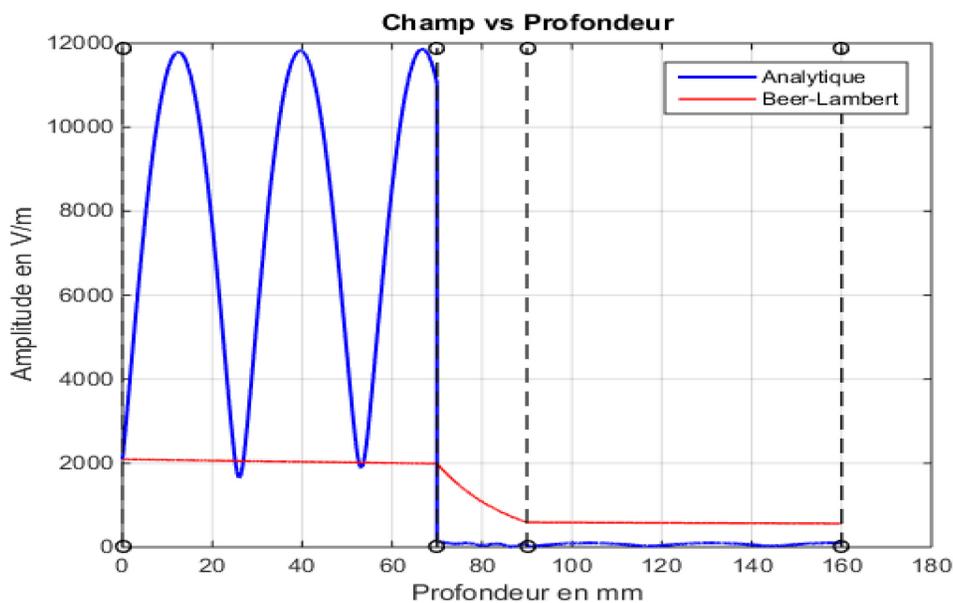


Figure 4.4 Amplitude du champ électrique en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert

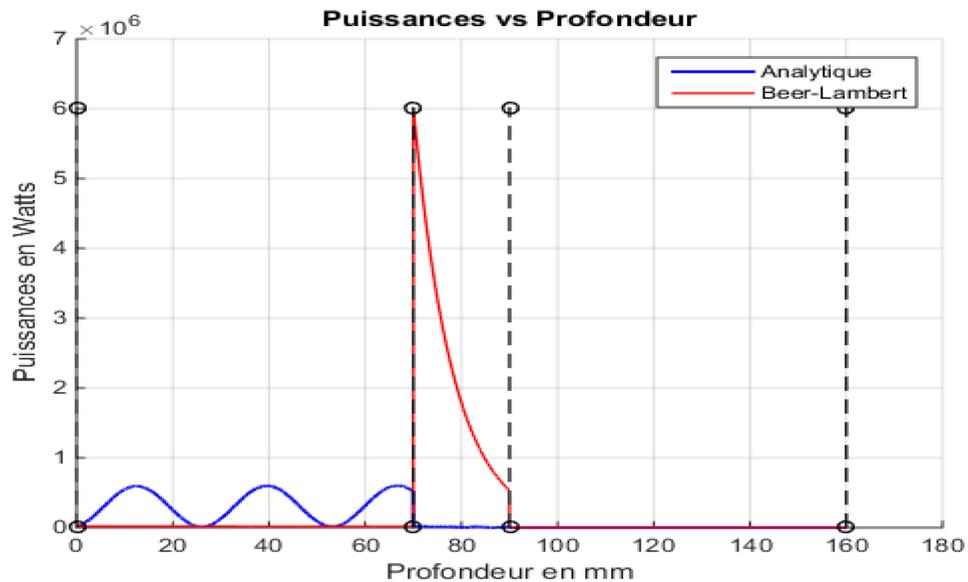


Figure 4.5 Puissance absorbée par le composite en fonction de la profondeur de pénétration avec la méthode analytique et loi de Lambert

4.3 Simulation numérique du chauffage diélectrique des composites bois-polymère

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude du chauffage diélectrique d'un matériau bio-composite multicouche. À cet effet, on a considéré trois couches de CBP, à base de polypropylène (70%) et de renforts en bois (30%). La simulation est réalisée pour une fréquence de 2,47 GHz et une intensité électrique de 7000 V/m. Les micro-ondes sont supposées planes avec incidence normale à la surface du matériau multicouche.

Pour alléger le travail, on désigne par :

- Composite A : première couche composite d'épaisseur 70 mm avec des fibres en bois de taille 100 μm ;
- Composite B : deuxième couche composite d'épaisseur 20 mm et dont la taille des fibres est 200 μm ;

- Composite C : troisième couche composite d'épaisseur 70 mm et dont la taille des fibres est 500 μm .

Les propriétés diélectriques de chaque couche sont extraites de la référence (Gaur et al. 1982) et les propriétés thermo-physique des CBP sont prises de la référence (Azlan et al. 2014); voir Tableau 4.2.

Tableau 4.2 Les propriétés diélectriques et thermiques des CBP

	Densité ρ [kg m ⁻¹]	C _p J/k	K [w/m.°C]	K'	tg δ	Tailles de fibre [μm]
BP1	838,92	2206,84	0,215	3,38	0,0596	100
BP2	838,92	2206,84	0,215	3,07	0,4362	200
BP3	838,92	2206,84	0,215	3,89	0,0945	500

4.3.1 Étude du cas 1 : Multicouche A-B-C

- *Champ électrique et puissance dissipée dans le multicouche A-B-C*

Dans cette partie, la configuration de la plaque multicouche étudiée est de (100, 200 et 500 μm), notée A-B-C. La solution exacte de Maxwell et la loi de Beer Lambert ont été utilisées pour calculer l'amplitude du champ électrique des micro-ondes ainsi que la puissance absorbée par CBP, en fonction de la profondeur de pénétration. Les résultats de ce calcul sont représentés dans la Figures 4.6 (pour l'amplitude) et 4.7 (pour la puissance).

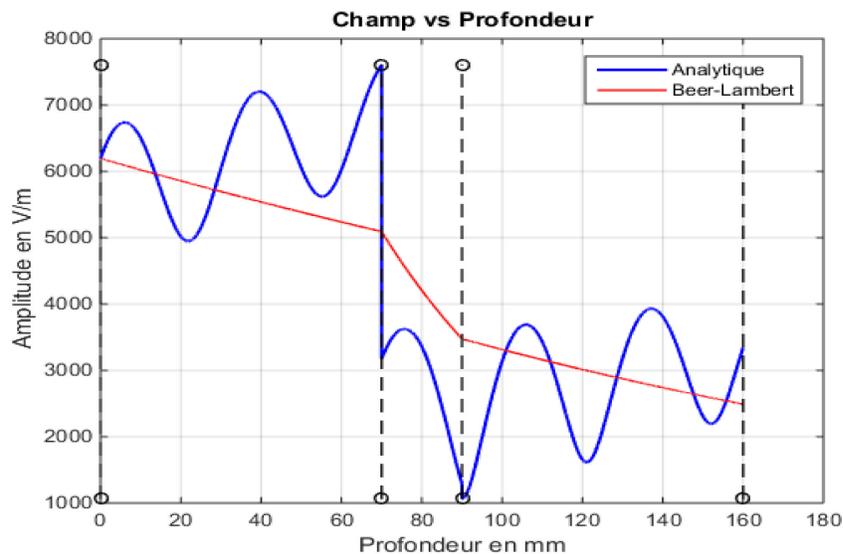


Figure 4.6 Variation de l'amplitude en fonction de la profondeur de pénétration dans les trois couches du CBP

Selon la Figure 4.6, dans la première couche d'épaisseur $70 \cdot 10^{-3}$ m, la méthode analytique montre des signaux périodiques avec un maximum d'amplitudes $7,7 \cdot 10^3$ V/m, par contre, la solution fournie par la loi de Lambert ne présente aucune oscillation avec une maximale de 6200 V/m et une valeur minimale 5100 V/m.

Pour la couche centrale, d'épaisseur $20 \cdot 10^{-3}$ m on remarque une chute remarquable des deux solutions (exacte et celle donnée par la loi de Beer-Lambert). Ce phénomène semble relié à la discontinuité des propriétés diélectrique des CBP qui sont supposées constantes (dans ce projet). Pour cette couche (2^{ème}), la loi de Beer-Lambert surestime l'amplitude des micro-ondes. Ce résultat est dû à l'absence des ondes réfléchies dans cette couche : seules les ondes transmises sont permises par la loi de Beer-Lambert (qui est basée sur la propagation des ondes dans un milieu semi-infinie).

Concernant la dernière couche, d'épaisseur 70.10^{-3} m, l'allure des amplitudes des micro-ondes se comporte d'une manière un peu similaire que celle rencontrée dans la première couche avec des valeurs différentes des amplitudes.

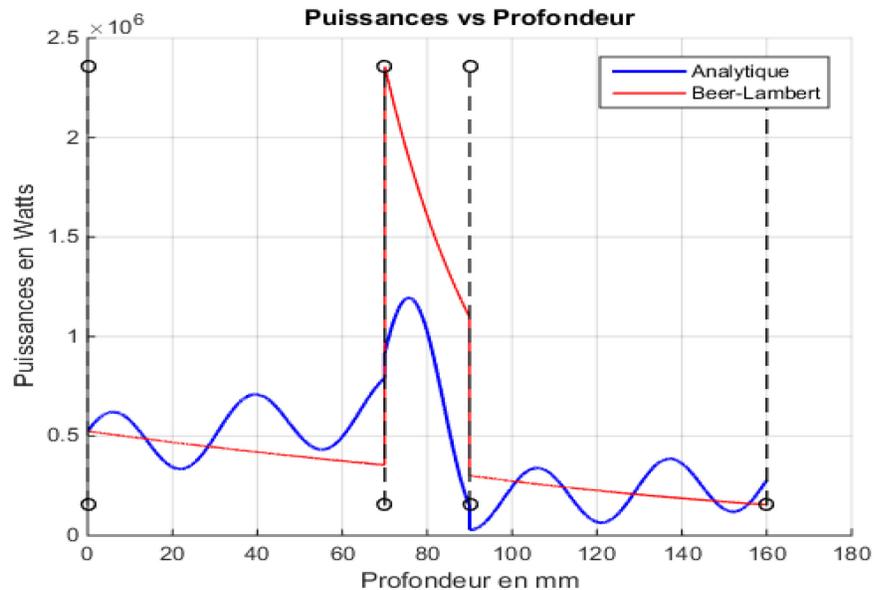


Figure 4.7 Puissance absorbée pas le composite en fonction de la profondeur de pénétration

Selon la Figure 4.7, les puissances absorbées par le CBP obtenues par les deux méthodes exactes et approchées, suivent des allures similaires à celles des amplitudes (Figure 4.6). La valeur minimale de la puissance absorbée, obtenue par les deux approches, est 5.10^5 W à l'interface air-couche. Toutefois la variation de cette puissance est différente d'une couche à l'autre.

Dans la première couche, la puissance augmente jusqu'à $2,4.10^6$ W à l'interface (avec la seconde couche) pour le model de Beer-Lamber et jusqu'à $1,2.10^6$ W pour la solution exacte. Dans la deuxième couche d'épaisseur 2.10^{-3} , la valeur de la puissance absorbée diminue jusqu'à l'interface de la deuxième et la troisième couche, la valeur 2.10^5 W pour le modèle exacte et la valeur 3.10^5 W pour la loi de Beer-Lambert. Dans la troisième couche, on constate que le modèle exact fournit une puissance qui évolue

dans l'épaisseur tandis que le modèle de Beer-Lambert donne une solution qui décroît faiblement dans l'épaisseur de la couche. En conséquence, on peut conclure que le modèle de Beer-Lambert peut entraîner des résultats qui ne coïncident pas avec les prédictions exactes.

- *Évolution de la température par micro-ondes dans le multicouche A-B-C*

Pour l'analyse de l'évolution de la température dans le multicouche A-B-C, on a élaboré, par l'entremise du Code Matlab et en se basant sur la méthode des éléments finis, un outil de simulation. Le temps de simulation est fixé à 6 minutes. Les résultats présentés dans la Figure 4.8 montrent l'évolution des températures à plusieurs instants (20 s, 40 s, 60 s, etc.) du temps global du chauffage.

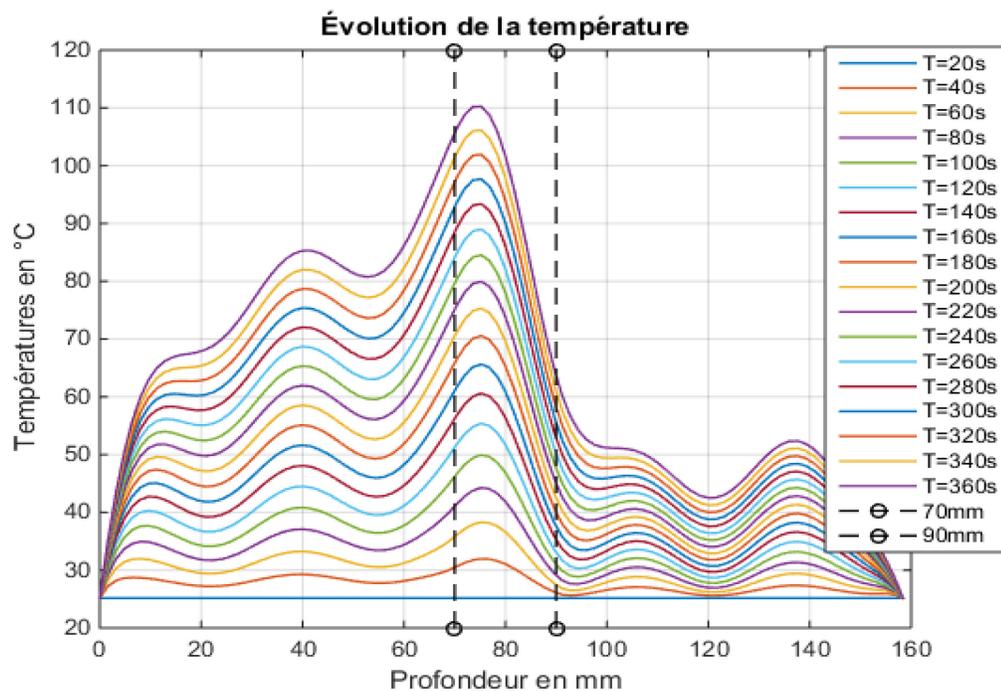


Figure 4.8 Profil de la température pendant 6 minutes du CBP par le modèle 1D

4.3.2 Étude du cas 2 : Multicouche C-B-A

- *Champ électrique et puissance dissipée dans le multicouche C-B-A*

Dans cette partie, la configuration de la plaque multicouche étudiée est de (500, 200 et 100 μm), notée C-B-A. La solution exacte de Maxwell et la loi de Beer Lambert ont été utilisées pour calculer l'amplitude du champ électrique des micro-ondes ainsi que la puissance absorbée par CBP, en fonction de la profondeur de pénétration. Les résultats de ce calcul sont représentés dans les Figures 4.9 (pour l'amplitude) et 4.10 (pour la puissance).

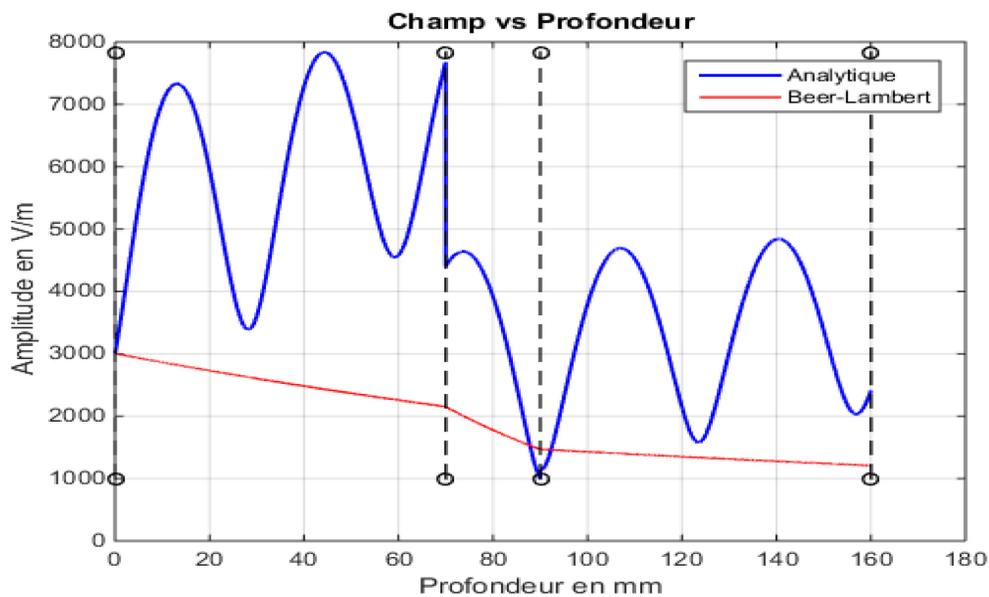


Figure 4.9 Amplitude du champ électrique en fonction de profondeur de pénétration, avec la méthode analytique et loi de Lambert du CBP

La première couche d'épaisseur $70 \cdot 10^{-3}$ m, la méthode analytique montre des signaux périodiques avec un maximum d'amplitudes $8 \cdot 10^3$ V/m, cependant, la solution fournie par la loi de Lambert ne présente aucune oscillation avec une valeur maximale $3 \cdot 10^3$ V/m et une valeur minimale de 10^3 V/m.

Pour la couche centrale, d'épaisseur 20.10^{-3} m on remarque une chute remarquable des deux solutions (exacte et celle donnée par la loi de Beer-Lambert). Ce phénomène semble relié à la discontinuité des propriétés diélectrique des CBP qui sont supposées constantes (dans ce projet). Pour cette couche (2^{ème}), la solution de Beer-Lambert sous-estime l'amplitude des micro-ondes calculé par la méthode exacte. Ce décroissement observé dans les résultats est probablement dû au changement des propriétés diélectriques des CBP dans chaque phase).

Concernant la dernière couche, d'épaisseur 70.10^{-3} m, l'allure des amplitudes des micro-ondes se comporte d'une manière sinusoïdale pour la solution exacte alors que pour la solution de Lambert est quasi-constante.

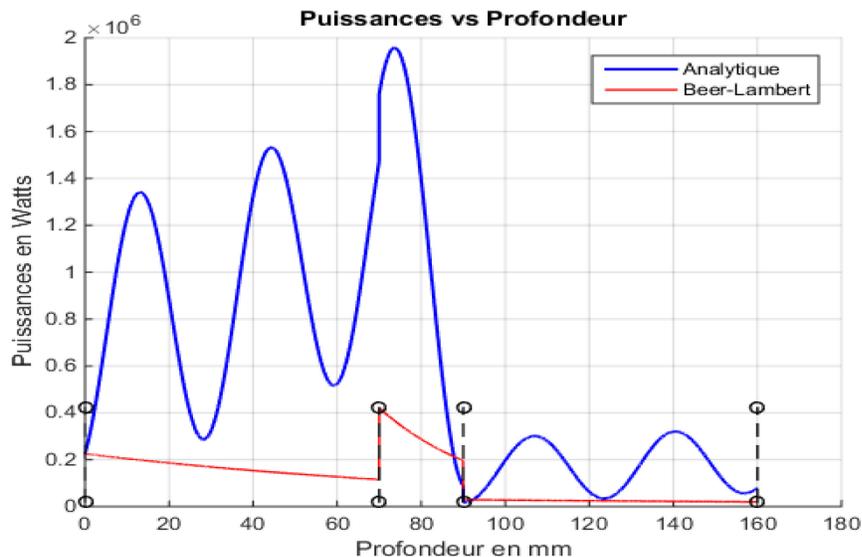


Figure 4.10 Puissance absorbée par le composite en fonction de la profondeur de pénétration

Selon la Figure 4.10, les puissances absorbées par le CBP obtenues par les deux méthodes exactes et approchées, suivent des allures similaires à celles des amplitudes (Figure 4.9). La valeur minimale de la puissance absorbée, obtenue par les deux approches est 2.10^5 W à l'interface air-couche. Toutefois la variation de cette puissance est différente d'une couche à l'autre. Dans la première couche, la puissance augmente

jusqu'à $1,8 \cdot 10^6$ W à l'interface (avec la seconde couche) pour la solution exacte, et jusqu'à $2 \cdot 10^5$ W pour la loi de Beer-Lambert. Dans la deuxième couche d'épaisseur $20 \cdot 10^{-3}$ m, la valeur de la puissance absorbée diminue jusqu'à zéro pour la solution exacte et elle diminue jusqu'à une valeur $2 \cdot 10^5$ W pour la loi de Beer-Lambert. Dans la troisième couche, on constate que le modèle exact fournit une puissance sinusoïdale dans l'épaisseur tandis que le modèle de Beer-Lambert donne une solution constante et presque nulle. En conséquence, on peut conclure que le modèle de Beer-Lambert peut entraîner des résultats non conformes aux prédictions exactes.

- *Évolution de la température par micro-ondes dans le multicouche C-B-A*

Pour l'analyse de l'évolution de la température dans le multicouche C-B-A, on a fixé le temps à 340 s. Les résultats présentés sont illustrés dans la Figure 4.11 à différents instants. On constate que les courbes suivent les allures des puissances absorbées (voir figure 4.10

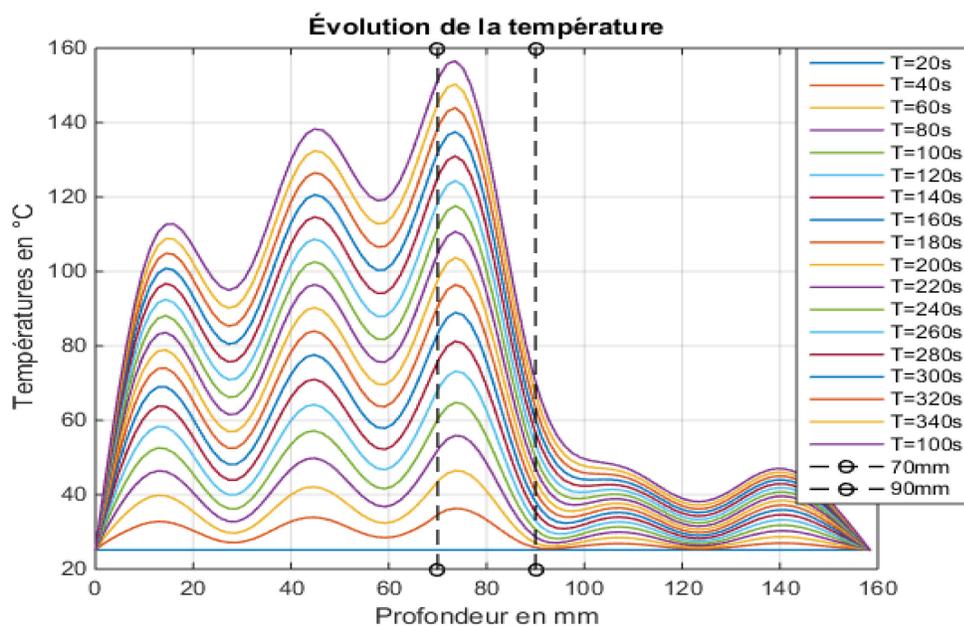


Figure 4.11 Profil de la température pendant 6 minutes du CBP par le modèle 1D

- *Évolution de la température par micro-ondes dans une épaisseur de 16mm*

La configuration étudiée dans cette partie est (100, 200 et 500 μm). Ce choix est basé sur des considérations industrielles (qui utilisent souvent des épaisseurs de couches variant entre quelques millimètres à quelques centimètres) En plus, le chauffage des CBP ayant une telle configuration est plus uniforme et moins énergivore. Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 4.12.

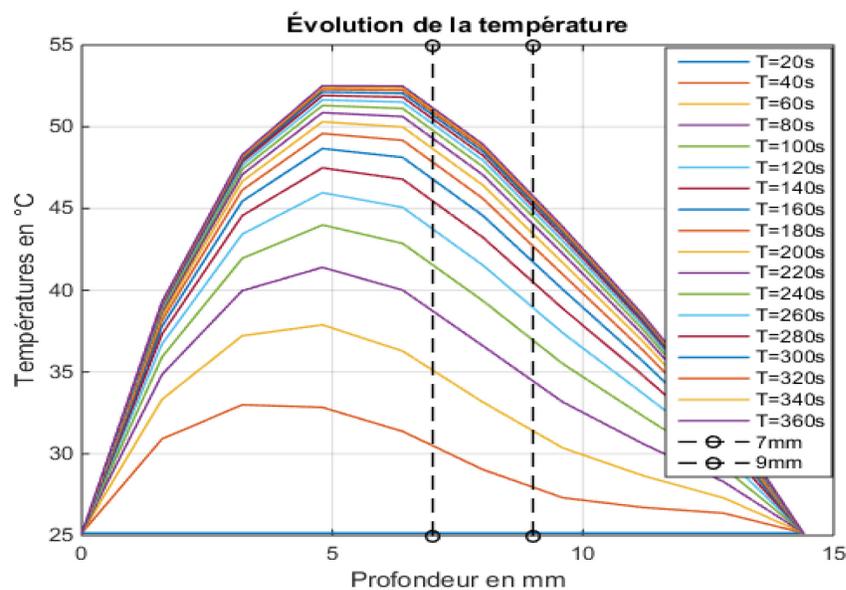


Figure 4.12 Profil de température pendant 6 minutes du CBP pour une épaisseur de 16 mm par le modèle 1D

4.4 Interprétation des résultats

4.4.1 Amplitude et puissance

Selon les résultats numériques obtenus, et en se référant aux figures 4.6, 4.7, 4.9, 4.10 sur les amplitudes et les puissances induites dans le multicouche pour des tailles différentes des fibres du bois, on constate que les solutions fournies par le modèle de Beer-Lambert et les solutions exactes sont différentes. Effectivement, la loi de Beer-

Lambert montre des résultats variables selon la taille des fibres utilisées. En plus, ce modèle ne semble pas donner des résultats convenables vis-à-vis la solution exacte qui est basée sur les équations de Maxwell. Selon la solution exacte, on constate que les résultats associés au multicouche (100, 200 et 500 μm) dissipe moins d'énergie que le deuxième cas de multicouche (500, 200 et 100 μm). En effet, le profil des puissances dissipées par les micro-ondes dans la configuration (100, 200 et 500 μm) (voir Fig. 4.7) est supérieur à celui de la configuration (500, 200 et 100 μm) (voir Fig.4.10). Cette remarque est directement reliée aux propriétés diélectriques des couches présentes dans le matériau, qui explicitement dépendent de la taille des fibres présentes dans chaque couche.

4.4.2 Température

Selon les résultats numériques obtenus pour chacune des deux multicouches, dont l'épaisseur est 160 mm, les solutions fournies par le modèle de Beer-Lambert et les solutions exactes en températures sont différentes (voir les Figure 4.8 et Figure 4.11) mais les allures suivent les puissances absorbées par chaque couche du matériau (voir Figure 4.7 et Figure 4.10). La loi de Beer-Lambert ainsi que la solution exacte montrent des résultats variables selon la taille des fibres utilisées et cela dans chaque couche. Toutefois, le modèle de Beer-Lambert ne semble pas donner des résultats convenables vis-à-vis la solution exacte, qui est basée sur les équations de Maxwell. Selon la solution exacte, on constate que les résultats associés au multicouche (100, 200 et 500 μm) dissipe moins d'énergie que le deuxième cas de multicouche (500, 200 et 100 μm). En effet, le profil des puissances dissipées par les micro-ondes à la fin du cycle chauffage de 6 minutes dans la configuration (100, 200 et 500 μm) (voir Fig. 4.8) est supérieur à celui de la configuration (500, 200 et 100 μm) (voir Fig.4.11). Pour les deux configurations, on constate que les températures les plus élevés sont concentrés dans la couche centrale. Dans le cas où l'épaisseur des trois couches est de 16mm (voir Figure 4.12), la plus haute température se concentre dans la première et la deuxième

couche. Le choix de taille des couches ainsi que leurs configurations (100, 200 et 500 μm) permettent un chauffage plus efficace dans la région centrale du matériau. Par contre, moins efficace dans les bords. On remarque aussi que la taille de fibre de bois a un impact sur le chauffage diélectrique; par exemple la couche de taille de fibre de bois 500 μm peut atteindre 65 °C dans la première couche, par contre dans la couche de taille de fibre de bois 100 μm la température maximale est de 45 °C dans un temps de chauffage de deux (2) minutes. À titre de conclusion, comme précédemment, la chaleur dissipée dans le matériau est directement reliée aux propriétés diélectriques des couches présentes dans le matériau, qui explicitement dépendent de la taille des fibres présentes dans chaque couche

CHAPITRE 5

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le chauffage diélectrique, associé à l'utilisation des ondes électromagnétiques, est devenu une piste d'intérêt à plusieurs applications industrielles grâce à ses avantages liés notamment à sa rapidité de chauffage pour les biomatériaux et bio-composites.

L'objectif principal de cette étude est, d'une part, de développer un outil numérique (1D) permettant de modéliser le chauffage diélectrique des membranes multicouches en bio-compostes (CBP) et, d'autre part, d'évaluer quelques paramètres (la taille de fibre, l'épaisseur des couches) qui peuvent influencer le comportement thermique d'un composite bois-polymère. Pour ce faire, les propriétés diélectriques complexes et les propriétés thermophysiques sont supposées constantes. Pour l'étude analytique et numérique, trois éléments sont considérés :

1. Le modèle analytique (1D), proposé par Basak (2004) sur l'interaction micro-ondes et multicouche, a été utilisé, par l'entremise d'un code Matlab élaboré, pour déterminer l'amplitude et le champ électrique induit dans un matériau à trois couches
2. Par l'entremise des champs électriques obtenu à l'étape 1 ci-dessus, la puissance absorbée par le matériau multicouche est calculée.
3. Par l'entremise de la puissance calculée dans l'étape 2 (ci-dessus), on a calculé l'évolution de la température dans les multicouches CBP, par l'entremise de la

résolution numérique de l'équation de l'énergie (1D par la méthode des éléments finis (1D).

Dans la première partie qui concerne le calcul de l'amplitude et la puissance absorbée dans les trois couches du CBP, on a remarqué que la loi de Lambert prédit des résultats non conformes par rapport à la solution exacte tant pour le champ électrique que pour la puissance. Cela est dû à la loi de Lambert qui est purement basée sur le champ transmis et qu'une quantité importante de réflexion dans les couches de CBP n'est pas considéré.

Selon les résultats obtenus, il semble que les constantes diélectriques relatives de chaque couche sont à l'origine des différences observées entre les grandeurs mesurées dans chaque couche.

Les résultats de la simulation montrent que la taille de fibre dans chaque couche joue un rôle important dans le chauffage.

Les résultats thermiques montrent que l'évolution des températures dans le bio-composite est plus importante au milieu des trois couches. Par ailleurs, l'épaisseur des couches joue un rôle très important dans le chauffage diélectrique du matériau. En ce qui concerne les tailles de fibre, la configuration 100/200/500 μm semble plus efficace que la configuration 500/200/100 μm .

RÉFÉRENCES

- Ay, N. et H. Sahin (2004). "Dielectric constant of Turkish timbers in the longitudinal direction at a 9.8-GHz frequency." *Forest products journal* 54(10): 65-68.
- Ayappa, K., et al. (1991). "Microwave heating: an evaluation of power formulations." *Chemical engineering science* 46(4): 1005-1016.
- Azlan, A. A., et al. (2014). "A comparative study of material leucaena leucocephala stem wood plastic composite (WPC) substrate with FR4 substrate throughout single patch antenna design." *Progress In Electromagnetics Research* 59: 151-166.
- Barba, A. A. et M. d'Amore (2012). Relevance of dielectric properties in microwave assisted processes. *Microwave materials characterization, InTechOpen*: 158 p.
- Basak, T. (2004). "Analysis of microwave propagation for multilayered material processing: Lambert's law versus exact solution." *Industrial & engineering chemistry research* 43(23): 7671-7675.
- Bourai, K. (2010). Étude du comportement thermique d'un composite bois-polymère pour une application en rotomoulage. Mémoire de maîtrise, Université Laval, 118 p.
- Diaz-Quijano, F. A., et al. (2010). "Predictors of spontaneous bleeding in patients with acute febrile syndrome from a dengue endemic area." *Journal of Clinical Virology* 49(1): 11-15.
- Elloumi, I. (2016). Caractérisation des propriétés diélectriques du bois et des composites bois-polymère. Mémoire de maîtrise, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue. 118 p.

- Erchiqui (2013). "Analysis of power formulations for the thawing of frozen wood using microwave energy." *Chemical engineering science* 98: 317-330.
- Gaur, U., et al. (1982). "Heat capacity and other thermodynamic properties of linear macromolecules VI. Acrylic polymers." *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 11(4): 1065-1089.
- George, S. P., et al. (2001). "A novel thermostable xylanase from *Thermomonospora* sp.: influence of additives on thermostability." *Bioresource Technology* 78(3): 221-224.
- Georgopoulos, S. T., et al. (2005). "Thermoplastic polymers reinforced with fibrous agricultural residues." *Polymer Degradation and Stability* 90(2): 303-312.
- Hamani, I. (2007). Modélisation par la méthode des éléments finis 3D du chauffage infrarouge d'une membrane semi-transparente en polyéthylène téréphtalate. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Chicoutimi, 107 p.
- Jaouen, G. (2007). Etude des stratégies biomécaniques de croissance des jeunes arbres en peuplement hétérogène tropical humide. Thèse, Université Henri Poincaré-Nancy 1: 218.
- Jozsa, L. et G. Middleton (1994). A discussion of wood quality attributes and their practical implications. Rapport 51.
- Li, Y. (2012). "Effect of coupling agent concentration, fiber content, and size on mechanical properties of wood/HDPE composites." *International Journal of Polymeric Materials* 61(11): 882-890.
- Lu, J. Z., et al. (2007). "Chemical coupling in wood fiber and polymer composites: a review of coupling agents and treatments." *Wood and fiber science* 32(1): 88-104.
- Maddah, H. A. (2016). "Polypropylene as a promising plastic: A review." *Am. J. Polym. Sci* 6(1): 1-11.

- Markiewicz, E., et al. (2012). Acoustic and dielectric properties of polypropylene-lignocellulosic materials composites. Polypropylene. Livre, IntechOpen: 196.
- Nishino, T., et al. (2003). "Cellulose self-reinforced composite." *ecomposites*, University of London.
- Notingher, P. V., et al. (2010). "Dielectric properties of wood-polymer composites." *Materiale Plastice* 47: 393-398.
- Rattanadecho, P. (2004). "Theoretical and experimental investigation of microwave thawing of frozen layer using a microwave oven (effects of layered configurations and layer thickness)." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47(5): 937-945.
- Tazi, M. (2015). Valorisation des sciures de bois dans des composites thermoplastiques (HDPE-BOIS): élaboration, caractérisation et modélisation en soufflage libre, Thèse de doctorat. Université du Québec à Chicoutimi. 138 pages.
- Wechsler, A. et S. Hiziroglu (2007). "Some of the properties of wood-plastic composites." *Building and Environment* 42(7): 2637-2644.
- Wegst, U. et M. Ashby (2004). "The mechanical efficiency of natural materials." *Philosophical Magazine* 84(21): 2167-2186.
- Zobel, B. (1981). "Wood quality from fast-grown plantations." *Tappi*;(United States) 64 (1).

Annexe A

Pour l'application de la méthode des éléments finis, l'équation qui régit le problème de transfert de chaleur sera exprimée sous une forme variationnelle. À ce stade, il est important de distinguer le traitement numérique du domaine physique par rapport à celui du temps, relativement au problème de transfert de chaleur. En conséquence, une solution approchée de l'équation variationnelle sera obtenue en subdivisant le domaine physique en sous-domaines élémentaires (éléments finis) :

$$\int_{x_1}^{x_2} U(x) \cdot \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] \cdot dx = 0 \quad (1)$$

En effectuant une intégration par parties on réduit la forte régularité de la fonction température au niveau des dérivées secondes en faisant apparaître une forme faible de l'équation de la chaleur devient :

$$\int_t \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + k \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + U_x \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1} - U_x \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_2} = 0 \quad (2)$$

On définit $p_1 = k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1}$ et $p_2 = k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_2}$

Alors l'équation (2) devient

$$\int_t \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} U_x + k \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx - p_1 U_x - p_2 U_x = 0 \quad (3)$$

Choisissons $U_x = N_i$ et $T = N_j(x)T_j(t)$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dN_i}{dx} T_j \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT_j}{dt} N_j = N_j \dot{T}$$

Donc l'équation (3) devient :

$$\int_{x_1}^{x_2} (\rho c_p N_i N_j \frac{dT_j}{dt}) dx + \int_{x_1}^{x_2} (K \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} T_j) dx - p_1 N_i(x_1) - p_2 N_i(x_2) = 0 \quad (4)$$

Ou encore :

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} (\rho c_p N_i N_j) dx \right] \dot{T}_j + \left(\int_{x_1}^{x_2} K \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) T_j = p_i N_i \quad (5)$$

La forme générale de la conduction de chaleur dans un élément donné prend la forme suivante :

$$M_{ij}^e \dot{T} + K_{ij}^e T_j = F_i^e \quad (6)$$

Avec

$$M_{ij}^e \int_{x_1}^{x_2} \rho c_p \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx = \rho c_p \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$F_i^e = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Assemblage

Il consiste à construire les matrices globales à partir de $[K]$; $[M]$ leurs matrices élémentaires et du vecteur de charge $\{F\}$ à partir de vecteur élémentaire.

Leurs expressions sont données par :

$[K] = \sum_e [K^e]$ La matrice de conductivité globale;

$[M] = \sum_e [M^e]$ La matrice de capacité globale;

$\{F\} = \sum_e \{F^e\}$ Le vecteur de charge thermique global.

On utilise θ famille en temps d'approximation pour écrire :

$$\theta = \frac{t-t^n}{\Delta t} \quad (9)$$

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \quad (10)$$

D'où l'équation (5) s'écrit en tenant compte de (10)

$$\begin{aligned} [M] \cdot \left(\frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \right) + [K] \cdot ((1-\theta) \cdot \{T\}_n + \theta \cdot \{T\}_{n+1}) \\ = (1-\theta) \cdot \{F\}_n + \theta \{T\}_{n+1} \end{aligned} \quad (11)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$([M] + \Delta t \cdot \theta \cdot [K]) \cdot \{T\}_{n+1} = ([M] - (1-\theta) \cdot \Delta t \cdot [K]) \cdot \{T\}_n + \Delta t \cdot [(1-\theta) \cdot F_n + \theta \cdot F_{n+1}] \quad (12)$$

Annexe B

Les conditions d'interfaces entre chacune des deux premiers couches, relativement aux champs électriques transmises et réfléchies, on a :

$$E_{t,1}e^{jK_1Z_1} + E_{r,1}e^{-jK_1Z_1} = E_{t,2}e^{jK_2Z_1} + E_{r,2}e^{-jK_2Z_1}$$

$$jK_1E_{t,1}e^{jK_1Z_1} - jK_1E_{r,1}e^{-jK_1Z_1} = jK_2E_{t,2}e^{jK_2Z_1} - jK_2E_{r,2}e^{-jK_2Z_1}$$

et puisque on a $E_{t,1}=E_0$, alors on peut écrire :

$$E_{r,1}e^{-jK_1Z_1} - E_{t,2}e^{jK_2Z_1} - E_{r,2}e^{-jK_2Z_1} = -E_0e^{jK_1Z_1}$$

$$-jK_1E_{r,1}e^{-jK_1Z_1} - jK_2E_{t,2}e^{jK_2Z_1} + jK_2E_{r,2}e^{-jK_2Z_1} = -jK_1E_0e^{jK_1Z_1}$$

Le champ électrique a l'interface des couches 2 et 3

$$E_{t,2}e^{jK_2Z_2} + E_{r,2}e^{-jK_2Z_2} = E_{t,3}e^{jK_3Z_2} + E_{r,3}e^{-jK_3Z_2}$$

$$jK_2E_{t,2}e^{jK_2Z_2} - jK_2E_{r,2}e^{-jK_2Z_2} = jK_3E_{t,3}e^{jK_3Z_2} - jK_3E_{r,3}e^{-jK_3Z_2}$$

D'où :

$$E_{t,2}e^{jK_2Z_2} + E_{r,2}e^{-jK_2Z_2} - E_{t,3}e^{jK_3Z_2} - E_{r,3}e^{-jK_3Z_2} = 0$$

$$jK_2E_{t,2}e^{jK_2Z_2} - jK_2E_{r,2}e^{-jK_2Z_2} - jK_3E_{t,3}e^{jK_3Z_2} + jK_3E_{r,3}e^{-jK_3Z_2} = 0$$

Le champ électrique a l'interface des couches 3 et 4

$$E_{t,3}e^{jK_3Z_3} + E_{r,3}e^{-jK_3Z_3} = E_{t,4}e^{jK_4Z_3} + E_{r,4}e^{-jK_4Z_3}$$

$$jK_3E_{t,3}e^{jK_3Z_3} - jK_3E_{r,3}e^{-jK_3Z_3} = jK_4E_{t,4}e^{jK_4Z_3} - jK_4E_{r,4}e^{-jK_4Z_3}$$

D'où :

$$E_{t,3}e^{jK_3Z_3} + E_{r,3}e^{-jK_3Z_3} - E_{t,4}e^{jK_4Z_3} - E_{r,4}e^{-jK_4Z_3} = 0$$

$$jK_3E_{t,3}e^{jK_3Z_3} - jK_3E_{r,3}e^{-jK_3Z_3} - jK_4E_{t,4}e^{jK_4Z_3} - jK_4E_{r,4}e^{-jK_4Z_3} = 0$$

Finalement, sous forme matricielle, les équations ci-dessus donne:

$$\begin{bmatrix} e^{-jK_1Z_1} & -e^{jK_2Z_1} & -e^{-jK_2Z_1} & 0 & 0 & 0 \\ -K_1e^{-jK_1Z_1} & -K_2e^{jK_2Z_1} & K_2e^{-jK_2Z_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{jK_2Z_2} & e^{-jK_2Z_2} & -e^{-jK_3Z_2} & -e^{jK_3Z_2} & 0 \\ 0 & K_2e^{jK_2Z_2} & -K_2e^{-jK_2Z_2} & -K_3e^{jK_3Z_2} & K_3e^{-jK_3Z_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{jK_3Z_3} & e^{-jK_3Z_3} & -e^{jK_4Z_3} \\ 0 & 0 & 0 & K_3e^{jK_3Z_3} & -K_3e^{-jK_3Z_3} & -K_4e^{jK_4Z_3} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} E_{r,1} \\ E_{t,2} \\ E_{r,2} \\ E_{t,3} \\ E_{r,3} \\ E_{t,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0e^{jK_1Z_1} \\ -K_1E_0e^{jK_1Z_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En posant les définitions suivantes :

$$M = \begin{bmatrix} e^{-jK_1Z_1} & -e^{jK_2Z_1} & -e^{-jK_2Z_1} & 0 & 0 & 0 \\ -K_1e^{-jK_1Z_1} & -K_2e^{jK_2Z_1} & K_2e^{-jK_2Z_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{jK_2Z_2} & e^{-jK_2Z_2} & -e^{-jK_3Z_2} & -e^{jK_3Z_2} & 0 \\ 0 & K_2e^{jK_2Z_2} & -K_2e^{-jK_2Z_2} & -K_3e^{jK_3Z_2} & K_3e^{-jK_3Z_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{jK_3Z_3} & e^{-jK_3Z_3} & -e^{jK_4Z_3} \\ 0 & 0 & 0 & K_3e^{jK_3Z_3} & -K_3e^{-jK_3Z_3} & -K_4e^{jK_4Z_3} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} E_{r,1} \\ E_{t,2} \\ E_{r,2} \\ E_{t,3} \\ E_{r,3} \\ E_{t,4} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} E_0e^{jK_1Z_1} \\ -K_1E_0e^{jK_1Z_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le problème algébrique à résoudre est le suivant :

$$[M] \cdot \{B\} = \{Y\}$$

La résolution du système ci-dessus fournit les expressions des composantes réfléchies et transmises du champ électrique dans chaque couche.