

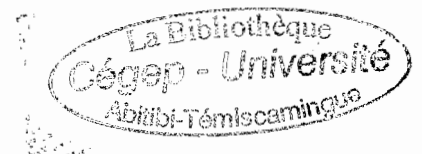
**UNIVERSITÉ DU QUÉBEC**

**MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE**

**PAR  
IBRAHIME HAMANI**

**MODÉLISATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS 3D DU  
CHAUFFAGE INFRAROUGE D'UNE MEMBRANE SEMI-TRANSPARENTE EN  
POLYÉTHYLÈNE TÉRÉPHTALATE AMORPHE**

**FÉVRIER 2007**





# BIBLIOTHÈQUE

Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue  
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

## Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

**CE MÉMOIRE A ÉTÉ RÉALISÉ  
À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE  
DANS LE CADRE DU PROGRAMME  
DE MAÎTRISE EN INGÉNIERIE  
DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
OFFERT PAR EXTENTION À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-  
TÉMISCAMINGUE**

## RÉSUMÉ

Dans les procédés de thermoformage, d'extrusion-étirage et de soufflage de pièces creuses, la mise en forme est caractérisée par une étape de chauffage de préformes thermoplastiques au dessus de la température de transition vitreuse. Celle-ci s'effectue par chauffage dans un four à rayonnement infrarouge. Disposé dans un moule de géométrie donnée, le matériau sera mis en forme afin d'élaborer la pièce désirée. Toutefois, la répartition de la température dans la préforme a une grande influence sur la qualité de l'objet formé.

Dans ce mémoire, on a établi par la méthode des éléments finis implicite en trois dimensions (3D) une approche pour l'analyse de l'évolution de la température au sein d'une membrane semi-transparente de type polyéthylène téréphtalate (PET) amorphe, exposée à une source radiative. En se basant sur le comportement radiatif du PET, un transfert radiatif unidirectionnel, suivant l'épaisseur de la membrane, régit par la loi de Beer-Lambert, est considéré. Pour le calcul des facteurs de forme entre diverses régions de la feuille thermoplastique et de l'émetteur infrarouge, la méthode de contour a été retenue. De nombreuses simulations numériques ont permis de confronter et de valider les résultats obtenus vis-à-vis des résultats analytiques et expérimentaux, issus de la littérature. Comme application, on a étudié le chauffage d'une feuille thermoplastique en PET exposée à une source radiative infrarouge.

**Mots-clés :** chauffage infrarouge, thermoplastiques semi-transparentes, facteur de forme, méthode de contour, éléments finis 3D, polyéthylène téréphtalate.

## REMERCIEMENTS

Il me fait plaisir d'adresser mes remerciements à:

M. Fouad Erchiqui, mon directeur de recherche pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet; pour sa très étroite collaboration; pour ses compétences et son professionnalisme; pour m'avoir apporté son soutien financier et moral dans les moments difficiles. Sa grande disponibilité et son aide à tout moment m'ont permis de mener à bien cette étude et la rédaction de ce mémoire.

M. André Charrette, professeur à l'UQAC, mon co-directeur; pour son apport apprécié et pour avoir bien voulu nous faire l'honneur d'examiner notre travail.

M. Guyh Dituba Ngoma, mon co-directeur à l'UQAT; pour les encouragements constants et les suggestions éclairées qu'il m'a apporté.

Les professeurs du département des sciences appliquées de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) qui ont intervenu dans cette maîtrise en ingénierie; pour la qualité de leur enseignement.

Mes collègues de la maîtrise pour leur amitié et leur soutien matériel.

Tout le personnel du service des étudiants de l'UQAT pour l'aide et le soutien qu'il m'a apporté durant mes études.

Tous ceux ou celles qui de près ou de loin m'ont soutenu durant ma formation.

Ma famille au Niger; pour leur patience, leur soutien et leurs encouragements tout au long de cette période. Qu'elle trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude et de toute ma reconnaissance.

A mon regretté cher père à qui je dédie ce modeste travail. Hommage respectueux.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> .....	i
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	ii
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> .....	iii
<b>LISTE DES SYMBOLES</b> .....	v
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	vii
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> .....	x
<b>LISTE DES ANNEXES</b> .....	xi
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b> .....	1
1. Généralités sur les matériaux thermoplastiques.....	1
2. État de l’art sur le transfert de chaleur radiatif dans les thermoplastiques semi-transparents .....	3
3- Problématique.....	6
4- Objectif de l’étude .....	7
5- Méthodologie.....	7
 <b>CHAPITRE 1</b> .....	 10
<b>DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE ET MISE EN ÉQUATIONS</b> .....	10
1.1. Transfert de chaleur par rayonnement dans les milieux absorbants .....	10
1.1.1. Mise en équation du phénomène de transfert par rayonnement infrarouge.....	14
1.2. Calcul des facteurs de forme entre deux surfaces.....	18
1.2.1. Méthodes d’intégration directe .....	20
1.2.2. La méthode d’intégration de surface .....	20
1.2.3. La méthode de contour .....	21
1.2.4. Méthode d’aire-intégration .....	22
1.2.5. Méthode statistique de Monté Carlo .....	23
1.2.6. Approche retenue pour le calcul des facteurs de forme.....	24
 <b>CHAPITRE 2</b> .....	 28
<b>MODÉLISATION DE L’ÉQUATION DE LA CHALEUR À TROIS DIMENSIONS PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.</b> .....	 28

2.1. Discrétisation par la méthode des éléments finis 3D .....	29
2.1.1. Formulation intégrale.....	29
2.1.2. Les conditions aux limites .....	30
2.1.3. Les fonctions d'interpolation .....	31
2.1.4. La méthode de Galerkin.....	32
2.1.5. Évaluation des intégrales : la méthode de Gauss.....	34
2.1.6. Assemblage .....	35
2.1.7. Schéma d'intégration du temps.....	35
2.1.7.1. Schéma explicite .....	37
2.1.7.2. Schéma implicite.....	37
2.2. Résolution numérique de l'équation discrétisée .....	38
2.3. Validation analytique et numérique. ....	41
2.3.1. Répartition de la température à travers l'épaisseur d'une plaque en absence de source radiative. ....	41
2.3.2. Répartition de la température à travers l'épaisseur d'une plaque semi-infinie dans le cas d'une présence de source radiative (Cas 1D) .....	48
2.3.3. Répartition de la température à travers l'épaisseur d'une plaque semi-infinie dans le cas d'une présence de source radiative (Cas 3D) .....	52
<b>CHAPITRE 3 .....</b>	<b>56</b>
<b>MODÉLISATION TRANSITOIRE DU CHAUFFAGE INFRAROUGE D'UNE</b>	
<b>FEUILLE DE PET.....</b>	<b>56</b>
3.1. Dispositif expérimental de chauffage .....	56
3.2. Comparaison numérique MEF 3D / expérimentale .....	57
3.3. Application au chauffage de plaques PET .....	63
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>69</b>
<b>RÉFÉRENCES.....</b>	<b>72</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>77</b>

## LISTE DES SYMBOLES

### Symboles latins

Symbole	Grandeur	Unité
$A$	Coefficient d'absorption	$m^{-1}$
$A_s$	Surface émettrice	$m^2$
$A_r$	Surface du récepteur	$m^2$
$C$	Chaleur spécifique	$J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$
$d$	Distance entre l'émetteur et le récepteur	$m$
$E_p$	Épaisseur caractéristique du matériau	$m$
$F_{ij}$	Facteur de forme	
$F_{s-r}$	Facteur de forme entre la source et le récepteur thermoplastique	
$F_{dA' \rightarrow dV}$	Facteur de réception surface-volume	
$F_{dV' \rightarrow dV''}$	Facteur de réception volume-volume	
$h$	Coefficient de convection	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
$I(s, \Omega)$	Intensité directionnelle de direction de propagation $\Omega$ à la position $s$	$W m^{-2} Sr^{-1}$
$I$	Intensité radiative	$W m^{-2} Sr^{-1}$
$I_b$	Fonction de Planck (intensité du corps noir)	$W m^{-2} sr^{-1}$
$k$	Conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$q_x, q_y, q_z$	Densités de flux conductif instantané	$W m^{-2}$
$q_r$	Flux radiatif	$W m^{-2}$
$S_r$	Expression du terme source radiatif	$W \cdot m^{-3}$
$T$	Température	$K$
$t$	Temps	$s$
$T_s$	Température absolue uniforme de l'émetteur	$K$
$T_\infty$	Température du milieu ambiant	$K$



X,Y,Z                      Coordonnées cartésiennes

### **Symboles grecs**

Symbole	Grandeur	Unité
$\alpha$	Diffusivité thermique	$m^2 S^{-1}$
$\beta$	Coefficient d'extinction	
$\varepsilon_s$	Émissivité moyenne de la source	
$\Phi(\hat{r}_i, \hat{r})$	Fonction de phase de dispersion	$Sr^{-1}$
$\rho$	Masse volumique	$Kg \cdot m^{-3}$
$\sigma$	Constante de Stéphan-Boltzmann	$Wm^{-2} K^{-4}$
$\tau$	Transmittivité	
$\omega$	Coefficient albedo de dispersion simple	

### **Vecteurs**

$\hat{r}$	Direction de propagation
$\hat{r}_i$	Direction de propagation incidente

### **Abréviation**

Symbole	Identifiant
PET	Polyéthylène téréphtalate
ECE	Équation de conservation de l'énergie
ETR	Équation de transfert radiatif

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1</b> : Synthèse du polyéthylène téréphtalate (Yann, 2003).....	2
<b>Figure 2</b> : Spectre de transmittivité du PET (Venkateswaran et al, 1997). ....	11
<b>Figure 3</b> : Schématisation de l'étape de chauffage d'une plaque thermoplastique semi-transparente par un émetteur infrarouge. ....	13
<b>Figure 4</b> : Représentation des facteurs de forme .....	19
<b>Figure 5</b> : Géométrie et nomenclature de la méthode d'aire-intégration pour le calcul de facteur de forme .....	22
<b>Figure 6</b> : Schématisation pour la validation du calcul de facteur de forme entre deux surfaces carrées unitaires parallèles. ....	25
<b>Figure 7</b> : Maillage des carrés unitaires pour la méthode d'aire-intégration.....	27
<b>Figure 8</b> : Étapes de suivi pour l'implantation du schéma implicite de Crank-Nicolson utilisées dans la MEF .....	39
<b>Figure 9</b> : Organigramme pour la résolution du problème transitoire linéaire par la MEF.	40
<b>Figure 10</b> : Chauffage d'une plaque plane infinie .....	41
<b>Figure 11</b> : Maillage 1 par MEF 3D .....	44
<b>Figure 12</b> : Maillage 2 par MEF 3D .....	45
<b>Figure 13</b> : Validation des solutions MEF1D et MEF3D (N=10, t=35s) .....	46
<b>Figure 14</b> : Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3 (N=10, t=35s).....	47
<b>Figure 15</b> : Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3D (N=100, t=35s).....	47
<b>Figure 16</b> : Représentation du modèle analytique 1D .....	48
<b>Figure 17</b> : Comparaison solution analytique et numérique MEF1D de la température par rapport à l'épaisseur pour différents temps t=10s, t=25s, t=35s (N=25). ....	50
<b>Figure 18</b> : Précision du calcul de la solution MEF1D (N=25).....	51
<b>Figure 19</b> : Erreur relative MEF1D en fonction de l'épaisseur (N=100).....	51
<b>Figure 20</b> : Erreur relative MEF1D au centre en fonction du temps (N=100) .....	52

<b>Figure 21</b> : Comparaison des solutions MEF1D et MEF3D pour différentes surfaces (AA×BB) à t=25s et d'épaisseur 10mm. ....	54
<b>Figure 22</b> : Erreur totale MEF3D / analytique 1D en fonction de l'épaisseur pour différentes surfaces (AA×BB) à t=25s et d'épaisseur 10mm. ....	54
<b>Figure 23</b> : Distribution de la température sur les traces de la feuille PET avant et arrière (Épaisseur 1,5 mm) à t = 35 s .....	59
<b>Figure 24</b> : Schématisation des traces avant et arrière de la plaque carrée PET, de 20cm de côté et 15mm d'épaisseur. ....	59
<b>Figure 25</b> : Erreurs relatives entre les solutions numériques MEF3D et les mesures expérimentales pour la trace avant de la plaque .....	60
<b>Figure 26</b> : Erreurs relatives entre les solutions numériques MEF3D et les mesures expérimentales pour la trace arrière de la plaque .....	60
<b>Figure 27</b> : Distribution temporelle de la température à la face arrière.....	61
<b>Figure 28</b> : Erreur relative dans le temps MEF3D/Expérimentale au centre..... (x = 10 cm, y = 10 cm, z = 1,5 mm) .....	62
<b>Figure 29</b> : Erreur relative dans le temps MEF3D/Expérimentale .....	62
(x = 10 cm, y = 17,5 cm, z = 1,5 mm) .....	62
<b>Figure 30</b> : Évolution de la température à travers l'épaisseur (milieu de la feuille)..... de 0.5 s à 4 s.....	64
<b>Figure 31</b> : Distribution de la température à travers l'épaisseur (milieu de la feuille) de 5 s à 35 s. ....	64
<b>Figure 32</b> : Évolution transitoire de la température en haut et en bas de la feuille PET ....	65
<b>Figure 33</b> : Variation de la différence de la température entre les faces haut et bas de la feuille. ....	66
<b>Figure 34</b> : Évolution de la température : face haut de la feuille PET.....	67
<b>Figure 35</b> : Distribution transitoire surfacique de la température : face avant .....	67
<b>Figure 36</b> : Distribution transitoire surfacique de la température : milieu de la pièce .....	68
<b>Figure 37</b> : Distribution transitoire surfacique de la température : face arrière.....	68
<b>Figure 1aA</b> : Élément de volume du milieu.....	78

<b>Figure 1aC</b> : Représentation de la discrétisation des contours des éléments pour les calculs des facteurs de forme .....	84
<b>Figure 2aC</b> : Représentation de la transformation des coordonnées des contours des éléments pour les calculs des facteurs de forme .....	85
<b>Figure 1aD</b> : Schématisation d'un élément de référence.....	87
<b>Figure 1aF</b> : Chauffage d'une plaque plane infinie .....	91

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 1</b> : Comparaison de la méthode de contour avec les méthodes d'aire-intégration et de Gauss quadratique. ....	26
<b>Tableau 2</b> : Propriétés thermophysiques du PET.....	43
<b>Tableau 3</b> : Paramètres utilisés pour la résolution du problème de la deuxième validation. (Monteix et al, 2001) .....	49

**LISTE DES ANNEXES**

<b>Annexe 1</b> : Formulation de l'équation de conservation de l'énergie .....	78
<b>Annexe 2</b> : Établissement de l'expression du facteur de forme .....	82
<b>Annexe 3</b> : Méthode numérique de calcul de facteur de forme selon la méthode d'intégration de contour .....	84
<b>Annexe 4</b> : Caractéristiques du maillage par éléments finis 3D.....	87
<b>Annexe 5</b> : Transformation des intégrales dans l'élément de référence.....	89
<b>Annexe 6</b> : Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D transitoire à travers une plaque plane infinie.....	91
<b>Annexe 7</b> : Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D appliquée au cas du solide semi-infini diathermane.....	98
<b>Annexe 8</b> : Équation de transfert radiative (ETR).....	103

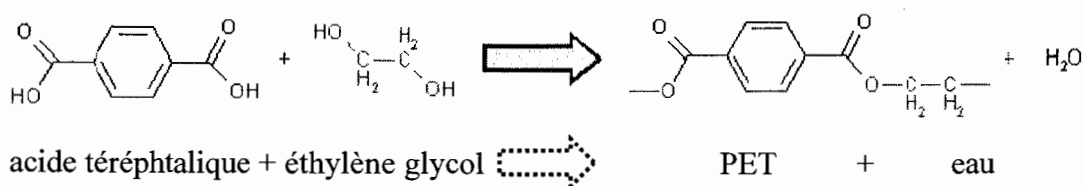
## INTRODUCTION GÉNÉRALE

### 1. Généralités sur les matériaux thermoplastiques

La rapide évolution de l'ère industrielle est due principalement aux progrès réalisés dans l'élaboration et le traitement des matériaux. Parmi ceux-ci, les matériaux thermoplastiques constituent une importante classe de matériaux synthétiques, dérivés de polymères linéaires ou légèrement ramifiés. Ils présentent de nombreuses propriétés parfois inégalables. Ils se caractérisent par leur aptitude à conserver leur plasticité à chaud et leur rigidité à froid. Ce sont des matériaux qui, de nos jours, se substituent progressivement aux métaux et aux verres grâce à leurs divers avantages autant au niveau des propriétés mécaniques (rigidité, légèreté, étanchéité, résistance à la corrosion entre autres) qu'au niveau économique (rapport qualité / prix).

Parmi les matériaux thermoplastiques semi-transparents, le polyéthylène téréphtalate (PET) est le plus utilisé dans l'industrie de mise en forme des bouteilles polymériques. C'est un polyester rigide et tenace obtenu par polycondensation à partir des produits de base : acide téréphtalique et éthylène glycol (Fig. 1). Sa structure peut être amorphe ou partiellement cristalline (jusqu'à 50%). La possibilité de passer d'une phase à l'autre dépend fortement de la température : en dessous de la température de transition vitreuse ( $T_g \approx 80^\circ\text{C}$ ), les chaînes ne sont pas assez mobiles et le matériau est solide, avec une microstructure figée (Yann, 2003). Au dessus de la température de fusion (environ  $270^\circ\text{C}$ ),

les liaisons entre les chaînes sont détruites, le matériau est liquide. Entre ces deux températures, les chaînes sont mobiles et leur configuration peut changer. C'est ce dernier état du matériau qui est intéressant pour beaucoup de procédés de fabrication car il permet à la fois de déformer celui-ci avec moins d'efforts et de faire évoluer sa microstructure.



**Figure 1** : Synthèse du polyéthylène téréphthalate (Yann, 2003).

Pour la mise en forme des membranes en PET (ou préformes), il est nécessaire d'atteindre rapidement sur toute l'épaisseur une température de déformation aux environs de 100°C. Le chauffage infrarouge court est préférentiellement utilisé, compte tenu de la semi-transparence du PET, qui présente une absorption spectrale. En effet, on trouve généralement dans la littérature des spectres de transmittivité du PET, dans la bande de l'infrarouge court qui représentent environ 95% du rayonnement émis (en appliquant la loi de Wien) par des émetteurs infrarouges utilisés à des températures de rayonnement proches de 1027°C (Shelby, 1991). D'autre part, le coefficient d'absorption du matériau PET est généralement déterminé par la connaissance du spectre de transmittivité du matériau (Hartwig, 1996). L'hypothèse voulant que ces matériaux (PET) absorbent le rayonnement d'après la loi de Beer-Lambert est souvent admise (Esser et al, 1987; Gross, 1990; Miyanaga et Nakano, 1990; Shelby, 1992; El Wakil et Sacadura, 1992).



Par ailleurs, les matériaux semi-transparents PET amorphes possèdent un faible coefficient de friction au glissement et une stabilité dimensionnelle élevée. Ces caractéristiques font du PET un matériau très largement utilisé notamment pour la fabrication des bouteilles, des films ou encore des fibres textiles. Sa percée sur le marché des bouteilles en particulier est très importante. En effet, la consommation qui était de 2,8 millions de tonnes en 1995 est passée en 2003 à plus de 6 millions de tonnes (Yann 2003).

Du point de vue industriel, l'un des problèmes que rencontre l'industrie de mise en forme de ce type de matériau (industries de thermoformage, de moulage par injection soufflage, etc.) est le recours à un nombre élevé d'essais avant d'entamer une production de masse qui occasionne des opérations coûteuses. Dans ces conditions, la modélisation numérique devient une alternative justifiable pour l'analyse et l'optimisation de ces procédés. Toutefois, l'évolution de la température dans un matériau thermoplastique semi-transparent de type PET n'a pas été suffisamment étudiée dans la littérature.

## **2. État de l'art sur le transfert de chaleur radiatif dans les thermoplastiques semi-transparents**

La qualité des pièces fabriquées dans le secteur de l'industrie de plastique dépend largement des échanges thermiques entre la source de chauffage utilisée et le matériau considéré. La prédiction des énergies échangées par rayonnement, entre chaque partie du matériau thermoplastique (récepteur) et chaque partie de l'émetteur (source infrarouge) de l'enceinte thermique, dépend, d'une part, des propriétés physiques de chaque partie du système émetteur-récepteur et, du milieu environnant d'autre part. Dans le cas d'un milieu

ambiant transparent, le problème de calcul de l'échange de chaleur radiatif entre des surfaces ' $i$ ' de l'émetteur infrarouge et ' $j$ ' du récepteur thermoplastique, placées arbitrairement dans l'espace, se ramène à la recherche de la valeur de la surface de radiation mutuelle  $F_{ij}$  (Kreith, 1959), appelée facteur de forme.

Dans le cas d'un matériau thermoplastique semi-transparent, la prédiction de l'évolution des températures dans ce milieu nécessite non seulement la connaissance des valeurs de  $F_{ij}$ , mais aussi une maîtrise de la méthode utilisée autant pour la résolution de l'équation de la conservation de l'énergie (ECE) que pour l'équation de transfert radiatif (ETR).

Pour le calcul des facteurs de forme, le traitement analytique de  $F_{ij}$  n'est possible que pour des géométries simples. Un certain nombre d'expressions de facteurs de forme sont disponibles dans la littérature (Hamilton, 1952; Kreith, 1959; Ambirajan et Venkateshan, 1993, Incropera et Dewitt, 2001). Ces expressions sont données pour des surfaces avec une forme et des configurations simples: notamment pour des rectangles parallèles (Feingold, 1966; Gross et al, 1981; Chung et Kermani, 1989), des rectangles perpendiculaires (Boeke et Wall, 1976; Chekhovskii et al, 1979; Ehlert et Smith, 1993), des disques ou des cylindres coaxiaux (Hottel et Sarofim, 1967). L'introduction des méthodes numériques a permis de surmonter les difficultés associées aux calculs de  $F_{ij}$ , pour des formes arbitraires des surfaces à l'étude, en fournissant des approximations numériques. Dans le cas d'un milieu transparent, séparant deux surfaces radiatives diffuses, le calcul numérique du facteur de forme se fait, généralement, soit à l'aide de la technique statistique de Monte-Carlo (Siegel et Howel, 1992) ou à l'aide d'intégration numérique (Krisnaprakas, 1998; Chung et Kim, 1982; Rammohan, 1996; Ehlert et Smith, 1993). En ce qui concerne l'intégration

numérique, les formulations intégrales utilisées peuvent être classées en deux catégories : i) formulation intégrale surfacique (Krisnaprakas, 1998; Chung et Kim, 1982) et ii) formulation intégrale de contour (Rammohan, 1996). Le calcul numérique de ces intégrales, pour chacune des formulations, peut s'effectuer, par exemple, par l'utilisation de la formule de quadrature de Gauss sur des éléments finis de surfaces ou de contours (Dhatt et Touzot, 1984). Contrairement à la méthode de Monte-Carlo, lorsque deux surfaces ont des régions communes, ou très voisines, le noyau qui apparaît dans l'expression mathématique de la valeur du facteur de forme diverge dans ces régions. L'utilisation des formules d'intégrations numériques pour le calcul de  $F_{ij}$  conduit à des résultats trop peu précis, même si l'on utilise un très grand nombre de points de Gauss (Krisnaprakas, 1998). Toutefois, la méthode de Monte Carlo permet de contourner ce problème au détriment d'un temps de calcul élevé.

Concernant la simulation des procédés de mise en forme des thermoplastiques (thermoformage, injection, étirage, soufflage), basée sur la résolution des équations de la conservation de l'énergie (ECE) et de transfert radiatif (ETR), la prédiction numérique de l'évolution de la température, au sein d'une préforme thermoplastique semi-transparente et généralement mince, n'est pas suffisamment élucidée dans la littérature. Elle se traite le plus souvent à l'aide de la méthode des éléments finis 1D (Shelby, 1991; Thrasher, 1996; Erchiqui et al, 2006) ou 2D (Hartwig, 1996), ou par la méthode des différences finies 1D (Esser et al, 1987; Shelby, 1991; Throne, 1996; Venkateswaran et al, 1997; Duarte et Covas, 2002), ou 2D (Lebaudy, 1989). Pour ces matériaux, l'hypothèse des transferts radiatifs internes unidirectionnels, suivant l'épaisseur de chaque région de la feuille

thermoplastique, est largement adoptée par les auteurs (Esser et al, 1987; Shelby, 1991; Throne, 1996; Venkateswaran et al, 1997; Duarte et Covas, 2002). À cela s'ajoute l'hypothèse des milieux froids (Le Maoult et al, 1997) pour les procédés de soufflage de préformes. Dans le cas du PET, les auteurs justifient cette hypothèse par le fait que la température d'utilisation du matériau PET, qui n'excède guère les 130°C, est inférieure aux températures des sources de rayonnement, utilisées pour le chauffage qui dépassent souvent 1400°C (Monteix et al, 2001). Cette hypothèse permet alors, dans le cas unidirectionnel, d'exprimer la transmission de la densité de flux à travers la profondeur de la membrane thermoplastique par la loi de Beer-Lambert en fonction d'une seule variable spatiale (Venkateswaran et al, 1997). Pour la modélisation de l'équation d'énergie tridimensionnelle, les travaux consacrés aux matériaux de type PET sont très restreints. Parmi ces travaux on cite l'utilisation de la méthode des volumes finis 3D (Pantakar, 1980) pour résoudre l'ECE durant l'étape de chauffage de préforme thermoplastique semi-transparente (Monteix et al, 2001). Au niveau expérimental, les travaux sont encore à un stade embryonnaire. À titre d'exemple on peut citer les travaux de (Taylor et Kazmer, 1992; Myers, 1993; Lappin et Martin, 1996; Welch, 1993; Monteix et al, 2001; Bunyong 2003).

### **3- Problématique**

Il ressort de cette synthèse bibliographique que l'étape du chauffage de feuilles ou préformes minces thermoplastiques semi-transparentes, de type PET amorphe en

particulier, a une incidence capitale sur la qualité de la pièce fabriquée (Esser et al, 1987; Shelby, 1991; Venkateswaran et al, 1997). Aussi, le développement de modèles d'analyse des échanges radiatifs dans les milieux semi-transparentes (El Wakil et Sacadura, 1992) montre clairement le caractère spectral des propriétés radiatives telles l'absorption, l'émission et la réflexion dans ces matériaux.

Cependant, dans la modélisation du transfert radiatif au sein des matériaux semi-transparentes minces, la plupart des auteurs consacrent leurs études à des modèles à une dimension (1D), sans pour autant spécifier suffisamment les limites d'utilisation des modèles 1D vis-à-vis des modèles 3D.

#### **4- Objectif de l'étude**

Dans cette étude, on vise à développer deux approches numériques par éléments finis 1D et 3D pour la compréhension et la simulation de la phase de chauffage infrarouge de membranes thermoplastiques semi-transparentes de type PET amorphe.

#### **5- Méthodologie**

Pour atteindre l'objectif visé, la méthode des éléments finis 3D a été appliquée pour modéliser et analyser l'étape de chauffage transitoire des feuilles thermoplastiques en PET semi-transparentes et amorphes.

Une discrétisation basée sur une formulation intégrale faible de l'équation de conservation de l'énergie avec terme source radiatif a été appliquée. La solution est approchée par une méthode d'interpolation isoparamétrique de Galerkin sur des éléments hexaédriques linéaires. Pour la stabilité de la méthode, un schéma implicite de Crank-Nicolson est utilisé (inconditionnellement stable) (Reddy, 1993).

En ce qui concerne le calcul de facteur de forme, on a retenu la méthode de contour entre chaque paire de région émetteur-récepteur (Ramonhan, 1996).

Le choix du matériau PET dans cette étude est justifié par son utilisation croissante dans les procédés de mise en forme des thermoplastiques. Dans ce travail, les propriétés thermophysiques du PET sont supposées indépendantes de la température. L'absorptivité, propriété radiative du PET, est prise comme valeur moyenne sur la totalité du spectre d'absorption. Pour la modélisation du transfert radiatif, on a considéré l'hypothèse d'un transfert radiatif unidirectionnel à l'intérieur du matériau selon la loi de Beer-Lambert.

Ce mémoire est subdivisé en trois parties. Dans le premier chapitre, l'aspect théorique du transfert de chaleur par rayonnement dans un milieu absorbant est abordé, ainsi que les équations qui le régissent. Ensuite, une étude comparative de différentes méthodes de calcul des facteurs de forme entre l'émetteur infrarouge et le récepteur thermoplastique est effectuée. Cette étude permet, en supposant que le milieu qui sépare l'émetteur du récepteur est transparent, de déterminer la densité de flux thermique à la surface du récepteur thermoplastique semi-transparent.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution tridimensionnelle de l'équation de la conservation de l'énergie à l'aide de la méthode des éléments finis. La formulation

intégrale et la discrétisation spatiale et temporelle seront abordées. Ensuite, la validation analytique et numérique des modèles 3D et 1D transitoires et stationnaires suivra.

Dans le troisième chapitre, on applique la méthode des éléments finis 3D pour la modélisation transitoire du chauffage infrarouge d'une feuille mince de matériau thermoplastique semi-transparent de type PET. L'hypothèse de la diffusion unidirectionnelle à l'intérieur du matériau semi-transparent, avec utilisation de la loi de Beer-Lambert, est considérée. Deux validations sont considérées : analytique et expérimentale. Comme application, une étude du transfert transitoire du chauffage infrarouge dans une feuille mince de type PET est proposée.

Pour clore, une synthèse des travaux de ce mémoire est présentée ainsi que les perspectives et les extensions possibles.

## CHAPITRE 1

### DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE ET MISE EN ÉQUATIONS

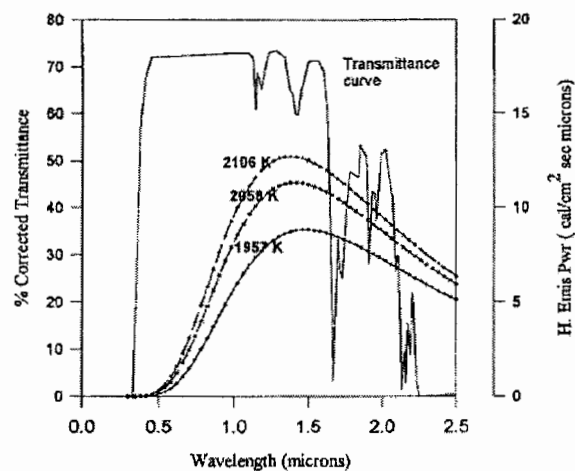
Dans ce chapitre, il est décrit quelques caractéristiques des émetteurs infrarouges utilisés pour le chauffage des matériaux thermoplastiques semi-transparents. Par la suite, l'accent est mis sur les équations qui gouvernent le transfert de chaleur dans les milieux absorbants. Une étude comparative de différentes méthodes de calcul des facteurs de forme entre l'émetteur infrarouge et le récepteur thermoplastique est ensuite abordée.

#### 1.1. Transfert de chaleur par rayonnement dans les milieux absorbants

Dans une première étape, une caractérisation du système de chauffage s'impose. En effet, la répartition spectrale de l'énergie des lampes est identifiée selon le type d'émetteur considéré. Trois types d'émetteurs électriques sont fréquemment utilisés : les émetteurs en céramique, en quartz et en halogène qui correspondent chacun à un domaine différent de l'infrarouge: long (3 à 10  $\mu\text{m}$ ), moyen (1,4 à 3  $\mu\text{m}$ ) et court (0,78 à 1,4  $\mu\text{m}$ ) respectivement (Andrieu et al, 2004). Dans le cas des préformes en PET, il est nécessaire d'atteindre rapidement sur toute l'épaisseur une température avoisinant 90°C (Yann 2003). Toutefois, soulignons que le spectre de transmittivité du PET, en général, pour l'infrarouge court



(0,78 à 1,4  $\mu\text{m}$ ) représentent environ 70% du rayonnement émis par des émetteurs infrarouges en halogène pour lesquels les températures de rayonnement se situent entre 1800 et 2200  $^{\circ}\text{C}$  (Venkateswaran et al, 1997) (Fig. 2). Par contre, dans le cas de l'infrarouge moyen (1,4 à 3  $\mu\text{m}$ ), ce spectre de transmittivité représente environ 40% du rayonnement émis par des émetteurs infrarouges en quartz.



**Figure 2 :** Spectre de transmittivité du PET (Venkateswaran et al, 1997).

Afin d'augmenter l'efficacité des émetteurs, des réflecteurs sont généralement rajoutés (Shelby, 1991, Lindenlaub, 1982). Par effet joule et en régime permanent, les émetteurs peuvent atteindre les températures de l'ordre de 1400 à 2000  $^{\circ}\text{C}$  (Monteix et al, 2001).

Dans ce travail, on considère un émetteur rectangulaire de type quartz dont la température  $T_S$  et l'émissivité  $\varepsilon_S$  sont supposées connues. Aussi, le milieu qui sépare le matériau thermoplastique et l'émetteur infrarouge est considéré transparent (Venkateswaran et al, 1997). En revanche, le matériau thermoplastique, qui est une feuille rectangulaire mince disposée parallèlement à l'émetteur à une distance  $d$ , est considéré comme un milieu

partiellement absorbant (Fig. 3). Les coefficients de transmission  $\tau$  et d'absorption  $A$  de la feuille thermoplastique sont généralement déterminés en fonction de son épaisseur  $E_p$  d'après la formule suivante (Hartwig 1996) :

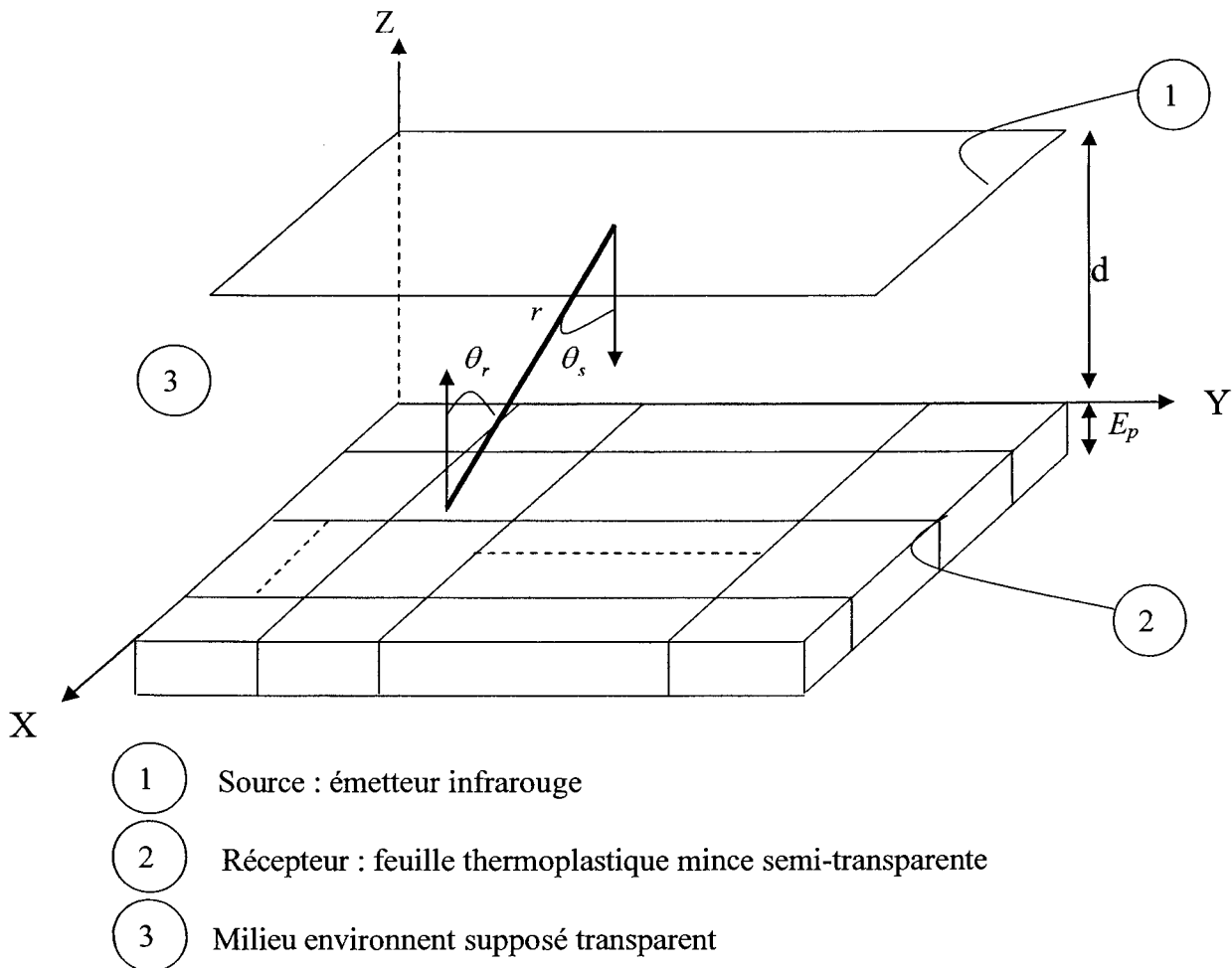
$$A = -\frac{\ln \tau}{E_p} \quad (1)$$

Ainsi, deux aspects importants du processus du chauffage des matériaux thermoplastiques semi-transparents sont à souligner :

- L'émissivité de la source  $\varepsilon_s$ ;
- L'absorptivité  $A$  caractéristique du matériau thermoplastique.

Toutefois, il est à noter que les coefficients d'émissivité  $\varepsilon_s$ , d'absorption  $A$  et de transmission  $\tau$  sont généralement de nature spectrale. Cependant, dans ce travail, on considère des valeurs moyennes de ces coefficients prises sur la totalité du spectre. Aussi, on suppose que les propriétés thermophysiques du matériau thermoplastique semi-transparent sont indépendantes de la température (Esser et al, 1987). Si on désigne par  $\rho$  la densité,  $k$  la conductivité thermique et  $C$  la chaleur spécifique, on peut alors introduire la diffusivité thermique  $\alpha$  du matériau par:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} \quad (2)$$



**Figure 3** : Schématisation de l'étape de chauffage d'une plaque thermoplastique semi-transparente par un émetteur infrarouge.

### 1.1.1. Mise en équation du phénomène de transfert par rayonnement infrarouge

Dans les milieux semi-transparents, les transferts de chaleur sont la conséquence, en général, de deux mécanismes : la conduction et le rayonnement, et ce lorsque la convection est négligée ou mise sous forme de conditions aux frontières. Dans ce cas, le calcul des champs de température ne peut se faire que par un couplage de ces deux modes de transfert et la réponse transitoire en température est alors donnée par la résolution de l'équation de la chaleur suivante (**Annexe 1**) :

$$-\left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + S_r(r) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

Avec  $q_x$ ,  $q_y$  et  $q_z$  les densités de flux thermique instantané qui, selon la loi de Fourier, sont proportionnelles au gradient de température et s'expriment par :

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad ; \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad ; \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4)$$

$S_r(r)$  est un terme source associé à l'énergie volumique interne du matériau thermoplastique. Il s'exprime par l'expression suivante :

$$S_r(r) = -\nabla \cdot q_r(r) \quad (5)$$

avec  $q_r$  le flux radiatif absorbé dans le matériau thermoplastique semi-transparent. Et  $r$  est la variable de position donnée par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6)$$

En considérant un milieu thermoplastique semi-transparent homogène (la conductivité

thermique  $k$  est une constante), l'équation de diffusion de la chaleur (3) s'écrit :

$$k \nabla^2 T - \nabla \cdot q_r(r) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

On suppose que le flux de chaleur radiatif à l'intérieur du PET peut s'écrire (Monteix et al, 2001):

$$q_r(r) = \pi \frac{A_s}{A_r} \cdot F_{s-r} \cdot I(r) \quad (8)$$

$F_{s-r}$  est le facteur de forme entre la surface source  $A_s$  (émetteur infrarouge) et la surface réceptrice  $A_r$  (matériau thermoplastique) (**Annexe 2**). Ce facteur est l'objet d'étude du prochain paragraphe.

L'intensité radiative est déterminée en résolvant l'équation de transfert radiative à travers le matériau thermoplastique qui s'écrit (Modest, 2003) (**Annexe 8**) :

$$\frac{1}{\beta} \nabla \cdot I + I = (1 - \omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{r}_i) \Phi(\hat{r}_i, \hat{r}) d\Omega_i \quad (9)$$

avec  $\beta$  : Le coefficient d'extinction;  $\omega$  : Le coefficient Albédo de dispersion simple;  $\Phi(\hat{r}_i, \hat{r})$  : La fonction phase de dispersion et  $I_b$  : L'intensité radiative totale émise par le PET.

Dans le cas d'un PET amorphe, plusieurs travaux confirment, en général, que ce matériau peut être considéré comme milieu non dispersant (pas de sources diffusantes :  $\omega = 0$ ). (Esser et al, 1987; Shelby, 1991; Venkateswaran et al, 1997). En plus, sa bande spectrale d'émission (dans la plage des températures rencontrées en

thermoformage ou en soufflage) n'excède pas, en général, la température de 125 °C, ce qui est largement inférieur aux températures des sources de rayonnement utilisées pour l'étape de chauffage. Dans ces conditions, on peut utiliser l'hypothèse des milieux froids (Le Maout et al, 1997) ce qui permet de négliger l'intensité radiative totale émise par le PET ( $I_b = 0$ ). Le coefficient d'extinction  $\beta$  devient dans ce cas le coefficient d'absorption  $A$  et l'équation de l'ETR (9) s'écrit :

$$\frac{1}{A} \nabla \cdot I + I = 0 \quad (10)$$

$A$  représente le coefficient moyen d'absorption pour un intervalle de longueur d'onde  $\Delta\lambda$  spécifique au matériau thermoplastique considéré.

Dans ce travail nous considérons que des préformes (ou membranes) en PET mince. Ainsi, en se basant sur la caractéristique de la transmittivité spectrale du PET et en supposant que l'absorption du rayonnement est effectuée dans la direction normale (selon l'axe  $z$ ), la solution de l'équation (10) représente à la loi de Beer-Lambert (Esser et al, 1987) qui s'écrit selon l'expression:

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-A \cdot z} \quad (11)$$

$I_0$  représente l'intensité radiative moyenne de la source dont la température est supposée uniforme. Elle s'exprime par:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_s \cdot \sigma \cdot T_s^4}{\pi} \quad (12)$$

avec

$\varepsilon_s$  : l'émissivité moyenne de la source

$\sigma$  : la constante de Stéphan-Boltzmann ( $5,67 \cdot 10^{-8} W / m^2 K^4$ )

$T_s$  : la température absolue uniforme de l'émetteur en K.

L'équation (8) s'écrit alors :

$$q_r(z) = \pi \frac{A_s}{A_r} \cdot F_{s-r} \cdot I_0 \cdot e^{-A \cdot z} \quad (13)$$

Dans ce travail, on suppose que chaque région de la surface du matériau PET reçoit un flux uniforme (Shelby, 1991). Ainsi :

$$q_0'' = \pi \frac{A_s}{A_r} \cdot F_{s-r} \cdot I_0 \quad (14)$$

où  $q_0''$  représente la densité de flux émise par la surface  $A_s$  de la source émettrice et reçue par la surface  $A_r$  du récepteur, l'équation (13) devient alors :

$$q_r(z) = q_0'' \cdot e^{-A \cdot z} \quad (15)$$

Sous cette hypothèse, la divergence du flux radiatif s'écrit sous la forme:

$$\nabla \cdot q_r(z) = -A q_0'' \cdot e^{-A \cdot z} \quad (16)$$

En substituant la divergence du flux équation (16) dans l'équation (7), la relation devient :

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + A q_0'' \cdot e^{-A \cdot z} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (17)$$

En divisant par la conductivité thermique  $k$ , l'équation (17) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Aq_0'' \cdot e^{-Az}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

C'est l'équation tridimensionnelle qui est retenue dans ce travail. Elle gouverne le transfert de chaleur radiatif à l'intérieur d'une membrane ou préforme thermoplastique semi-transparent et mince du type PET.

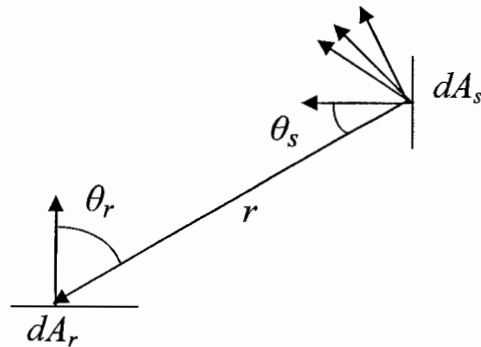
## 1.2. Calcul des facteurs de forme entre deux surfaces

Le calcul du flux reçu par le matériau à sa surface, donnée par l'équation (8), nécessite le calcul du facteur de forme  $F_{s-r}$  entre les deux facettes  $A_s$  et  $A_r$ . Ce dernier représente le pourcentage d'énergie quittant  $A_s$  et atteignant  $A_r$  et s'exprime sous la forme (**Annexe 2**) :

$$F_{s-r} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \int_{A_r} \frac{\cos \theta_s \cos \theta_r}{\pi r^2} dA_s dA_r \quad (19)$$

Les angles  $\theta_s$  et  $\theta_r$  sont formés respectivement par le vecteur  $\vec{r}$  porté par la direction de la radiation incidente quittant l'émetteur et arrivant à la surface du récepteur thermoplastique et les deux vecteurs normaux aux surfaces  $A_s$  et  $A_r$  respectivement (Fig. 4). Le facteur de forme est en fait une quantité purement géométrique. Il dépend uniquement de la forme et de la position relative des surfaces  $A_s$  et  $A_r$ .





**Figure 4 :** Représentation des facteurs de forme

Dans le cas de surfaces de forme simple, il est possible d'exprimer cette intégrale double, équation (19), de manière analytique (Hamilton, 1952; Incropera et Dewitt, 2001). Siegel et Howel ont fourni un catalogue d'expressions analytiques de facteurs de forme pour des géométries simples (Siegel et Howel 1992). Cependant, pour des problèmes plus complexes, il devient impossible de les calculer de manière analytique. Toutefois, de nombreuses méthodes d'approximation du facteur de forme ont été développées ces dernières décennies. Dans cette partie, une description sommaire de quelques méthodes de calcul de facteur de forme issues de la littérature, est présentée. Après analyse de leurs convergences et de leur temps de calcul, l'objectif est de choisir celle qui correspond le mieux à notre problème.

### 1.2.1. Méthodes d'intégration directe

Ce sont des méthodes qui permettent de calculer la double intégrale de l'équation (19) soit à l'aide d'une méthode intégrale de contour surfacique (méthode de contour) (Ramonhan, 1996), soit à l'aide d'une intégrale de surface. Par la suite, ces intégrations peuvent être approchées à l'aide d'intégrations numériques (Reddy, 1993).

### 1.2.2. La méthode d'intégration de surface

Cette méthode consiste en un découpage fin de la surface mère en petites surfaces dites éléments finis. Chung et Kim ont proposé une méthode en adoptant le formalisme des éléments finis (Chung et Kim, 1982). Il décrit les coordonnées des côtés des surfaces dans un repère local ensuite, il calcule les facteurs de forme par l'utilisation de la méthode de quadrature de Gauss. Le facteur de forme entre deux surfaces 1 et 2 est donnée alors par :

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \sum_i \sum_j W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (20)$$

Avec

$\xi_i, \eta_j$  : les points d'intégration de Gauss;  $W_i, W_j$  : les poids d'intégration de Gauss et  $f(\xi_i, \eta_j)$  la fonction à intégrer.

Krishnaprakas souligne les potentialités de cette méthode avec laquelle on peut calculer les facteurs de forme sur des géométries complexes à partir d'un découpage par des triangles élémentaires (Krishnaprakas, 1998).

La formulation du facteur de forme est donnée par l'expression suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N A_{ik} F_{ikjl} \quad (21)$$

Avec

$F_{ikjl}$ : le facteur de forme élémentaire entre le triangle  $k$  sur la surface  $i$  et  $l$  sur la surface  $j$ , obtenu à partir de l'équation (20).  $M$  et  $N$  représentent respectivement le nombre de triangles sur  $i$  et  $j$ .

### 1.2.3. La méthode de contour

La méthode d'intégration de contour fait appel à la transformation par le biais du théorème de Stokes de l'équation (19) en une intégrale sur les contours (22) de surfaces (Sparrow, 1963):

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \ln r \, d\vec{r}_1 \, d\vec{r}_2 \quad (22)$$

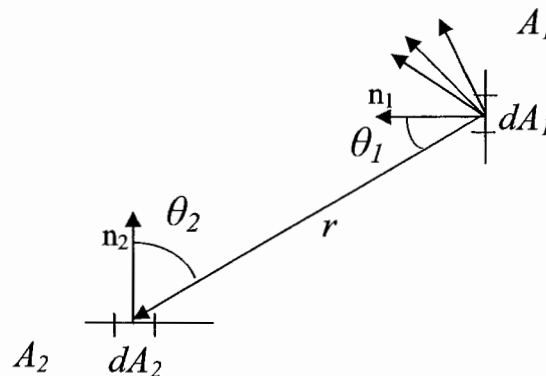
Ramonhan a comparé plusieurs méthodes d'intégrations numériques de la double intégrale (22) par la méthode de trapèze, Simpson et Gauss (Ramonhan, 1996). La méthode de Gauss se révèle comme la plus rapide et la plus précise. La mise en œuvre selon la méthode décrite par (Ramonhan, 1996) est présentée en **annexe 3**. La méthode du contour couplée avec une méthode d'intégration de Gauss, aboutit à l'expression (23)

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (a_{x1,i} \cdot a_{x2,i} + a_{y1,i} \cdot a_{y2,i} + a_{z1,i} \cdot a_{z2,i}) \left\{ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q W^k W^l \ln(d(\xi, \eta)) \right\} \right\} \quad (23)$$

Les coefficients  $a_{1,i}$  et  $a_{2,j}$  représentent les transformations spatiales des coordonnées globales des points des contours des surfaces ( $A_i$ ,  $A_j$ ) vers les coordonnées locales de Gauss, et les coefficients  $W^k$  et  $W^l$  représentent les poids de Gauss compris entre  $p$  et  $q$  qui représentent respectivement le nombre de points de Gauss utilisés pour chacune des surfaces  $A_i$  et  $A_j$ . Shapiro a comparé les deux méthodes d'intégrations directes décrites ci-dessus, celle dite de l'intégrale de surface avec celle de l'intégrale de contour (Shapiro, 1985). Il fait apparaître que pour des plaques parallèles centrées, la méthode de contour converge beaucoup plus rapidement que la méthode de l'intégrale de surface.

#### 1.2.4. Méthode d'aire-intégration

Cette méthode consiste à réécrire l'équation (19) sous la forme d'une double sommation sur des opérations vectorielles des cosinus directeurs.



**Figure 5 :** Géométrie et nomenclature de la méthode d'aire-intégration pour le calcul de facteur de forme

Comme  $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = r \cos \theta_1$ , donc  $\cos \theta_1 = \vec{r} \cdot \vec{n}_1 / r$  et  $\cos \theta_2 = -\vec{r} \cdot \vec{n}_2 / r$ . Le signe moins vient du fait du sens de  $r$  ( $\equiv \vec{r}_{1 \rightarrow 2}$ ) qui va de la surface  $A_1$  vers la surface  $A_2$  (Fig. 5). Il

s'agit donc de remplacer l'expression  $\frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{r^2}$  par  $\frac{-(\vec{r} \cdot \vec{n}_1)(\vec{r} \cdot \vec{n}_2)}{(\vec{r} \cdot \vec{r})^2}$ .

Dans ces conditions, l'équation (19) peut être intégrée numériquement en subdivisant les surfaces  $A_1$  et  $A_2$  par des petites surfaces.

$$F_{1 \rightarrow 2} \approx \frac{-1}{\pi A_i} \sum_i \sum_j \frac{(\vec{r} \cdot \vec{n}_1)(\vec{r} \cdot \vec{n}_2)}{(\vec{r} \cdot \vec{r})^2} \Delta A_i \Delta A_j \quad (24)$$

La convergence de la méthode dépendra du raffinement du maillage, mais pour un temps de calcul assez élevé.

Les différentes méthodes de détermination présentées dans ce paragraphe sont des méthodes déterministes. Il existe aussi un certain nombre de méthodes probabilistes telle la méthode de Monté Carlo utilisée pour approximer les facteurs de forme.

### 1.2.5. Méthode statistique de Monté Carlo

La méthode de Monté Carlo est une technique probabiliste basée sur la simulation d'une série de nombres aléatoires  $R_\xi$  compris entre 0 et 1 et qui constituent les distributions de probabilités des variables d'un problème complexe (Siegel et Howel, 1992).

$$R_{\xi} = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi^*) d\xi^*}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi} \quad (25)$$

Avec  $\xi$  une variable du problème et  $f(\xi)$  une fonction relative à  $\xi$ .

L'évaluation des facteurs de forme entre deux surfaces par la méthode de Monté Carlo consiste à simuler numériquement l'émission d'un nombre élevé de  $N$  radiations à partir de la surface  $A_i$  et de compter le nombre  $n$  de rayons atteignant la surface  $A_j$ . Le facteur de forme est alors obtenu en faisant le rapport du nombre de rayons qui atteint la surface  $A_j$  sur le nombre total de rayons générés à partir de  $A_i$  (Toor et Viskanta, 1968; Vujicic et al, 2005).

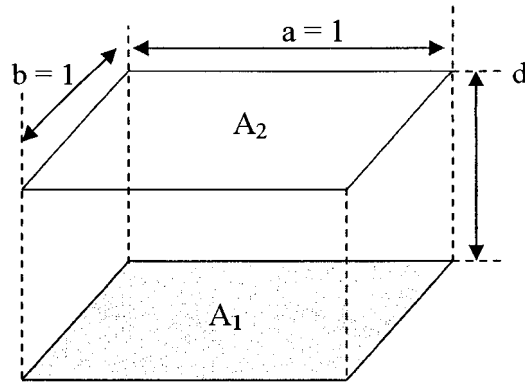
$$F_{ij} = \frac{n}{N} \quad (26)$$

Le principal inconvénient de cette méthode réside sur le fait que les temps de calculs sont proportionnels au nombre de faisceaux émis. C'est une méthode qui est préférablement utilisée dans la description des échanges en présence de surfaces dont les réflexions spéculaires ne sont pas négligeables ou bien pour des surfaces dont l'émission est anisotrope, pour lesquelles les autres méthodes ne peuvent être appliquées.

### 1.2.6. Approche retenue pour le calcul des facteurs de forme

Dans ce mémoire, la méthode de contour pour le calcul des facteurs de forme entre chaque paire de région source-récepteur a été retenue. Pour valider ce choix, deux carrés unitaires séparés par une distance  $d$  ( $d=0.1, 0.5, 1$ ) ont été utilisés pour le calcul des

facteurs de forme (Fig. 6). La comparaison a été effectuée avec la solution analytique correspondante (Tableau 1).



**Figure 6:** Schématisation pour la validation du calcul de facteur de forme entre deux surfaces carrées unitaires parallèles.

Dans le cas de deux surfaces carrées unitaires parallèles, la solution analytique est donnée par (Hottel, 1931):

$$F_{12} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[ \frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right]^{1/2} + Y\sqrt{1+X^2} \tan^{-1} \left( \frac{Y}{(1+X^2)} \right) \right. \\ \left. + X\sqrt{1+Y^2} \tan^{-1} \left( \frac{X}{(1+Y^2)} \right) - Y \tan^{-1} Y - X \tan^{-1} X \right\} \quad (27)$$

Avec  $X=a/d$  et  $Y=b/d$

Pour la validation les erreurs relatives sont estimées à partir de l'équation suivante:

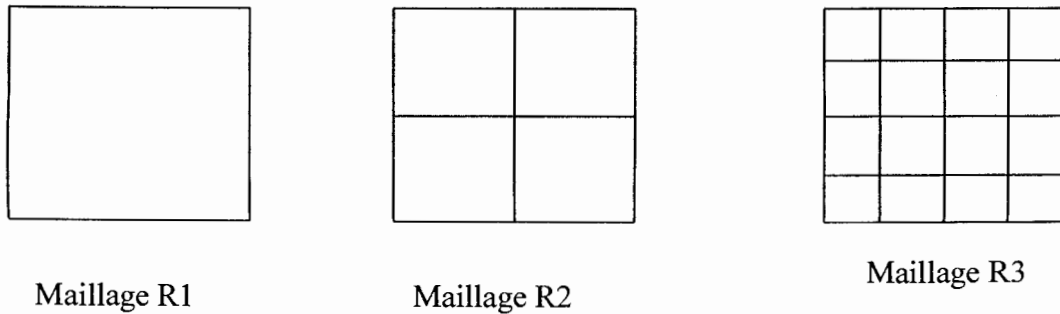
$$\frac{F_{12(\text{modèle})} - F_{12(\text{analytique})}}{F_{12(\text{analytique})}} \cdot 100 = \text{erreur}[\%] \quad (28)$$

**Tableau 1 :** Comparaison de la méthode de contour avec les méthodes d'aire-intégration et de Gauss quadratique.

Aire-intégration	d=0.1	Erreur %	d=0.5	Erreur %	d=1	Erreur %
Maillage R <sub>1</sub>	31.83099	3748.46	1.273239	206.62	0.079577	16.02
Maillage R <sub>2</sub>	7.98435	865.33	0.512833	23.50	0.070859	3.31
Maillage R <sub>3</sub>	1.965295	137.61	0.433108	4.30	0.069279	1.00
<b>Gauss quadratique</b>						
3	0.366817	55.65	0.4183521	0.75	0.068411	0.26
7	7.972987	863.96	0.458916	10.51	0.068413	0.26
12	5.424245	555.81	0.432428	4.14	0.068596	0.01
<b>Contour</b>						
3	0.875952	5.91	0.415378	0.03	0.06859	0.00
4	0.850151	2.79	0.415283	0.01	0.06859	0.00
5	0.83891	1.43	0.1415255	0.00	0.06859	0.00
<b>Valeur exacte</b>	0.82711		0.415253		0.06859	

On remarque, d'après le tableau1, que plus le maillage est raffiné plus l'erreur relative diminue, ce qui correspond à une convergence vers la solution analytique. D'autre part on a constaté que plus le maillage est fin, c'est-à-dire plus on augmente la subdivision des surfaces d'échange, plus le temps de calcul devient élevé. Pour la méthode d'aire-intégration, trois types de maillage des carrés unitaires sont considérés R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub> (Fig. 7).





**Figure 7 :** Maillage des carrés unitaires pour la méthode d'aire-intégration

En revanche, pour la méthode d'intégration directe de Gauss quadratique, le choix du point Gauss est important pour la convergence de la solution numérique. Dans le tableau 1 ci-dessus, pour 3 points d'intégration on assure une meilleure convergence. Aussi, lorsque  $d$  est petit le noyau des intégrales est proche des valeurs singulières ce qui cause la divergence même si le nombre de points de Gauss utilisés est élevé. Quand  $d$  augmente la méthode de Gauss donne de bons résultats. Toutefois, la méthode de contour d'intégration présente une meilleure convergence. En effet, pour cette méthode, on constate que plus le nombre de points de Gauss est grand, plus le résultat du calcul de facteur de forme converge vers la solution analytique avec une erreur relative qui tend vers zéro.

Pour le calcul des facteurs de forme entre chaque paire de région de la source émettrice infrarouge et le récepteur thermoplastique semi-transparent, la méthode de contour d'intégration est retenue. Ce choix est surtout motivé par le comportement de cette méthode qui présente des temps de calcul faibles pour atteindre une erreur relativement faible, mais surtout, elle s'adapte très bien à des maillages par éléments finis.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR À TROIS DIMENSIONS PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.

La méthode des éléments finis est devenue un outil puissant pour la simulation numérique d'un grand nombre de problèmes d'ingénierie. Ses applications vont de l'analyse des déformations et des contraintes dans les structures mécaniques telles que les ponts, les immeubles, les avions; aux problèmes de conduction thermique, d'écoulement des fluides, de flux gazeux ou magnétiques etc. Son principe consiste à discrétiser une région continue complexe en éléments géométriques simples, appelés *éléments finis*. Les propriétés physiques sont interpolées sur chaque élément en fonction de leurs valeurs en certains points donnés. Puis, un processus d'assemblage prenant en compte les interactions entre éléments voisins mène à la construction d'un ensemble d'équations. La résolution de ce système d'équations, en tenant compte des conditions imposées aux limites du système, permet d'obtenir une approximation de la solution sur du domaine. Pour plus de détails sur les éléments finis voir les références : Dhatt et Touzot, 1984, Reddy, 1993, Zienkiewicz et Taylor, 2000.

Dans ce chapitre, on fait appel à la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation tridimensionnelle de la conservation de l'énergie. La formulation intégrale et les

discrétisations spatiale et temporelle qui en résultent seront exposées. Ensuite, suivra la validation analytique et numérique des modèles 3D et 1D transitoires.

## 2.1. Discrétisation par la méthode des éléments finis 3D

### 2.1.1. Formulation intégrale

Résoudre analytiquement l'équation de la conservation de l'énergie consiste à chercher une solution une fois différentiable par rapport aux coordonnées spatiales. Pour la plupart des problèmes physiques, y compris celui du transfert radiatif et sous certaines conditions, une telle tâche s'avère difficile voir même impossible. On montre souvent l'existence et l'unicité d'une solution mais on ne connaît pas son expression. La méthode des éléments finis propose d'approcher la solution exacte, à priori inconnue, par une solution dont la singularité est moins forte que celle de la solution exacte (Zienkiewicz et Taylor, 2000). Pour ce faire, on multiplie l'ECE, dite forme forte, par une fonction test  $W$ , appartenant à un certain espace fonctionnel  $V$  (Reddy, 1993), puis on intègre sur tout le domaine physique. On obtient ainsi la formulation intégrale de l'ECE :

$$\int_{\Omega} w \left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - S_r(x, y, z) + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0 \quad \forall w \in V \quad (29)$$

En effectuant une intégration par parties, on réduit la forte régularité de la fonction température au niveau des dérivées secondes qui apparaissent implicitement dans l'équation (29), en faisant apparaître une forme faible de l'équation de la chaleur. Dans ce cas (29) devient :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} w dV - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right) \{q\} dV = \int_{\Omega} S_r(x, y, z) w dV - \int_S \{q\}^T \{n\} \cdot w ds \quad (30)$$

$$\text{avec} \quad \{q\} = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

$$\{n\} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

$\{n\}$  étant le vecteur normal sortant à la surface du matériau.

### 2.1.2. Les conditions aux limites

On considère, comme conditions aux frontières, la présence d'une convection sur les parties supérieure,  $S_{\text{sup}}$ , et inférieure,  $S_{\text{inf}}$ , de la membrane thermoplastique (Fig. 3). Ces conditions aux limites se traduisent par l'équation:

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = h(T_s - T_{\infty}) \quad (33)$$

avec

$h$  : le coefficient de convection supposé identique pour les deux surfaces concernées

$T_s$  : les températures surfaciques

Dans ce travail, on suppose que les parois latérales de la feuille thermoplastique mince semi-transparente sont adiabatiques (épaisseur très négligeable par rapport aux autres dimensions). En introduisant les conditions aux limites convectives, l'équation (32) devient :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} w dV - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right) \{q\} dV = \int_{\Omega} S_r(x, y, z) w dV - \int_{S_{\text{sup}}} h(T - T_{\infty}) \cdot w ds - \int_{S_{\text{inf}}} h(T - T_{\infty}) \cdot w ds \quad (34)$$

### 2.1.3. Les fonctions d'interpolation

Dans ce travail, nous considérons des éléments hexaédriques linéaires. Ainsi, en utilisant des interpolations sur le champ de température, on a pour chaque élément l'expression suivante :

$$T(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_{j=1}^m T_j^e(t) N_j^e(\xi, \eta, \zeta) \quad (35)$$

avec

$m$  : le nombre de nœuds de l'élément hexaédrique linéaire qui a été retenu ( $m=8$ );

$T_i(t)$  : les valeurs nodales de la température à un instant  $t$ ;

$N_i(\xi, \eta, \zeta)$  : les fonctions d'interpolation isoparamétriques (données en détail dans l'**annexe 4**);

$\xi, \eta, \zeta$  : les coordonnées nodales de l'élément de référence hexaédrique linéaire.

Sous forme matricielle, l'équation (35) s'écrit :

$$T = [N]\{T\} \quad (36)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\{T\} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_8 \end{bmatrix}^T \quad (38)$$

où

$\{T\}$  : le vecteur des températures nodales.

$[N]$  : la matrice des fonctions d'interpolation

La dérivée associée à (38) devient sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial x & \partial N_2 / \partial x & \dots \\ \partial N_1 / \partial y & \partial N_2 / \partial y & \dots \\ \partial N_1 / \partial z & \partial N_2 / \partial z & \dots \end{bmatrix} \{T\} = [B] \{T\} \quad (39)$$

où  $[B]$  est la matrice des gradients des fonctions d'interpolation. On en déduit alors, selon la loi de Fourier, équation (4), l'expression matricielle du flux de conduction:

$$\{q\} = -k [B] \{T\} \quad (40)$$

#### 2.1.4. La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin consiste à prendre pour fonctions tests les fonctions d'interpolations  $N_i$  (Reddy, 1993):

$$w = N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad i = 1, \dots, m \quad (41)$$

En substituant dans l'équation (34), les équations (37), (40) et (41) on aura :

$$\begin{aligned} \sum_e \left( \int_{\Omega^e} \rho C_p \frac{\partial T_j}{\partial t} N_j N_i dV + \int_{\Omega^e} k [B]^T [B] \{T\} dV \right) = \sum_e \left( \int_{\Omega^e} S_r(x, y, z) N_i dV - \int_{S_{\text{sup}}^e} h (T_j N_j - T_\infty) \cdot N_i ds \right. \\ \left. - \int_{S_{\text{inf}}^e} h (T_j N_j - T_\infty) \cdot N_i ds \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Finalement, en écrivant la température sous forme vectorielle et les fonctions d'interpolation sous forme matricielle, on peut déduire à partir de l'équation (42) les équations qui gouvernent le transfert de chaleur dans le milieu physique:

$$\sum_e ([C]^e \left\{ \dot{T} \right\}^e + ([K_c]^e + [K_h]^e) \left\{ T \right\}^e) = \sum_e (\{Q_{source}\}^e + \{Q_h\}^e) \quad (43)$$

avec

$$[C]^e = \int_{\Omega^e} \rho c p [N]^T [N] dV$$

$$[K_c]^e = \int_{\Omega^e} k [B]^T [B] dV$$

$$[K_h]^e = \int_{S_{sup}^e \cup S_{inf}^e} h [N]^T [N] dS$$

$$\{Q_{source}\}^e = \int_{\Omega^e} S_r(x, y, z) [N]^T dV$$

$$\{Q_h\}^e = - \int_{S_{sup}^e \cup S_{inf}^e} h T_{\infty} [N]^T dS$$

Sous forme condensée, l'équation (43) peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_e ([C]^e \left\{ \dot{T} \right\}^e + [K]^e \left\{ T \right\}^e) = \sum_e \{Q\}^e \quad (44)$$

où

$[C]^e$  : la matrice de capacité élémentaire;

$[K]^e = [K_c]^e + [K_h]^e$  : la matrice de conductivité élémentaire;

$\{Q\}^e = \{Q_{source}\}^e + \{Q_h\}^e$  : le vecteur flux généralisé élémentaire;

$\dot{T}$  est la dérivée de la température par rapport au temps.

$h = h_x = h_y = h_z$  : le coefficient de convection considéré homogène

### 2.1.5. Évaluation des intégrales : la méthode de Gauss

Pour résoudre l'équation (44) on est amené à évaluer les différentes intégrales figurant dans (43). Comme il est souvent très difficile d'évaluer les expressions exactes de ces intégrales, les méthodes d'intégration numériques sont utilisées, en particulier la méthode des quadratures de Gauss (Zienkiewicz et Taylor, 2000). Elle consiste à approcher les intégrales de types :

$$\text{En 2D : } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} w_i \cdot w_j \cdot g(\xi_i, \eta_j) \quad (45)$$

$$\text{En 3D : } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} \sum_{k=1}^{m_G} w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot g(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (46)$$

avec

$m_G$  : le nombre de points de Gauss utilisés pour l'intégration;

$\xi_i, \eta_j$  et  $\zeta_k$  : les points d'intégration de Gauss;

$w_i, w_j, w_k$  : les poids d'intégration de Gauss.

#### Remarques :

- a) La méthode de Gauss permet d'intégrer exactement un polynôme de degré  $2m_G - 1$  avec  $m_G$  points.
- b) Afin de faciliter la résolution globale de toutes les intégrales de volume et de surface de l'équation discrétisée (44), des transformations sont effectuées sur chaque élément réel (**Annexe 5**).



### 2.1.6. Assemblage

La discrétisation de l'équation de la chaleur par éléments finis nous a conduit à interpoler sur chaque élément la variable température par ses valeurs prises aux nœuds de l'élément. Ainsi, pour chaque élément considéré, on obtient un système élémentaire. La contribution de tous ces systèmes élémentaires à travers la sommation sur les éléments dans l'équation (44), permet de construire un système global. Cette étape est appelée assemblage (Reddy, 1993). Ainsi, l'équation (44) se réécrit après assemblage sous la forme :

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{Q\} \quad (47)$$

où

$$[K] = \sum_e [K]^e \quad : \text{la matrice conductivité globale}$$

$$[C] = \sum_e [C]^e \quad : \text{la matrice de capacité globale}$$

$$\{Q\} = \sum_e \{Q\}^e \quad : \text{le vecteur de charge thermique global}$$

Sous la condition initiale :

$$T(x, y, z, t=0) = T_{ini}(x, y, z) = T_{ini} \quad \forall x, y, z \quad (48)$$

### 2.1.7. Schéma d'intégration du temps

Après assemblage, le système d'équations globales s'écrit la forme de l'équation (47) sous la condition initiale (48). C'est un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre dont la résolution nécessite une discrétisation du temps. Pour ce faire, on

subdivise la durée du chauffage en une suite d'intervalles  $([t_i, t_{n+1}])_{0 \leq i \leq n-1}$ . En utilisant une paramétrisation linéaire sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  on obtient :

$$t_\theta = (1-\theta) \cdot t_n + \theta \cdot t_{n+1} = t_n + \theta \cdot \Delta t \quad \theta \in [0,1] \quad (49)$$

Où

$\theta$  est un paramètre.  $\Delta t$  est le pas de temps et s'exprime :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (50)$$

La dérivée par rapport au temps de la température à l'instant  $t_\theta \in [t_n, t_{n+1}]$  est approchée alors par le schéma aux différences finies suivant (Reddy, 1993) :

$$\left\{ \dot{T} \right\}_\theta = \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \quad \theta \in [0,1] \quad (51)$$

$\{T\}_{n+1}$  et  $\{T\}_n$  étant les températures aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$  respectivement. Ainsi la température  $\{T\}_\theta$  et le vecteur de charge thermique global  $\{Q\}_\theta$  à l'instant  $t_\theta$  seront approchés par les formules suivantes (Reddy, 1993) :

$$\begin{cases} \{T\}_\theta = (1-\theta) \cdot \{T\}_n + \theta \cdot \{T\}_{n+1} \\ \{Q\}_\theta = (1-\theta) \cdot \{Q\}_n + \theta \cdot \{Q\}_{n+1} \end{cases} \quad \theta \in [0,1] \quad (52)$$

$\{Q\}_{n+1}$  et  $\{Q\}_n$  étant les vecteurs de charge thermique globaux aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$  respectivement

En substituant  $\left\{ \dot{T} \right\}_\theta$ ,  $\{T\}_\theta$  et  $\{Q\}_\theta$  par leurs expressions dans (47), on obtient le schéma suivant :

$$[C] \cdot \left( \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \right) + [K] \cdot ((1-\theta) \cdot \{T\}_n + \theta \cdot \{T\}_{n+1}) = (1-\theta) \cdot \{Q\}_n + \theta \cdot \{Q\}_{n+1} \quad \theta \in [0,1] \quad (53)$$

Que l'on peut réécrire sous la forme :

$$([C] + \Delta t \cdot \theta \cdot [K]) \cdot \{T\}_{n+1} = ([C] - (1-\theta) \cdot \Delta t \cdot [K]) \cdot \{T\}_n + \Delta t \cdot [(1-\theta) \cdot \{Q\}_n + \theta \cdot \{Q\}_{n+1}] \quad \theta \in [0,1] \quad (54)$$

### 2.1.7.1. Schéma explicite

Si on choisit  $\theta = 0$  le schéma donné par la formule (54) s'écrit :

$$[C] \cdot \{T\}_{n+1} = ([C] - \Delta t \cdot [K]) \cdot \{T\}_n + \Delta t \cdot \{Q\}_n \quad (55)$$

Ce schéma est dit explicite. Il présente l'avantage d'exprimer la température à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de la température et du flux à l'instant précédent  $t_n$ . Cependant, il a l'inconvénient d'être conditionnellement stable (Reddy, 1993) dans le sens qu'il faut prendre un pas de temps très petit comparativement à la discrétisation spatiale. Ce qui a pour effet d'alourdir le temps de calcul.

### 2.1.7.2. Schéma implicite

Pour  $\theta \neq 0$ , on remarque que la solution, équation (54), à l'instant  $t_{n+1}$  ne dépend pas explicitement de la solution à l'instant  $t_n$ . Ce schéma est dit implicite. Il présente

l'avantage d'être inconditionnellement stable (pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$ ). En effet, pour tous les schémas

implicites pour lesquels le paramètre est supérieur ou égal à  $\frac{1}{2}$ , aucune composante ne diverge donc la température reste finie partout et à tout instant. Le schéma (54) peut se réécrire de façon compacte sous la forme :

$$\left[ \hat{C} \right] \cdot \{T\}_{n+1} = \left[ \hat{K} \right] \cdot \{T\}_n + \left\{ \hat{Q} \right\} \quad (56)$$

avec

$$\left[ \hat{C} \right] = ([C] + \Delta t \cdot \theta \cdot [K]) \quad \theta \in [0,1] \quad (57)$$

$$\left[ \hat{K} \right] = ([C] - (1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot [K]) \quad \theta \in [0,1] \quad (58)$$

$$\left\{ \hat{Q} \right\} = \Delta t \cdot [(1 - \theta) \cdot \{Q\}_n + \theta \cdot \{Q\}_{n+1}] \quad \theta \in [0,1] \quad (59)$$

où

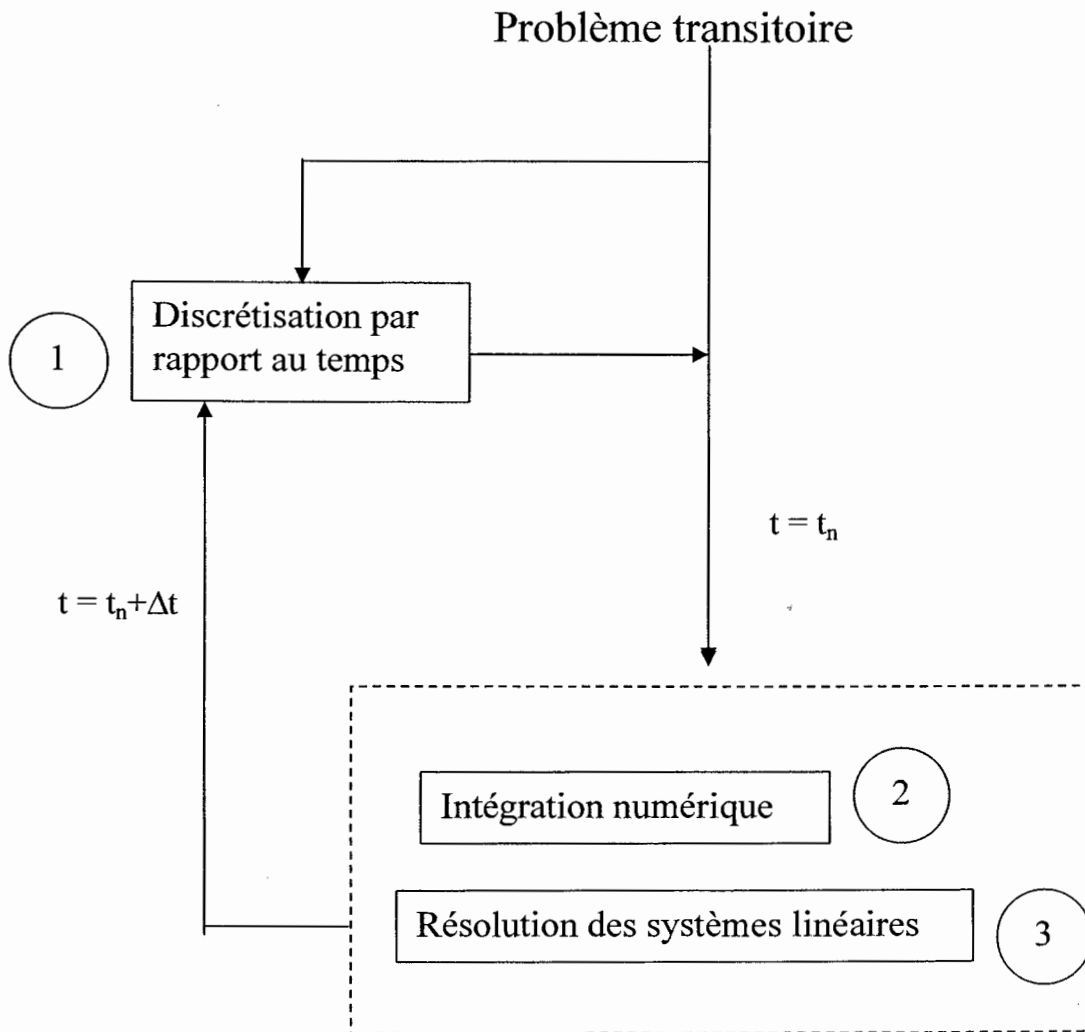
$\left[ \hat{C} \right]$  est la matrice d'itération du système. Elle est constante pour les problèmes linéaires

tant que le pas de temps ne change pas. Son inverse n'est évalué qu'une seule fois.

Pour la stabilité de la méthode, on choisira  $\theta = \frac{1}{2}$  qui correspond au schéma de Crank-Nicolson.

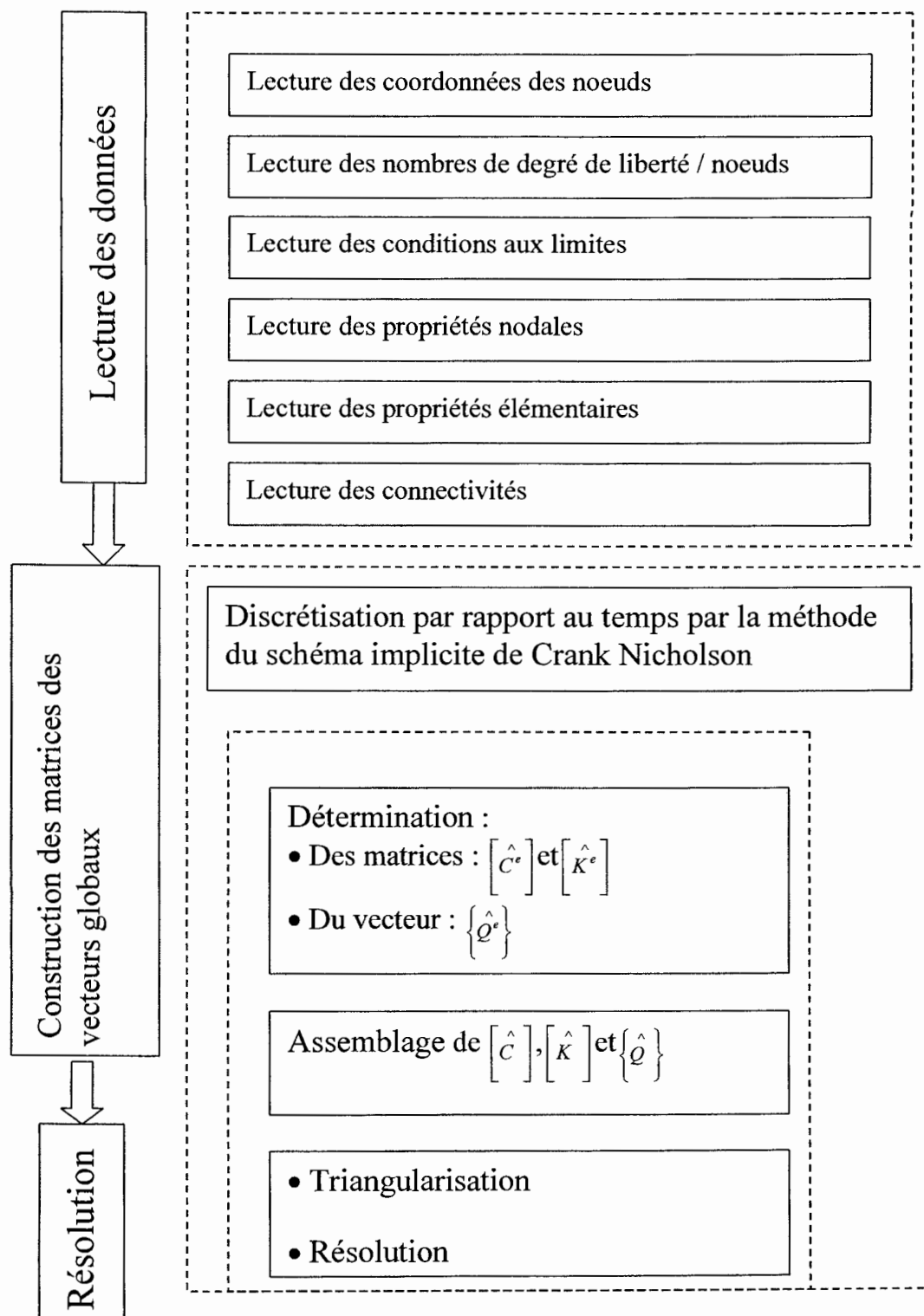
## 2.2. Résolution numérique de l'équation discrétisée

Pour résoudre le système (56) nous avons adopté la technique de factorisation LU (Fortin, 1995). La figure 8 illustre les étapes suivies pour implanter le schéma de Crank-Nicolson. La figure 9 résume les étapes d'implantation du code éléments finis 3D.



- 1 : Schéma implicite monopas (Crank Nicholson  $\theta = 1/2$ )**  
**2 : Méthode d'intégration de Gauss (8 points de Gauss)**  
**3 : Méthode de résolution LU**

**Figure 8 :** Étapes de suivi pour l'implantation du schéma implicite de Crank-Nicolson utilisées dans la MEF



**Figure 9** : Organigramme pour la résolution du problème transitoire linéaire par la MEF

### 2.3. Validation analytique et numérique

Dans cette partie, on s'intéresse à la validation de notre programme éléments finis 3D. Comme matériau, on considère une plaque de PET. Deux situations avec des conditions aux limites spécifiques sont étudiées. Une comparaison est faite avec les solutions analytiques 1D et leurs solutions numériques éléments finis 1D correspondantes.

#### 2.3.1. Répartition de la température à travers l'épaisseur d'une plaque en absence de source radiative.

Cette étude est menée dans le but de s'assurer de la validité du code de calcul. Elle est réalisée à partir de l'équation de chaleur transitoire 1D, sans source interne et sans radiation à travers une plaque plane infinie d'un matériau PET d'épaisseur  $2L$ , donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k}{\rho \cdot C} \quad (60)$$

avec

$T$  : la température,  $t$  : le temps

$x$  : variable de position suivant l'axe  $X$

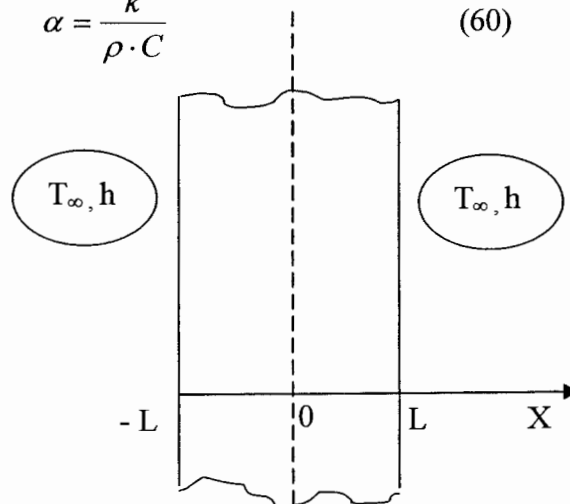


Figure 10 : Chauffage d'une plaque plane infinie

L'absorption d'énergie dans le matériau thermoplastique PET est négligée. La plaque à l'instant initial a une température uniforme  $T_{ini}$ . Elle est plongée dans un fluide à la température  $T_{\infty} \neq T_{ini}$ .

Les conditions aux limites de Newton (conditions aux limites de troisième genre) sont considérées. Elles traduisent l'échange de chaleur par convection sur les surfaces exposées (Fig. 10) s'exprimant par :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\pm L} = h(T - T_{\infty}) \quad (61)$$

où

$h$  : le coefficient de convection

$k$  : la conductivité thermique du PET

En tenant compte de la symétrie géométrique, on impose les conditions aux limites suivantes : un flux nul pour  $x = 0$  (milieu de la plaque) et un flux de convection à l'autre extrémité de la surface de la plaque ( $x=L$ ).

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T - T_{\infty}) \quad (62)$$

La solution analytique de l'équation (60) associée au problème posé s'écrit (**Annexe 6**) (Léontiev, 1985) :

$$T_{\infty} - T = (T_{\infty} - T_{ini}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n_i)}{n_i + \sin(n_i) \cos(n_i)} \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot \exp^{-n_i^2 Fo} \quad (63)$$

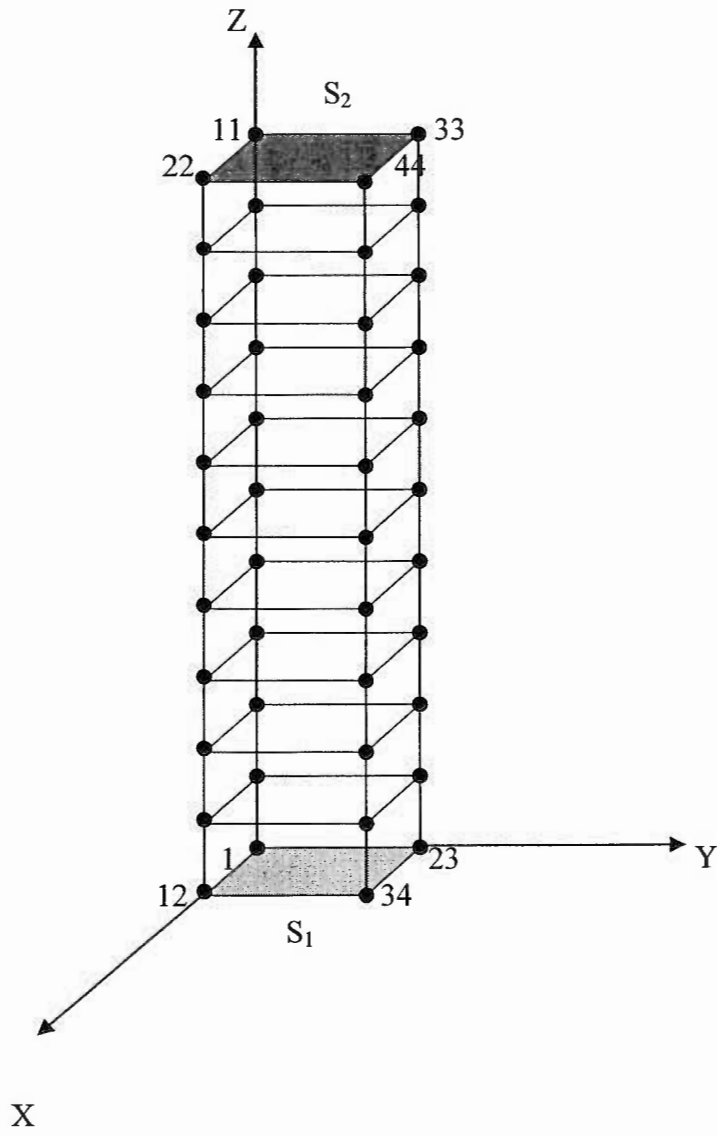
Les propriétés thermophysiques du PET ainsi que les propriétés géométriques et de simulation sont fournies au tableau 2.



**Tableau 2** : Propriétés thermophysiques du PET.

$\rho$ (Densité) [ $\text{Kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ]	1400
C (Capacité calorifique) [ $\text{J Kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ]	1750
k (Conductivité thermique) [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]	0.29
$\alpha$ (Diffusivité thermique) [ $\text{m s}^{-2}$ ]	$1.183\cdot 10^{-7}$
L (Demi-épaisseur de la plaque) [m]	0.0015
h (Coefficient de convection) [ $\text{W }^{\circ}\text{C}^{-1} \text{m}^{-2}$ ]	10
$T_{\infty}$ (Température du milieu ambiant) [ $^{\circ}\text{C}$ ]	25
$T_{\text{ini}}$ (Température initiale de la plaque) [ $^{\circ}\text{C}$ ]	100
$\Delta T$ (Pas d'intégration temporel) [s]	0.05
N (Nombre d'éléments suivant l'épaisseur)	10

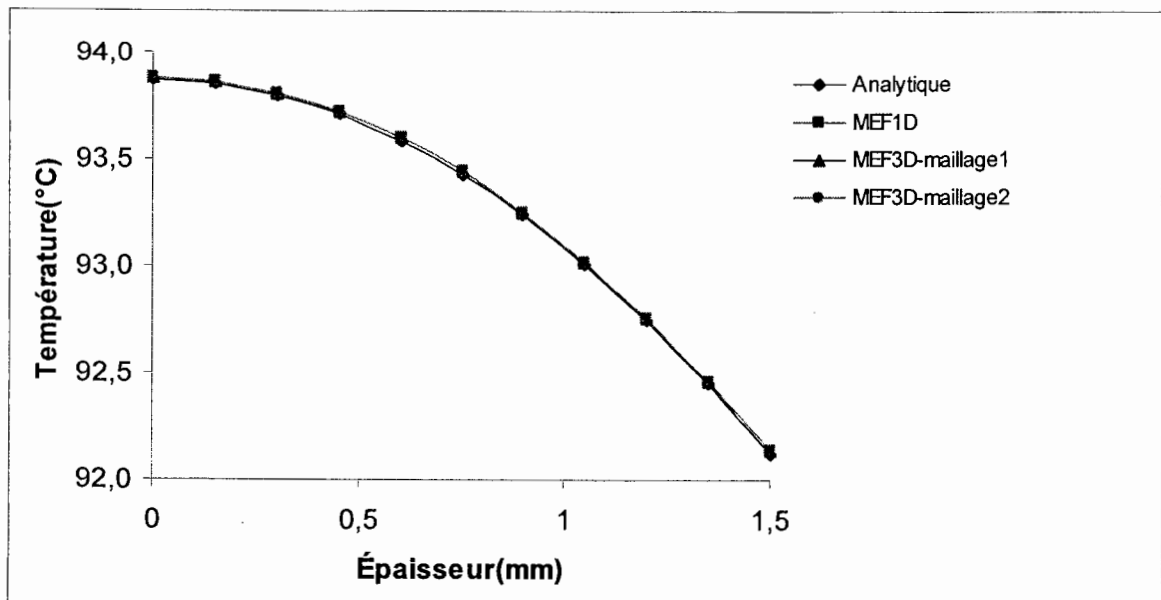
On considère pour le maillage éléments finis 1D, des éléments linéaires et pour le maillage 3D, des éléments hexaédriques linéaires. Afin de s'assurer de la bonne connectivité des éléments pour le modèle 3D, deux maillages (maillage 1 et maillage 2) sont considérés (Fig.11 et Fig.12).



**Figure 11 :** Maillage 1 par MEF 3D

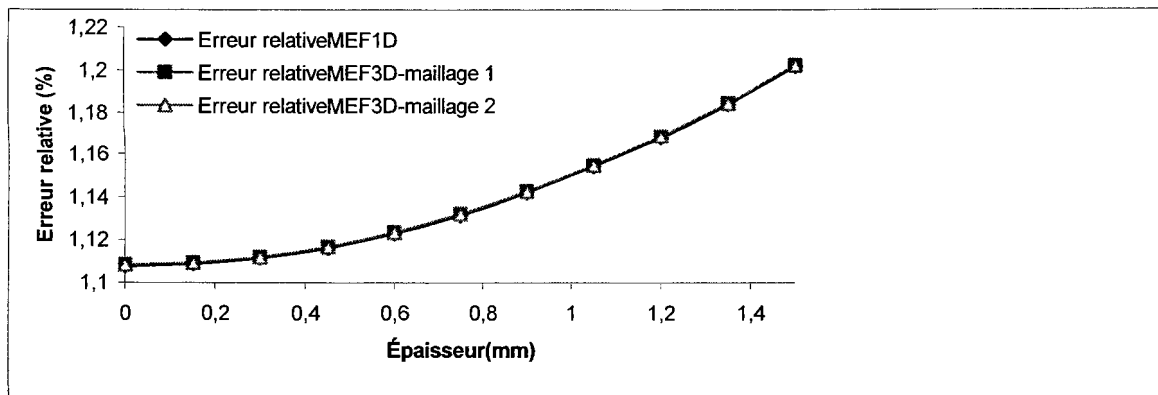


Dans la figure 13, les résultats numériques et analytiques obtenus pour le profil de température à travers l'épaisseur à l'instant  $t = 35$  s sont présentés.

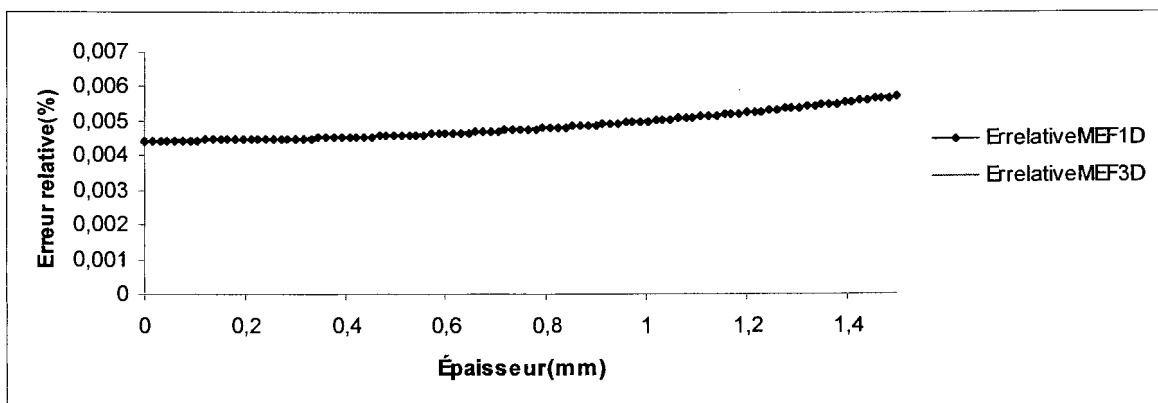


**Figure 13 :** Validation des solutions MEF1D et MEF3D (N=10,  $t=35$ s)

Dans les deux modèles numériques 1D et 3D, on observe une excellente corrélation entre les résultats numérique et analytique. Le maximum des erreurs relatives entre les solutions analytique et numérique 1D et 3D reste inférieur ou égal à 1.2% pour 10 éléments suivant l'épaisseur (Fig. 14) et inférieur ou égal à 0.006% pour 100 éléments suivant l'épaisseur (Fig. 15). Par conséquent, plus l'épaisseur d'un élément fini est réduite en augmentant le nombre d'éléments suivant l'épaisseur, plus la solution numérique converge avec une erreur relative presque nulle.



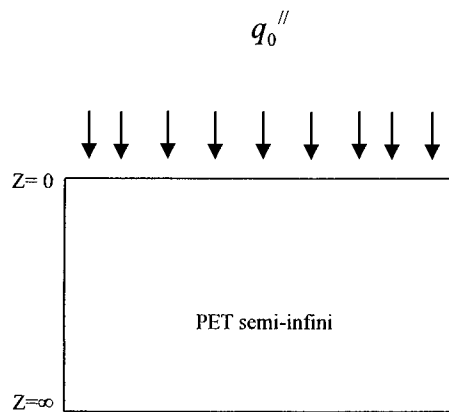
**Figure 14 :** Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3 (N=10, t=35s)



**Figure 15 :** Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3D (N=100, t=35s)

### 2.3.2. Répartition de la température à travers l'épaisseur d'une plaque semi-infinie dans le cas d'une présence de source radiative (Cas 1D)

Cette deuxième validation est réalisée à partir du modèle analytique de De Vriendt (De Vriendt, 1984) pour le cas d'une plaque de PET semi-infinie soumise à une densité de flux incidente constante  $q_0''$  (Fig. 14) en considérant les parois adiabatiques.



**Figure 16 :** Représentation du modèle analytique 1D

La solution de ce modèle est obtenue par la résolution de l'équation de la chaleur 1D (équation 64), en considérant l'atténuation d'une source volumique ( $q_0'' A$ ) en fonction de l'épaisseur ( $z$ ), selon la loi de Beer-Lambert.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_0'' \cdot A \cdot e^{-AZ}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \text{pour } 0 < z < \infty \quad (64)$$

La densité  $q_0''$  est supposée être constante. Son expression est celle de l'équation (14) fournie dans le chapitre I.

Elle peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$q_0'' = \frac{A_s}{A_r} \cdot F_{s-r} \cdot \varepsilon_s \cdot \sigma \cdot T_s^4 \quad (65)$$

Avec les conditions aux limites adiabatiques et initiales suivantes :

$$T(z, t = 0) = T_{ini}; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = q_0''; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(z, t) = T_{ini} \quad (66)$$

La solution analytique de l'équation (64) tenant compte des conditions aux limites (66) est donnée par (**Annexe 7**) (Monteix et al, 2001):

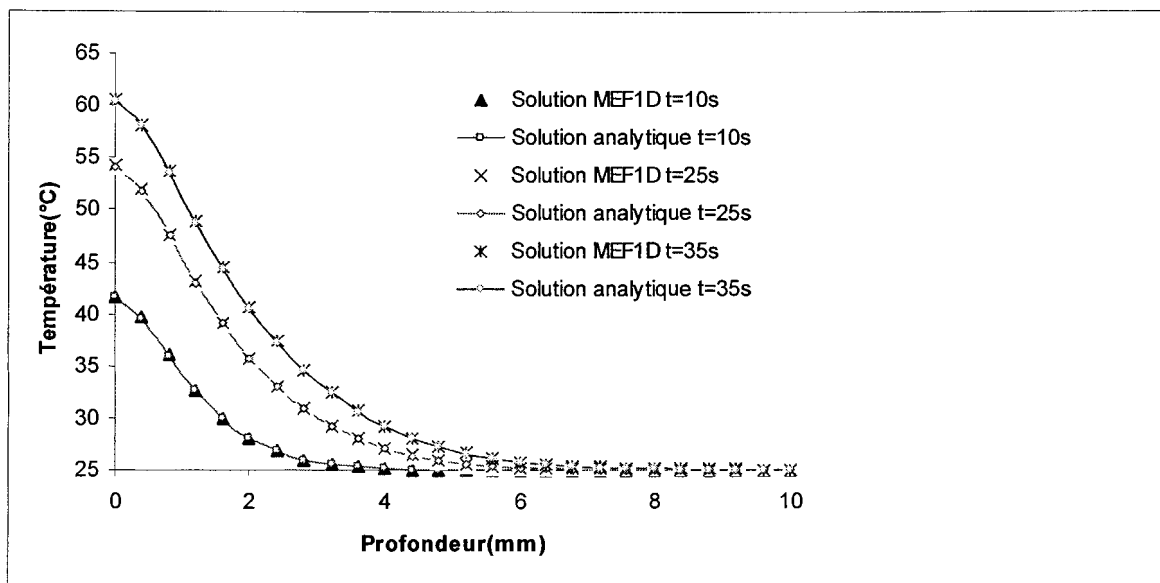
$$\begin{aligned} T(z, t) = & T_{ini} - \frac{q_0''}{kA} e^{-Az} + q_0'' \cdot A\sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ & + \frac{q_0''}{2k} e^{A^2\alpha t + Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ & + \frac{q_0''}{2k} e^{A^2\alpha t - Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \end{aligned} \quad (67)$$

Les paramètres utilisés pour la validation sont donnés dans le tableau 3 :

**Tableau 3** : Paramètres utilisés pour la résolution du problème de la deuxième validation. (Monteix et al, 2001)

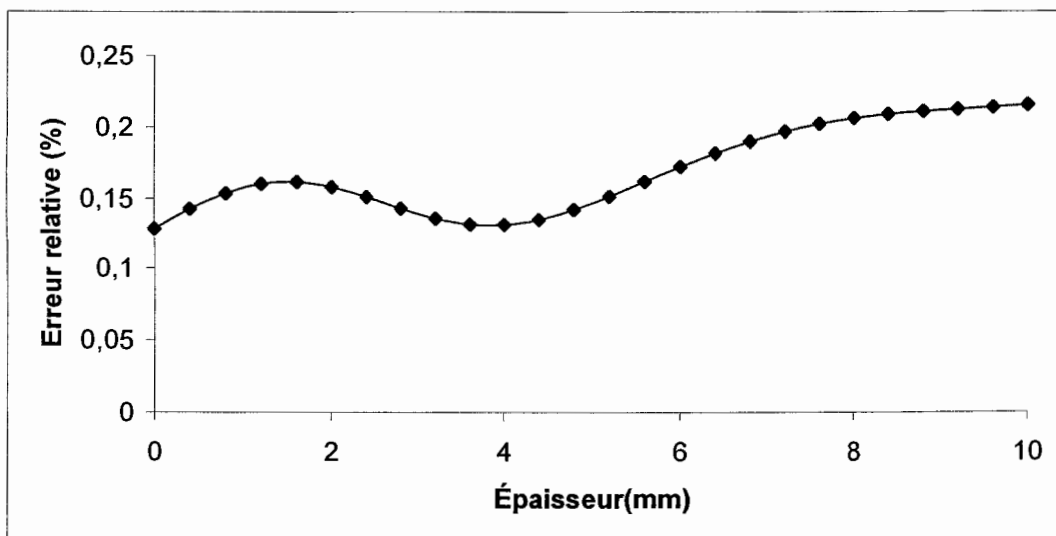
$A_r$ (Surface irradiée) [mm <sup>2</sup> ]	100×100
$E_p$ (Épaisseur de la feuille) [mm]	20
$T_s$ (La température absolue de l'émetteur) [K]	1700
$\varepsilon_s$ (Émissivité moyenne du tungstène)	0.26
$A$ (Coefficient moyen d'absorption) [m <sup>-1</sup> ] Pour une longueur d'onde $\lambda$ compris entre 0.2 et 10 $\mu$ m	2660
$F_{s-r}$ (Facteur de forme)	0.53
$t$ (Temps de chauffage) [s]	35
$T_{ini}$ (Température initiale) [°C]	25

Dans le cas d'une feuille de PET considérée semi-infinie, l'épaisseur 20 mm est suffisamment grande pour que la perturbation du flux appliquée sur la face supérieure ne soit pas ressentie par la face inférieure. Dans la figure 17, on a représenté les résultats analytiques et numériques (MEF), cas 1D, obtenus de l'évolution de la température aux instants  $t = 10$  s,  $t = 25$  s et  $t = 35$  s pour une profondeur de 10mm. Dans les trois cas, on observe une bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques. Toutefois, on constate à  $t = 25$  s, pour une subdivision de 25 éléments à travers l'épaisseur (Fig. 18) d'un élément fini 1D, l'erreur relative sur l'épaisseur varie entre 0.1% et 0.2%. Tandis que pour une subdivision de 100 éléments par rapport à l'épaisseur, l'erreur relative sur l'épaisseur de la plaque devient plus stable, mais reste dans l'intervalle de 0.1% et 0.2% (Fig. 19).

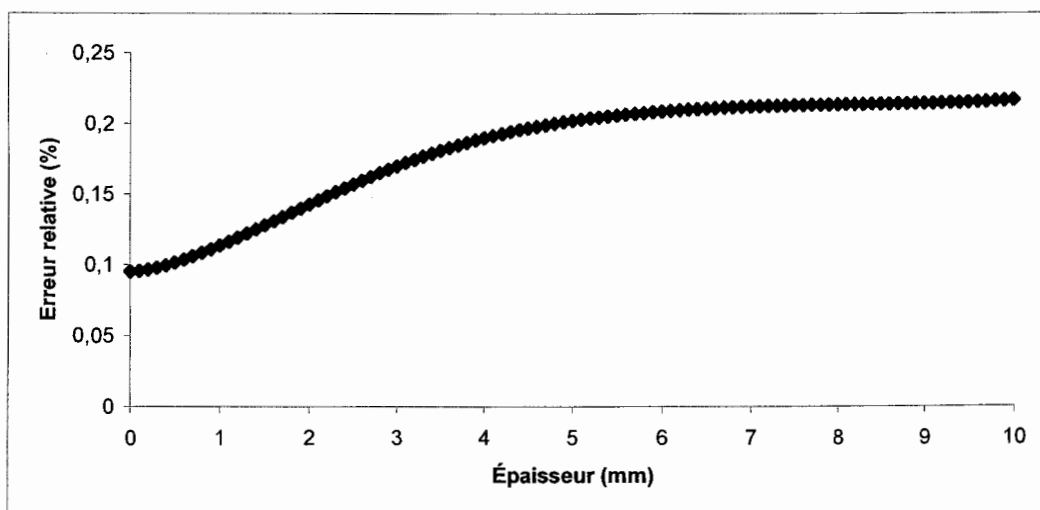


**Figure 17 :** Comparaison solution analytique et numérique MEF1D de la température par rapport à l'épaisseur pour différents temps  $t=10$ s,  $t=25$ s,  $t=35$ s ( $N=25$ ).

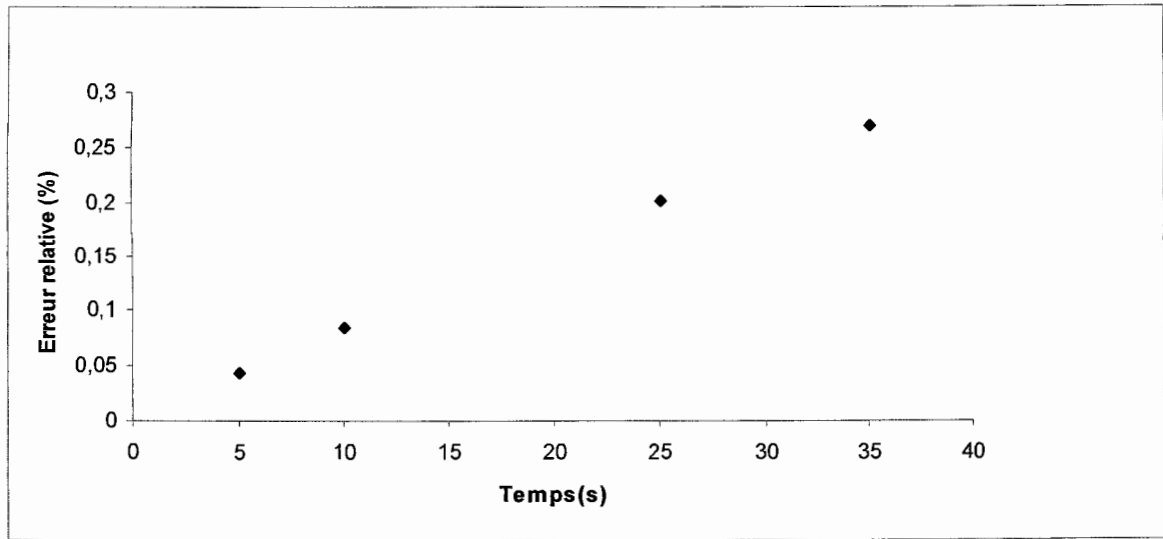




**Figure 18 :** Précision du calcul de la solution MEF1D (N=25)



**Figure 19 :** Erreur relative MEF1D en fonction de l'épaisseur (N=100)



**Figure 20 :** Erreur relative MEF1D au centre en fonction du temps (N=100)

Dans la figure 20, on a présenté le comportement d'un maillage MEF1D à 100 éléments. On constate que l'erreur relative au centre de la plaque PET, en fonction du temps, est inférieure à 0.3% dans la limite du temps de chauffage  $t = 35s$ , ce qui permet de prouver la précision du schéma de calcul utilisé en fonction du temps.

### 2.3.3. Répartition de la température à travers l'épaisseur d'une plaque semi-infinie dans le cas d'une présence de source radiative (Cas 3D)

Pour une application tridimensionnelle (MEF 3D) du problème précédent, le phénomène d'absorption unidirectionnelle à travers l'épaisseur du PET, selon la loi de Beer-Lambert est retenu. L'équation de la chaleur 3D peut s'écrire alors:

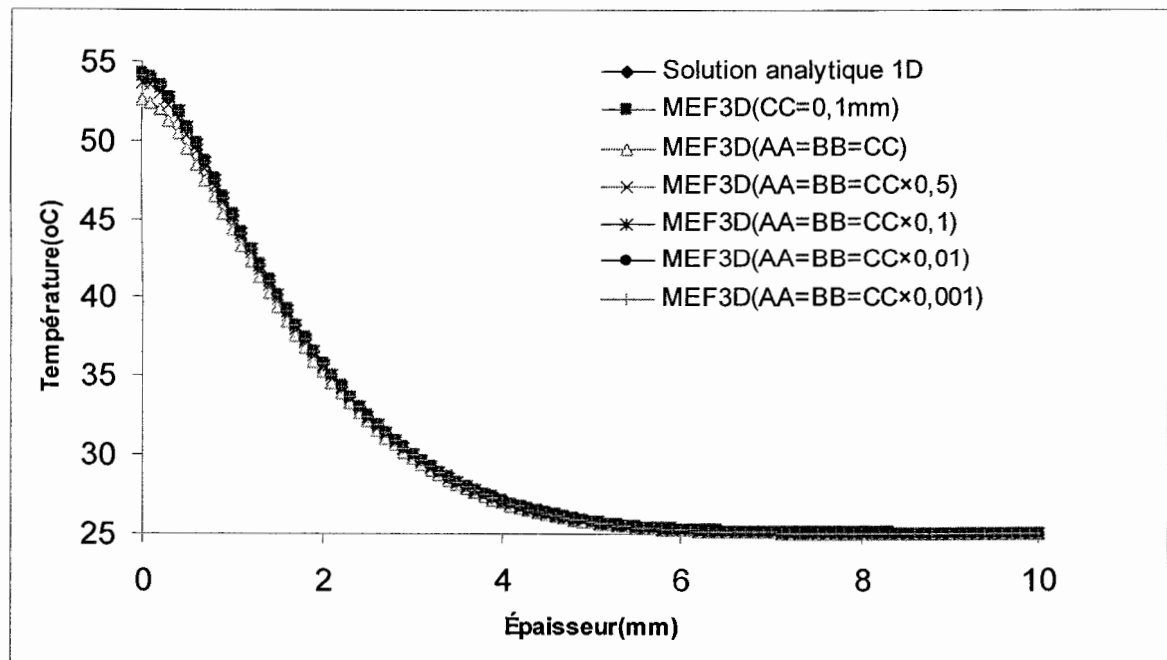
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nabla \left( \frac{q_0'' \cdot e^{-A \cdot z}}{k} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (68)$$

On considère les mêmes conditions que celles fournies dans le paragraphe 2.3.2. Les confrontations entre les solutions MEF1D et MEF3D sont effectuées pour les configurations suivantes :

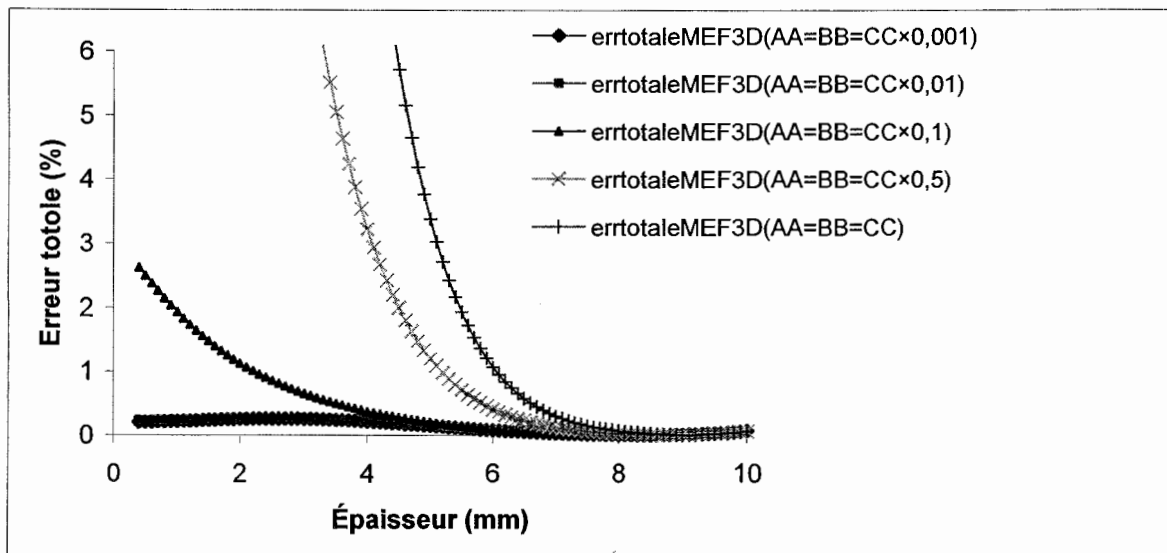
**Tableau 4 :** Maillage 1 par MEF3D pour une épaisseur de 10mm.

<b>Grandeur</b>	<b>Valeur</b>
$E_p$ (Épaisseurs) [m]	0.01
N (Nombre d'éléments suivant l'épaisseur)	100
CC (Épaisseur d'un élément = $E_p / NZE$ ) [m]	0.0001
delta (Coefficient multiplicatif)	0.5 puis 0.1 puis 0.01 puis 0.001
AA (largeur d'un élément suivant la direction x = $CC \times \text{delta}$ ) [m]	
BB (longueur d'un élément suivant la direction y = $CC \times \text{delta}$ ) [m]	

Les résultats correspondants au profil de température à travers l'épaisseur, à l'instant  $t = 25s$ , sont présentés à la figure 21. On remarque que les solutions en MEF1D et MEF3D ne coïncident que lorsque les surfaces de bases des éléments du maillage éléments finis 3D deviennent très petites, lorsque les dimensions x et y sont négligeables devant l'épaisseur z de l'élément, ce qui permettra de ne favoriser que l'absorption de l'intensité radiative suivant l'axe des Z. Toutefois, il serait intéressant de définir des critères par rapport à la surface de l'élément du maillage, de l'épaisseur considérée et de la valeur du coefficient d'absorption moyen afin de porter un choix judicieux entre un code MEF1D ou MEF3D pour la modélisation du chauffage du PET.



**Figure 21 :** Comparaison des solutions MEF1D et MEF3D pour différentes surfaces (AA×BB) à  $t=25$ s et d'épaisseur 10mm.



**Figure 22 :** Erreur totale MEF3D / analytique 1D en fonction de l'épaisseur pour différentes surfaces (AA×BB) à  $t=25$ s et d'épaisseur 10mm.

Les erreurs totales en fonction de l'épaisseur (Figure 22) montrent que pour une même épaisseur d'un élément fini 3D hexaédrique  $CC=0.1\text{mm}$ , plus sa surface de base diminue, plus la solution numérique MEF 3D s'approche de la solution analytique 1D avec une erreur relative de l'ordre de 0.2%. Ces résultats permettent alors de définir la taille des éléments finis nécessaires pour un calcul plus précis de la répartition de la température à travers une feuille de PET exposée à un flux radiatif. La précision sur l'erreur totale est dès lors atteinte pour des éléments finis hexaédriques aux dimensions surfaciques infinitésimales comparativement à l'épaisseur.

## CHAPITRE 3

### MODÉLISATION TRANSITOIRE DU CHAUFFAGE INFRAROUGE D'UNE FEUILLE DE PET

Dans ce dernier chapitre, une comparaison des résultats de la simulation obtenus par le code MEF3D développé dans ce mémoire avec ceux obtenus expérimentalement, dans le cas de chauffage infrarouge d'une feuille semi-transparente de type PET, est présentée. La modélisation est effectuée dans les mêmes conditions expérimentales que celles développées dans les travaux de laboratoire de S. Monteix (Monteix et al, 2001). Aussi, d'autres résultats de simulations sont présentés. Les résultats fournis dans ce chapitre sont basés sur la loi de Beer-Lambert. Finalement, une analyse de la précision sur les résultats obtenus est fournie.

#### 3.1. Dispositif expérimental de chauffage

Le dispositif expérimental utilisé dans le travail de S. Monteix (Monteix et al, 2001) concerne le chauffage infrarouge d'une plaque plane et carrée de type PET. L'objectif est d'enregistrer l'évolution du champ de température dans la plaque PET, de dimension  $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 1,5 \text{ mm}$ , soumise à une source de rayonnement infrarouge de courte longueur d'onde. Un seul émetteur en tube de quartz à filament de Tungstène (L400) est

utilisé et il est placé à une distance de 5cm du centre de la plaque. Une caméra infrarouge (Iw880 Agema) est disposée normalement à la surface de la plaque. Les températures sont mesurées sur les deux faces avant et arrière de la plaque PET.

Le montage décrit permet ainsi d'enregistrer en fonction du temps la distribution de la température, par le biais de thermogrammes, sur les surfaces de la plaque. La fréquence d'acquisition utilisée dans les travaux de S. Monteix est de l'ordre de 25 trames par seconde, commandée en temps réel par un PC, équipé d'une carte d'acquisition de 12 bits. Le temps de chauffage dans l'expérimentation est de l'ordre de 35 secondes.

### 3.2. Comparaison numérique MEF 3D / expérimentale

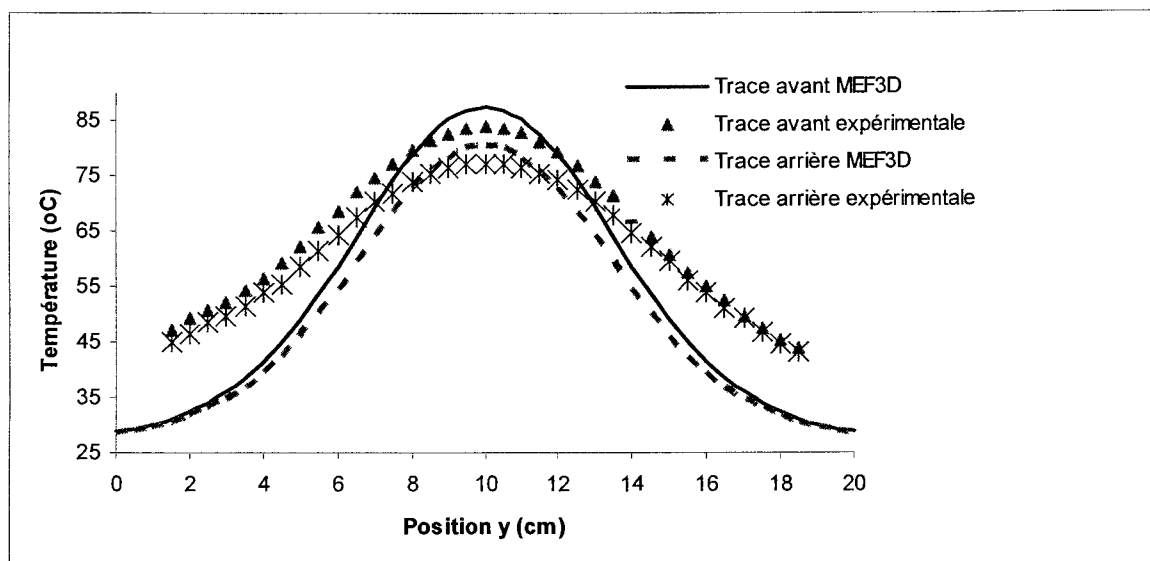
Pour la validation numérique MEF 3D par les résultats expérimentaux, on a considéré d'une part l'élément hexaédrique linéaire à huit nœuds et on a subdivisé le domaine rectangulaire en 7200 éléments, d'autre part. On considère les conditions aux limites suivantes : la convection sur les faces du haut et du bas de la feuille et adiabatique aux parois, qui s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(T(x, y, z=0) - T_{\infty}) \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = h(T(x, y, z=L) - T_{\infty}) \end{array} \right. \text{ et } \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0, L_x} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0, L_y} = 0 \quad (69)$$

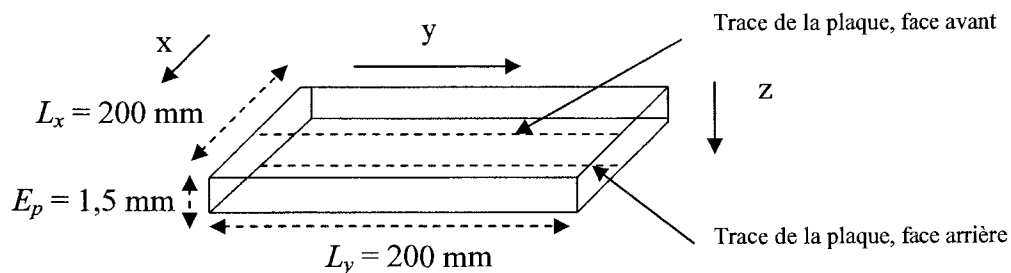
La figure 23 illustre les résultats numériques obtenus par la simulation, via MEF3D, et ceux obtenus expérimentalement. Cette figure concerne la distribution de la température sur les traces avant et arrière des surfaces de la feuille en PET. Deux constatations sont à souligner : i) une légère asymétrie, dans les résultats expérimentaux, aux bords de la membrane et ii) une différence significative en température entre les résultats numériques et ceux observés expérimentalement. La première constatation peut s'expliquer par l'effet des forces de gravité qui tendent, sous l'effet de la chaleur, à faire couler la matière du plastique vers le bas, ce qui entraîne une augmentation de l'épaisseur sur cette région inférieure de la feuille vis-à-vis de sa région supérieure (qui se chauffe plus rapidement). Le couplage des équations de la chaleur avec les équations de mouvement devrait, en principe, expliquer cette asymétrie. La deuxième constatation, comme le suggère la courbe, à notre avis, peut s'expliquer par la négligence de la diffusion et de la variation des propriétés thermophysiques avec la température. Le couplage de l'équation de conservation de l'énergie 3D et l'équation radiatif de transfert de chaleur 3D, à l'aide d'une approche robuste (telle que la méthode de zone ou la méthode des ordonnées discrètes) pourrait améliorer les prévisions expérimentales. Toutefois, il faut souligner que la région centrale de la feuille polymérique est beaucoup moins affectée par l'erreur (de l'ordre de 4%) figures 25 et 26, puisque la diffusion est moins importante dans cette région qui est exposée normalement à la source chauffante comme le suggère la figure 27, qui concerne l'évolution de la température sur la face arrière de la feuille en deux points. Ces résultats montrent que les températures calculées sont proches des résultats expérimentaux correspondants. Finalement, en tenant compte des hypothèses effectuées pour la simulation



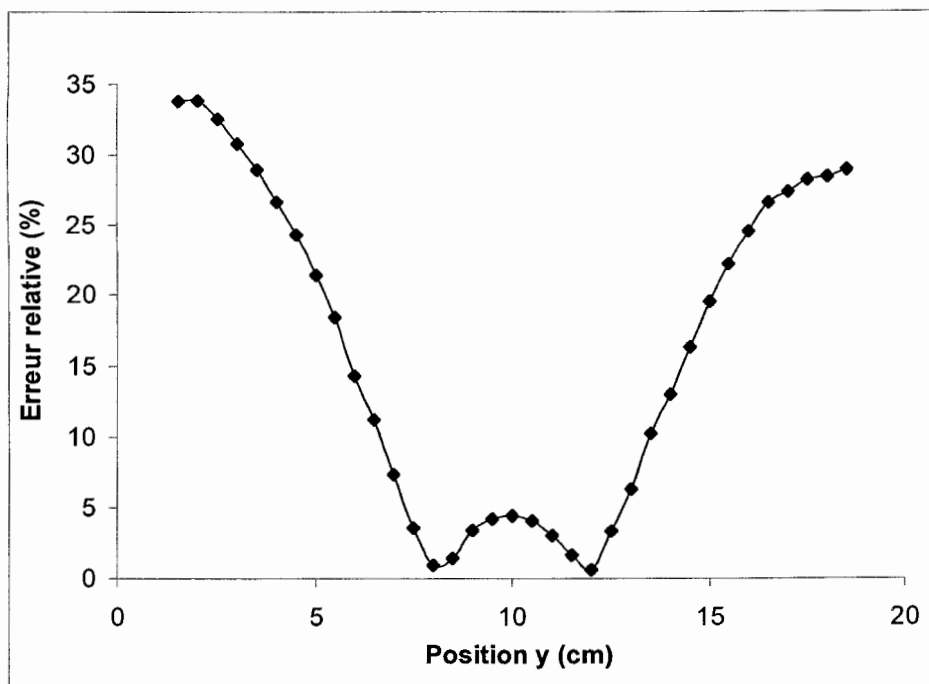
numérique, nous pouvons considérer dans l'ensemble que ces résultats sont très satisfaisants



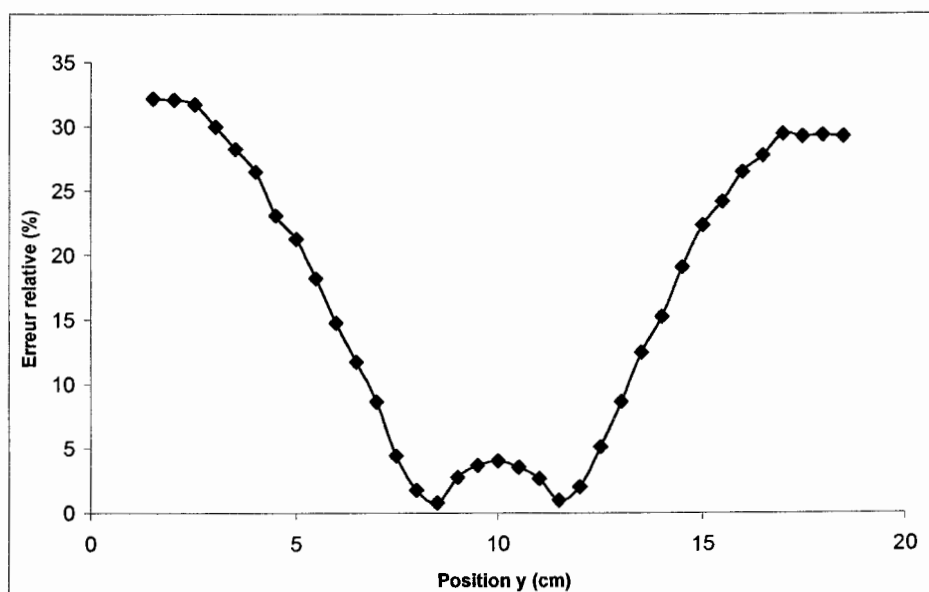
**Figure 23 :** Distribution de la température sur les traces de la feuille PET avant et arrière (Épaisseur 1,5 mm) à  $t = 35$  s



**Figure 24 :** Schématisation des traces avant et arrière de la plaque carrée PET, de 20cm de côté et 15mm d'épaisseur.

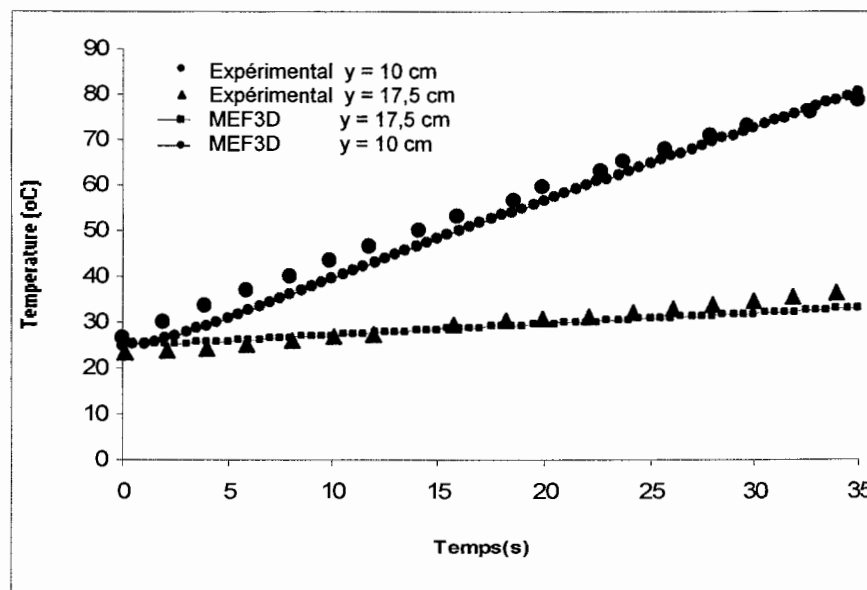


**Figure 25 :** Erreurs relatives entre les solutions numériques MEF3D et les mesures expérimentales pour la trace avant de la plaque

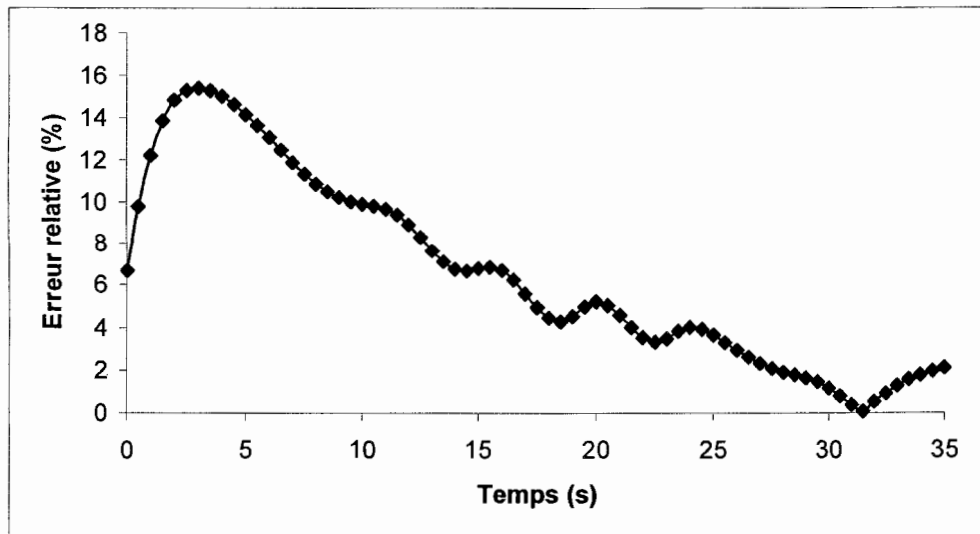


**Figure 26 :** Erreurs relatives entre les solutions numériques MEF3D et les mesures expérimentales pour la trace arrière de la plaque

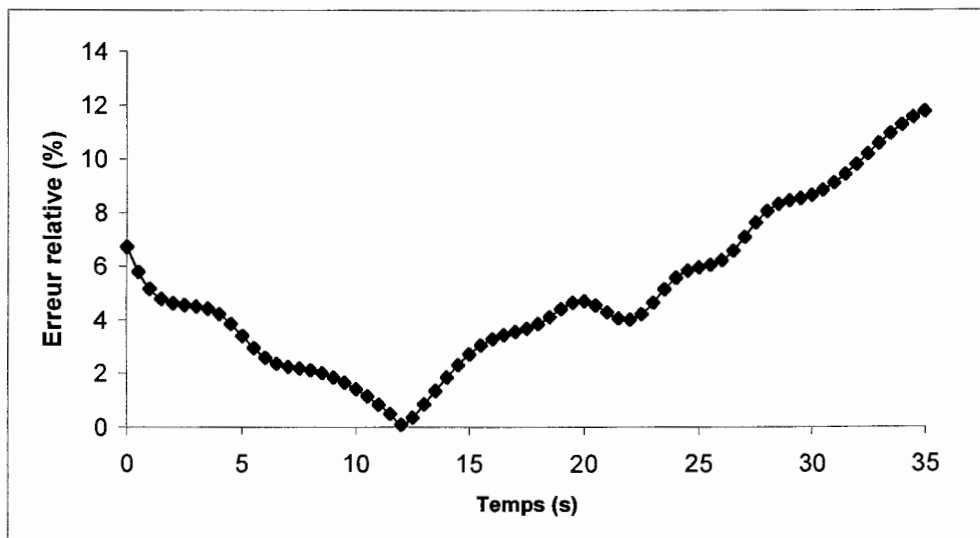
La figure 27 illustre le profil de la température en fonction du temps sur la face arrière de la plaque en PET en deux positions : centrale ( $x = 10$  cm,  $y = 10$  cm,  $z = 1,5$  mm), et presque extrême ( $x = 10$  cm,  $y = 17,5$  cm,  $z = 1,5$  mm). On observe que les températures numériques suivent convenablement la tendance des résultats expérimentaux correspondants. La température au centre de la feuille chauffe beaucoup plus vite que les parties extrêmes. L'erreur relative sur la position centrale ( $x = 10$  cm,  $y = 10$  cm,  $z = 1,5$  mm) de la face arrière décroît au cours du temps et atteint une valeur inférieure à 2% à la fin du cycle de chauffage (Fig. 28). L'erreur relative sur l'ensemble des résultats est de l'ordre de 6%, par contre pour la position presque extrême à la face arrière ( $x = 10$  cm,  $y = 17,5$  cm,  $z = 1,5$  mm), l'erreur relative tend à croître jusqu'à 12%. Toutefois, l'erreur relative moyenne est de l'ordre de 4% (Fig.29). Ces erreurs obtenues peuvent s'expliquer par la variation de la capacité massique avec la température qui devrait être prise en compte dans le calcul numérique.



**Figure 27 :** Distribution temporelle de la température à la face arrière



**Figure 28 :** Erreur relative dans le temps MEF3D/Expérimentale au centre  
( $x = 10$  cm,  $y = 10$  cm,  $z = 1,5$  mm)



**Figure 29 :** Erreur relative dans le temps MEF3D/Expérimentale  
( $x = 10$  cm,  $y = 17,5$  cm,  $z = 1,5$  mm)

### 3.3. Application au chauffage de plaques PET

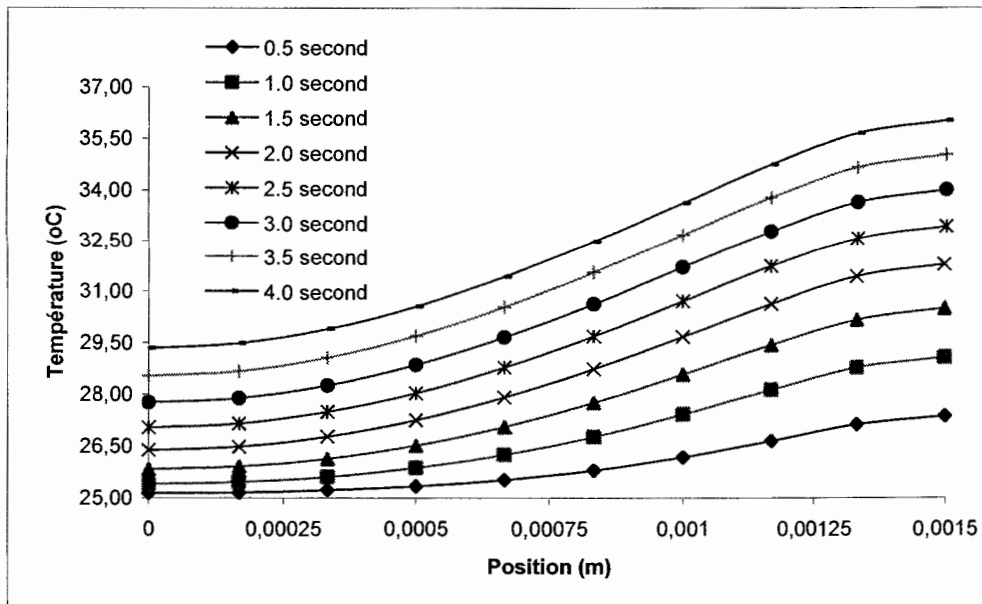
Après avoir validé le modèle numérique 3D dans le cas du chauffage infrarouge d'une feuille thermoplastique semi-transparente en PET, on s'intéresse dans cette partie à une étude numérique plus large sur le chauffage d'une feuille en PET. Pour cela, on considère les mêmes conditions que celles utilisées dans le paragraphe 3.2, en appliquant sur les surfaces de la feuille les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(T(x, y, z=0) - T_{\infty}) \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_p} = h(T(x, y, z=L) - T_{\infty}) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0, L_x} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0, L_y} = 0 \quad (70)$$

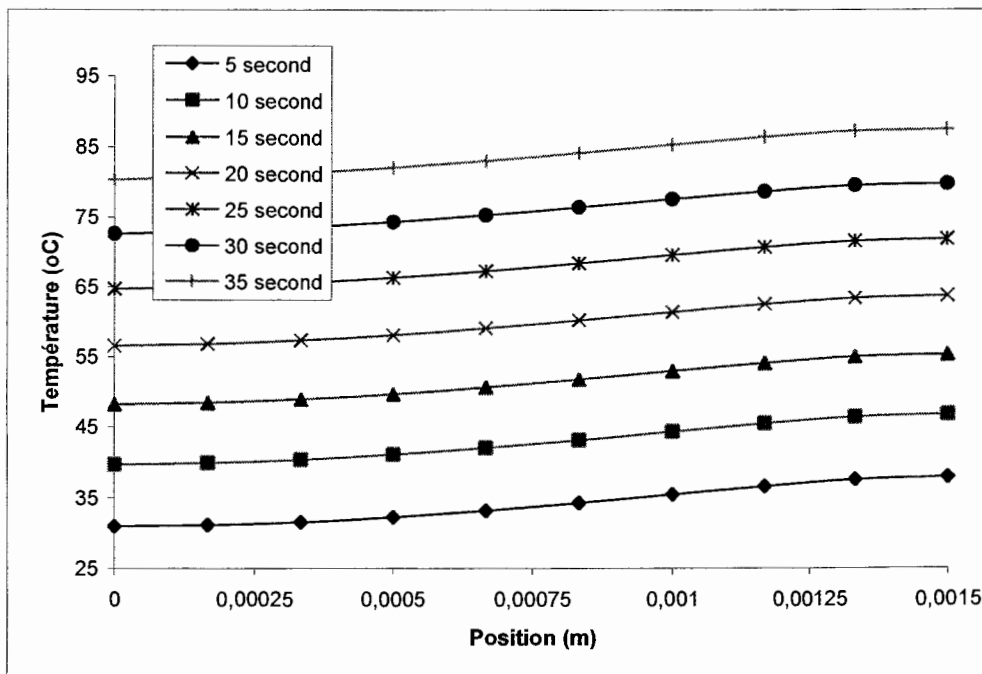
Avec un coefficient d'échange  $h$  sur les faces avant et arrière évalué à  $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{k}^{-1}$ .

$T_{\infty}$  : la température du milieu ambiant.

Dans les figures 30 et 31, on a représenté l'évolution de la température au centre de la feuille en fonction de l'épaisseur, pour deux intervalles de temps [0,5 s, 4 s] et [5 s, 35 s]. On remarque que la température à travers l'épaisseur du matériau augmente graduellement avec le temps jusqu'à atteindre une température de l'ordre de  $85 \text{ }^{\circ}\text{C}$  en fin de chauffage  $t = 35\text{s}$ . On constate également que, pour un intervalle temps compris entre 0,5 à 4 secondes de chauffage, la différence de température entre la face avant et la face arrière est relativement grande (Fig.30), cependant elle devient pratiquement uniforme à partir de 5 secondes jusqu'à la fin du processus de chauffage (Fig.31).

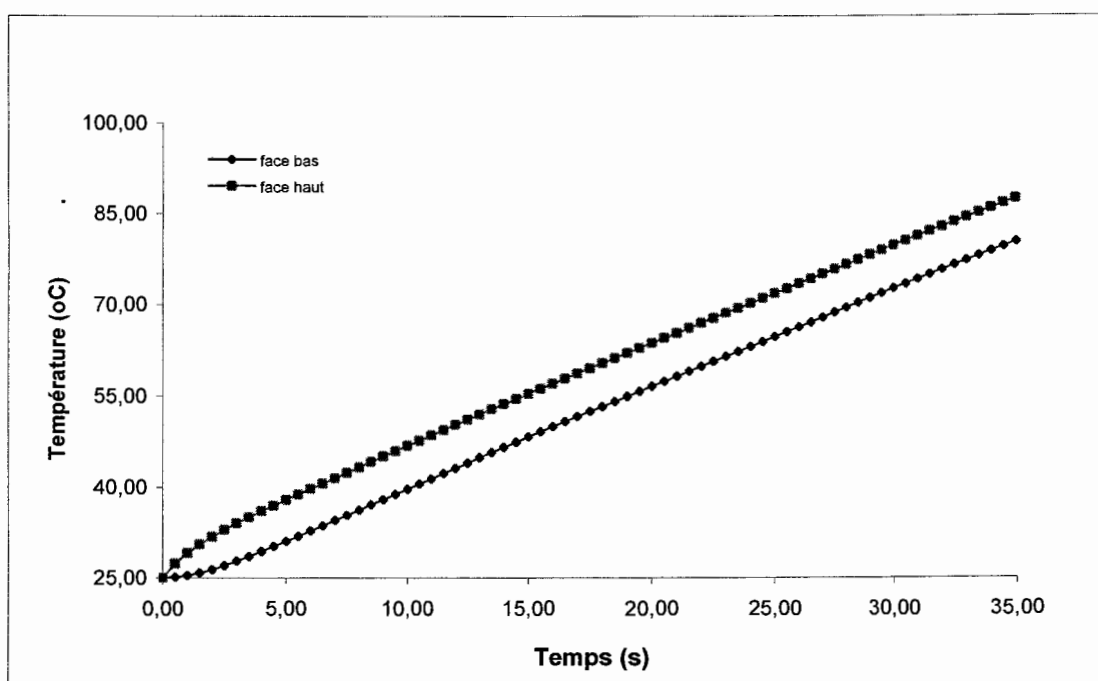


**Figure 30 :** Évolution de la température à travers l'épaisseur (milieu de la feuille) de 0.5 s à 4 s.

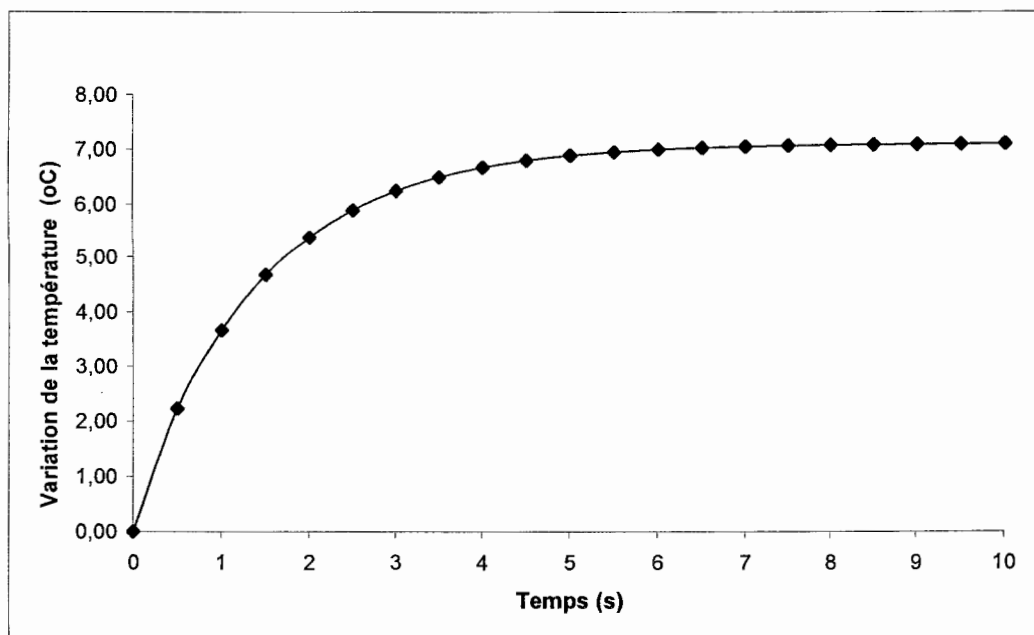


**Figure 31 :** Distribution de la température à travers l'épaisseur (milieu de la feuille) de 5 s à 35 s.

On constate qu'il s'établit, au cours du chauffage, une différence de température entre la face avant et arrière de la plaque qui demeure pratiquement constante à 7 °C à partir de 5s de chauffage (Fig. 32). Sur la figure 33, on représente la différence transitoire de température  $\Delta T$  qui s'établit entre les points centraux haut et bas de la feuille.



**Figure 32 :** Évolution transitoire de la température en haut et en bas de la feuille PET



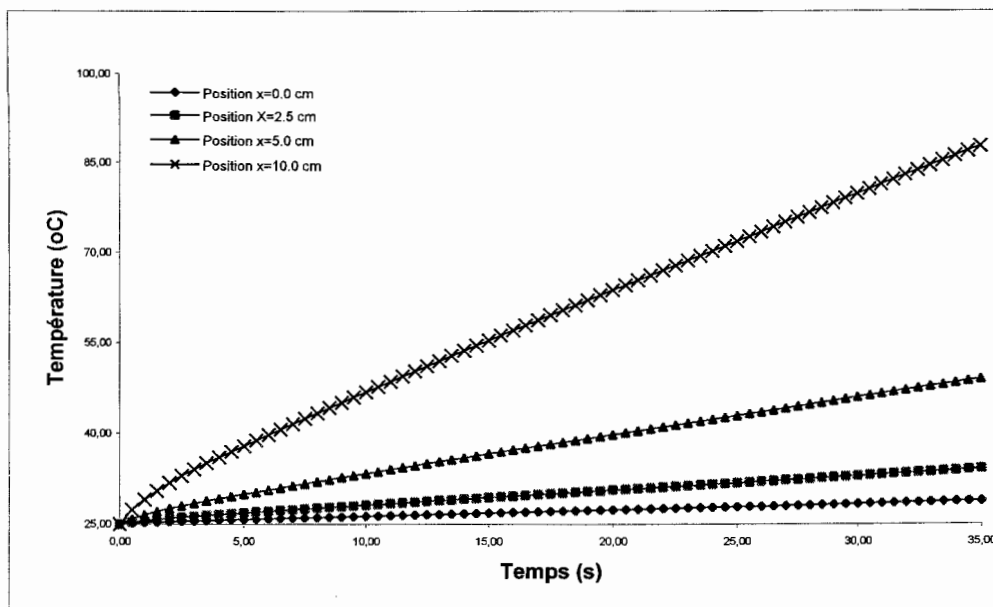
**Figure 33 :** Variation de la différence de la température entre les faces haut et bas de la feuille.

La figure 34 illustre l'évolution de la température en quatre positions appartenant à la surface d'en haut de la plaque :  $(x=0 \text{ cm}, y=0 \text{ cm}, z=0 \text{ cm})$ ,  $(x=2.5 \text{ cm}, y=0 \text{ cm}, z=0 \text{ cm})$ ,  $(x=5.0 \text{ cm}, y=0 \text{ cm}, z=0 \text{ cm})$ ,  $(x=10.0 \text{ cm}, y=0 \text{ cm}, z=0 \text{ cm})$ . On constate que la température n'est pas uniformément répartie à la surface de la feuille exposée à la radiation de l'émetteur infrarouge. La position centrale  $(x=10.0 \text{ cm}, y=0 \text{ cm}, z=0 \text{ cm})$  atteint rapidement la température de  $85 \text{ }^\circ\text{C}$  en fin de chauffage tandis que pour le même temps, le bord  $(x=0 \text{ cm}, y=0 \text{ cm}, z=0 \text{ cm})$  atteint à peine la température de  $28^\circ\text{C}$ .

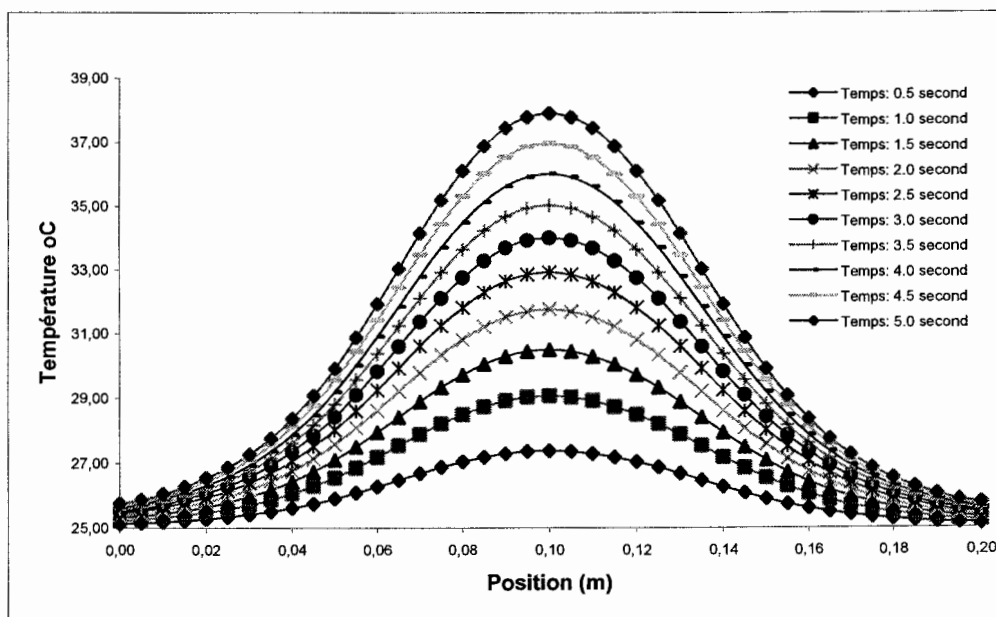
Finalement, les figures 35-37 illustrent l'évolution de la température à la face avant, milieu et arrière de la feuille, sur la trace centrale, pour différents temps. On remarque que



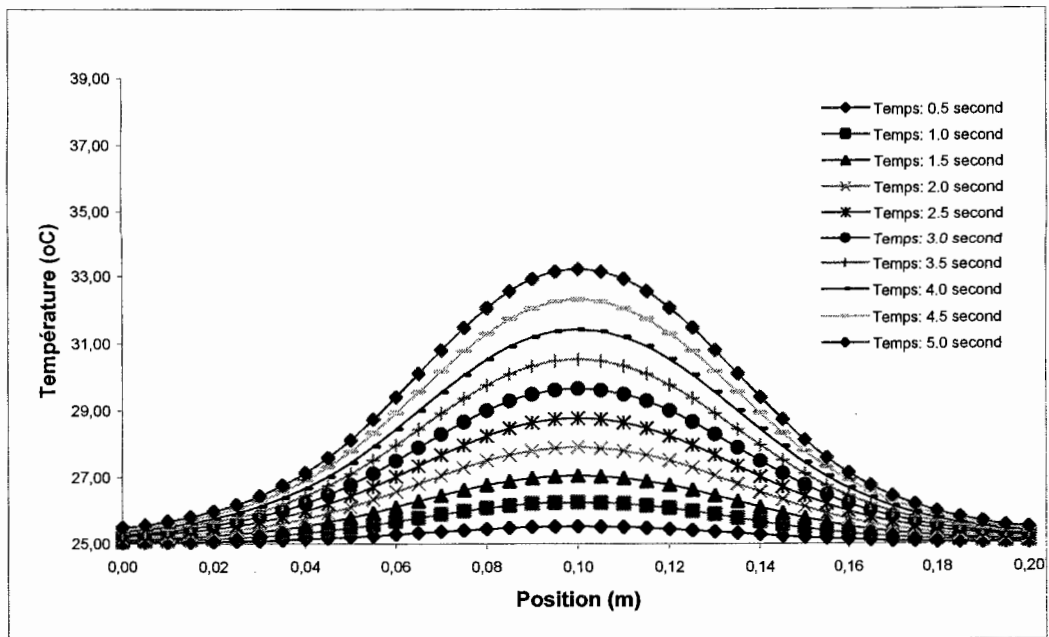
la face avant exposée à l'émetteur chauffe beaucoup plus vite que le milieu et la face arrière.



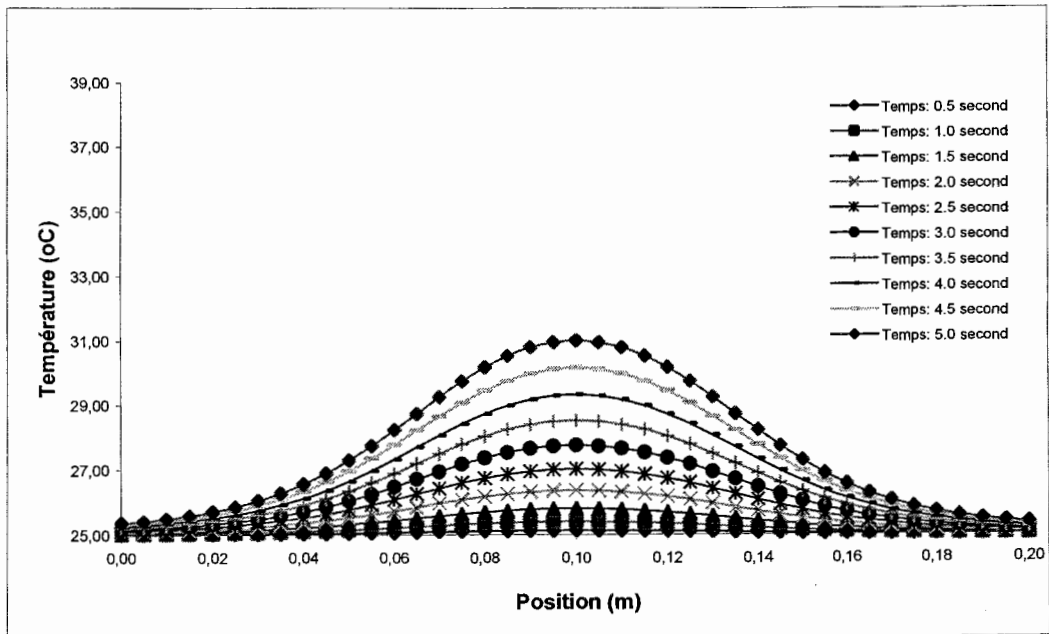
**Figure 34 :** Évolution de la température : face haut de la feuille PET



**Figure 35 :** Distribution transitoire surfacique de la température : face avant



**Figure 36:** Distribution transitoire surfacique de la température : milieu de la pièce



**Figure 37 :** Distribution transitoire surfacique de la température : face arrière

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, le problème de la modélisation numérique du transfert de chaleur par radiation infrarouge dans les membranes thermoplastiques minces, supposées semi-transparentes, a été traité. Pour cela, nous avons eu recours à la méthode des éléments finis 3D pour traiter l'équation de l'énergie. La formulation résultante intègre aussi bien l'effet d'absorption radiative que les pertes par convection. Des validations analytiques et expérimentales ont été effectuées.

Dans le chapitre I, une description de quelques caractéristiques des émetteurs infrarouges utilisés dans le domaine de thermoformage et de soufflage des pièces thermoplastiques a été faite. Ensuite, on a exposé, d'une part, les équations qui gouvernent le transfert de chaleur dans les matériaux semi-transparentes puis les méthodes numériques et probabiliste de calcul des facteurs de formes, d'autre part. La méthode de contour pour le calcul des facteurs de forme a été retenue.

Dans le chapitre II, la méthode des éléments finis tridimensionnelle a été utilisée pour modéliser l'équation de conservation de l'énergie. La formulation intégrale, la discrétisation spatiale et temporelle sont exposés. Pour tenir compte du caractère mince des membranes thermoplastiques, le transfert radiatif interne unidirectionnel est considéré. Ensuite, des validations numériques (3D et 1D) par rapport aux résultats analytiques dans le cas de chauffage classique et radiatif ont été effectuées.

Dans le chapitre III, une description d'un montage expérimental du chauffage infrarouge d'une membrane PET a été effectuée. Ensuite, une confrontation des résultats numériques 3D de la simulation avec ceux de l'expérimentation est présentée. Dans l'ensemble, les résultats numériques obtenus sont satisfaisants. Toutefois, la différence observée entre les résultats expérimentaux et numériques peut être expliquée par les hypothèses simplificatrices faites sur les propriétés thermophysiques du PET considérées comme indépendantes de la température. De plus, l'absorption dans le matériau s'effectuant selon la loi de Beer-Lambert, est supposée unidirectionnelle. Aussi, on a montré l'établissement d'un gradient constant de température entre la face avant et arrière de la feuille de PET lors du chauffage.

Finalement, la méthode présentée dans ce mémoire semble être prometteuse pour étudier les problèmes de chauffage infrarouge dans les secteurs de thermoformage et de soufflage des préformes thermoplastiques minces et semi-transparentes. En effet, les résultats des simulations numériques montrent bien que le recours à la loi de Beer-Lambert, pour le terme source radiatif, dans l'équation tridimensionnelle de la conservation d'énergie, n'affecte pas considérablement la précision des calculs, donc permet une économie de temps. Soulignons que ce terme source radiatif pourrait être modélisé en 3D par une méthode plus robuste, à savoir la méthode de zone ou la méthode des ordonnées discrètes. Cette dernière méthode est retenue pour la suite de nos travaux dans le domaine du chauffage infrarouge des préformes en PET. Toutefois, nos intérêts futurs dans le domaine

de la modélisation du transfert radiatif dans le matériau thermoplastique semi-transparent s'orientent vers deux aspects :

Au niveau de la modélisation numérique :

- Considérer l'effet de la température sur les propriétés thermophysiques du matériau.

Au niveau expérimental :

- Caractériser le comportement radiatif du PET vis-à-vis de la direction spatiale des émetteurs;
- Développer un montage expérimental pour les validations;
- Caractériser la transmittivité du PET en fonction de l'épaisseur.

## RÉFÉRENCES

- Andrieu, S., Schmidt F. & Le Maoult Y. 2004. Experimental and numerical infrared heating of thermoplastic sheet during thermoforming process. Polymer Processing Society 9 p. Cote: 994
- Ambirajan, A. & Venkateshan, S. P. 1993. Accurate determination of diffuse view factors between planar surfaces. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 36, no 8:
- Boeke, W. & Wall, L. 1976. Radiative exchange factors in rectangular spaces for the determination of mean radiant temperatures. Build. Serv. Engng., vol. 43: 244- 253.
- Bunyong, R. 2003. An Investigation of Initial Polymer Sheet Heating Processes During Intelligent Thermoforming. Thèse de doctorat, Lehigh University, 125 p.
- Chekhovskii, I.R., Sirotkin, V.V., Chu-Dun-Chu, Yu. V. & Chebanov, V.A., 1979. Determination of radiative view factors for rectangles of different sizes. High Temp., July.
- Chung, B.T.F. & Kermani, M.M., 1989. Radiation view factors from a finite rectangular plate. J. Heat Transfer, vol. 111: 115-117.
- Chung, T.J. & Kim, J.Y.. 1982. Radiation view factors by finite elements. ASME J. Heat Transfer, vol. 104.
- De Vriendt A. B. 1984. La transmission de la chaleur. Ed. Gaëtan Morin . Vol. 1, Tome 1. Chicoutimi, Québec.
- Dhatt G. & Touzot G. 1984. Une présentation de la méthode des éléments finis. Collection

Université de Compiègne, 2<sup>ième</sup> éd.

Duarte, F.M. & Covas, J.A. 2002. IR sheet heating in roll fed thermoforming Part 1 – Solving direct and inverse heating problems. *Plastics, Rubber and Composites*, vol. 31: 307.

Ehlert, J.R. & Smith, T.F. 1993. View Factors for Perpendicular and Parallel, Rectangular Plates. *J. Thermophys. Heat Trans.*, vol. 7: 173-174.

El Wakil, N. & Sacadura, J.F. 1992. Some improvements of the discrete ordinates method for the solution of the radiative transport equation in multidimensional anisotropically scattering media. *Radiative Heat Transfer, ASME HTD*, vol. 203: 119-127.

Erchiqui, F., A. Gakwaya, M. Souli, 2006. Non-isothermal Finite Element Analysis of Thermoforming of Polyethylene Terephthalat Sheet. South Africa, PPS-2006 Europe/Africa Meeting polymer Processing Society, CD-ROM proceedings, Section: Modeling and simulation, 9-13 October, 2006.

Esser, K., Haberstroh, E., Hüsgen, U. & Weinand, D. 1987. Infrared Radiation in the Processing of Plastics: Precise Adjustment-the Key to Productivity». *Advances in Polymer Technology*, vol.7: 89-128.

Feingold, A. 1966. Radiant-interchange configuration factors between various selected plane surfaces. *Proc. Roy. Soc. London, ser. A*, vol. 292: 51-60.

Gross, H. 1990. Methods for the Calculation of Heating Processes in Thermoplastic Semifinished Products. *Advances in Polymer Technology*, vol. 3.

Gross, U., Spindler, K., & Hahne, E. 1981. Shape factor equations for radiation heat

transfer between plane rectangular surfaces of arbitrary position and size with rectangular boundaries. Lett. Heat Mass Transfer, vol. 8: 219-227.

Hartwig, K. 1996. Simulation of the stretch-Blow molding process and characterization of the relevant material behaviour. Dissertation, RWTH, Aachen

Hottel, H. C. & Sarofim, A. 1967. Radiative Transfer. New-York, McGraw-Hill, Book Company 520 p.

Hottel, H.C. 1931. Radiant heat transmission between surfaces separated by non-absorbing media», Trans. ASME, vol. 53, FSP-53-196: 265-273.

Incropera F. P. & Dewitt D. P. 2001. Introduction to heat transfer. John Wiley Sons, New-York.

Kreith, F. 1959. Principles of heat transfer . International Textbook, Scranton.

Krishnaprakas, C.K. 1998. View-Factor evaluation by quadrature over triangles. J.Thermophysics, vol. 12, no. 1.

Lappin, J.F. & Martin, P.J. 1996. Sheet Temperature Measurement in Thermoforming. ANTEC'96, Society of Plastic engineers, p. 878-882.

Le Maoult, Y., Schmidt, F. & El Hafi M. 1997. Measurement and calculation of Preform infrared Heating. 4th International Workshop on advanced Infrared Technology and Application- Firenze, p,321, Sept.

Lebaudy P. 1989. Etude et simulation de la répartition des températures dans un cylindre creux de PET soumis à un rayonnement infrarouge. Université de Rouen.



Léontiev A. 1985. Théorie des échanges de chaleur et de masse. Ed MIR. Moscou

Lindenlaud C. 1982. Thermoformage. Techniques de l'Ingénieur, A3660.

Miyanağa, T. & Nakano, Y. 1990. Analysis of infrared radiation heating of plastic. Central Research Institute of Electric Power Industry Tokyo.

Modest, M. F., 2003, Radiative Heat Transfer, 2nd edition, Academic Press, New York, NY.

Monteix, S., Schmidt, F. et al. 2001. Experimental study and numerical simulation of perform or sheet exposed to infrared radiative heating. Journal of Materials Processing Technology, vol. 119: 90-97.

Myers, J., 1993. Closed-loop temperature scanners increase quality. Modern Plastics International, p, 20-22, December.

Pantakar, S.V., 1980. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Ed, McGraw-Hill, New York.

Rammohan, R. 1996. Efficient Evaluation of Diffuse View Factors for radiation», International Journal of Heat and Mass Transfer vol.39: 1281-1286.

Reddy, J. N. 1993. An introduction to the finite element method, McGraw-Hill, 2 edition.

Shapiro, A.B. 1985. Computer implementation, accuracy and timing of radiation view factor algorithms. J. Heat Transfer, vol. 107: 730-732.

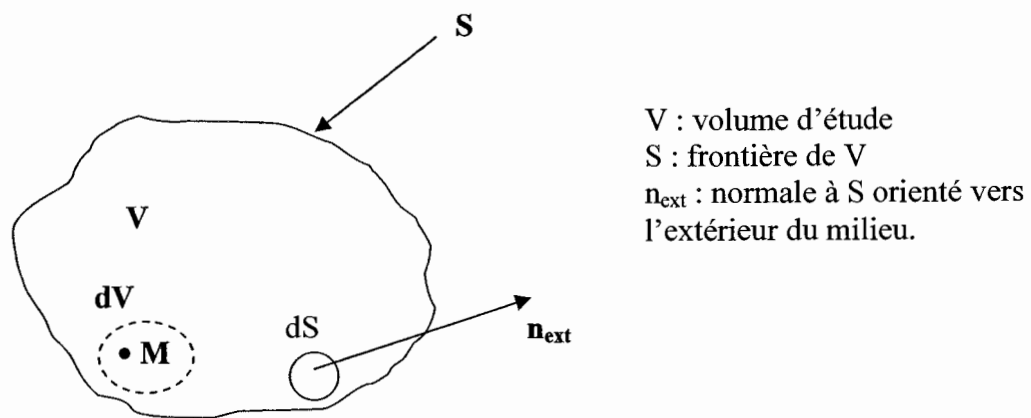
Shelby, M.D., 1991. Effects of Infrared Lamp Temperature and Other Variables on the Reheat Rate of PET. Proceedings of the Conference, ANTEC'91, pp. 1420-1424.

- Siegel, R. & Howel, J.R. 1992. Thermal Radiation Heat Transfer. 3 rd Ed Hemisphere/Taylor and Francis, Washington.
- Sparrow, E.M. 1963. A New and Simpler Formulation for Radiative Angle Factors. ASME Journal of heat Transfer, p.81.
- Taylor, C.A.D. & Kazmer, D.O. 1992. Experimental and numerical investigations of the vacuum-forming. Polymer Engineering and Science, 32(16), p. 1163-1173.
- Thrasher, M.A. 1996. Finite Element Modeling of Radiant Heating on Polymeric Materials. SPE ANTEC Tech. Papers, p. 854-857.
- Throne, J.L. 1996. Pattern Heating Polymer Sheet For Thermoforming (TF 501 & TF 505). Sherwood Technologies, Inc.: Hinckley, OH., 1996.
- Toor, J.S. & Viskanta, R., 1968. A numerical experiment of radiant heat interchange by the Monte Carlo method. Int. J. Heat Mass transfer, vol. 11.
- Venkateswaran, G., Cameron, M. R. & Jabarin, S. A. 1997. Effect of Temperature Profiles Trough Preform Thickness on the Properties of Reheat-Blown PET Containers. Advances in Polymer Technology, vol.17, no.3, p. 237-249.
- Vujicic, M.R., Lavery, N.P. & Brown S.G.R., 2005. View factor calculation using the Monte Carlo method numerical sensitivity. John Wiley and Sons, Ltd.
- Welch, T., 1993. Scanning IR Sensors In Plastics Thermoforming, in Sensors. p.28-31. August.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., 2000. Finite Element Method: Volume 1 - The Basis. Butterworth Heinemann, London, 2000, 712 pp.

## **ANNEXES**

## Annexe 1: Formulation de l'équation de conservation de l'énergie

Désignons par  $V$  un volume élémentaire, délimité par une surface  $S$ . Le volume  $V$  et sa frontière  $S$  seront considérés comme indéformables, fixes, continus et semi-transparentes



**Figure 1aA:** Élément de volume du milieu

Le milieu  $V$  absorbe et conduit une partie de l'énergie reçue du milieu extérieur. Sa température  $T$  évolue donc dans le temps et l'espace :  $T=T(r,t)$ . Il en est de même de la "densité de flux total de chaleur"  $Q_t(r,t)$ . Rappelons que, par définition de  $Q_t$ , la quantité de chaleur reçue par  $V$  à travers  $S$  par unité de temps, est égale à :

$$\int_S -Q_t \cdot n_{ext} dS \quad (1a)$$

Le milieu étant considéré comme indéformable, seule la variation locale de température intervient dans l'expression de la variation instantanée de l'énergie interne totale  $E$  du milieu. Par unité de temps, la quantité d'énergie thermique accumulée par le milieu par échauffement est donnée par :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_V C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dm = \int_V \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (2a)$$

avec

- $Q$  : la quantité de chaleur échangée par le milieu avec son environnement,  
 $\rho$  : la masse volumique du milieu,  
 $C$  : la chaleur spécifique du milieu supposée indépendante de la température.

L'application du premier principe de la thermodynamique au volume  $V$  conduit à écrire le bilan suivant lorsqu'il n'y a pas création d'énergie :

*Variation de l'énergie interne de  $V =$  flux traversant  $S$*

Soit (1a) = (2a) :

$$\int_V \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_S -Q_i \cdot n_{ext} dS \quad (3a)$$

Le bilan énergétique devient, après application de la formule d'Ostrogradsky (transformation de l'intégrale de surface en intégrale de volume) au membre de droite de (3a) :

$$\int_V \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_V -\text{div}(Q_i) \cdot n_{ext} dV \quad (4a)$$

soit en termes de bilan local au sein de V et par unité de volume :

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV + \text{div}(Q_t) = 0 \quad (5a)$$

(5a) est l'équation de conservation de l'énergie et  $Q_t$  désigne la densité de flux de chaleur totale.

On adopte comme hypothèse le transfert de chaleur simultané radiatif-conductif couplé et en absence de convection naturelle, ce qui revient à exprimer la densité de flux de chaleur totale  $Q_t$ , par:

$$Q_t = Q_r + Q_c \quad (6a)$$

où  $Q_r$  est la densité de flux radiatif totale absorbée par le matériau et  $Q_c$  désigne la densité de flux de chaleur par conduction, donnée par la loi de Fourier :

$$Q_c = -k \cdot \text{grad} T \quad (7a)$$

où k est la conductivité thermique du milieu. Il est indépendant de l'espace (substance homogène) et de la température (isotrope). La loi (7a) exprime que les flux de chaleur par conduction sont d'autant plus intenses que les écarts de température sont plus marqués, et qu'en outre la chaleur va des points chauds vers les points froids.

En assimilant la divergence du flux radiatif à un terme source locale  $S_r$ , l'équation (5a) s'écrit :

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k \cdot \text{grad} T) = S_r \quad (8a)$$

avec

$$S_r = -div(Q_r) \quad (9a)$$

La divergence du flux radiatif est d'un grand intérêt pratique car elle caractérise l'énergie radiative nette absorbée par le milieu. Elle représente, de ce fait, le terme source radiative que l'on retrouve dans l'équation de conservation de l'énergie (8a). Si ce terme est nul, le milieu est dit à l'équilibre radiatif.

L'équation (8a) en coordonnées cartésiennes tridimensionnelles s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = S_r(x, y, z) \quad (10a)$$

En posant :

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad ; \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad ; \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (11a)$$

L'équation (10a) s'écrit finalement :

$$-\left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + S_r(x, y, z) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12a)$$

## Annexe 2 : Établissement de l'expression du facteur de forme

Le flux de chaleur radiatif quittant une surface grise  $i$  et reçu par une surface grise  $j$  est donnée par :

$$dq_{i \rightarrow j} = I_i \cos \theta_i dA_i d\Omega_{i \rightarrow j} \quad (1b)$$

avec

$I_i$  : l'intensité radiative issue de la surface  $A_i$

$\Omega$  : l'angle solide sous lequel de la surface  $A_i$  on voit la surface  $A_j$  qui est donné par :

$$d\Omega_{i \rightarrow j} = \frac{\cos \theta_j}{r^2} dA_j \quad (2b)$$

$r$  : distance qui sépare un point appartenant à  $A_i$  et un autre point appartenant à  $A_j$ .

Les angles  $\theta_i$  et  $\theta_j$  sont formés respectivement par le vecteur  $r$  et les normales externes aux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  supposées être planes.

En substituant l'expression (2b) de l'angle solide dans (1b), on a :

$$dq_{i \rightarrow j} = I_i \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{r^2} dA_i dA_j \quad (3b)$$

Pour une surface qui émet et réfléchit des radiations de façon diffuse, l'intensité radiative est donnée en fonction de la radiosité  $J_i$  par l'expression suivante :

$$I_i = \frac{J_i}{\pi} \quad (4b)$$



L'équation (4b) dans (3b) permet d'écrire :

$$dq_{i \rightarrow j} = \frac{J_i \cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (5b)$$

En intégrant sur les surfaces  $A_i$  et  $A_j$  l'équation (5b) devient :

$$q_{i \rightarrow j} = J_i \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (6b)$$

On en déduit l'expression du facteur de forme comme le rapport de  $q_{i \rightarrow j}$  par  $A_i J_i$ , soit :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (7b)$$

$F_{ij}$  : le facteur de forme entre deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  représente le pourcentage d'énergie quittant  $A_i$  et atteignant  $A_j$ . Il s'exprime par :

**Propriétés :**

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad \text{Relation de réciprocité}$$

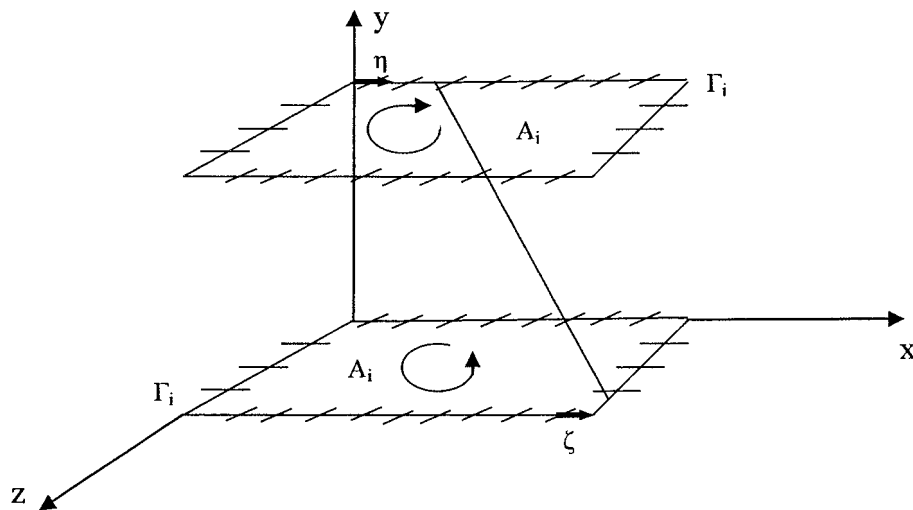
$$\Rightarrow F_{ji} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j$$

**Cas particulier :**

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad \text{Somme pour une enceinte fermée}$$

### Annexe 3 : Méthode numérique de calcul de facteur de forme selon la méthode d'intégration de contour

La méthode de contour permet d'obtenir l'expression des calculs de facteurs de forme sur les contours  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  des surfaces  $A_i$  et  $A_j$ .



**Figure 1aC :** Représentation de la discrétisation des contours des éléments pour les calculs des facteurs de forme

Pour déterminer l'expression du facteur de forme sous forme de contour, il suffit de transformer l'intégrale double simple par une intégrale de contour en utilisant le théorème de Stokes. Cette transformation permet d'écrire :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\Gamma_i \Gamma_j} \ln d \cdot d\vec{r}_i d\vec{r}_j \quad (1c)$$

En décomposant les intégrales sur chaque élément de contour défini par la succession de deux points (cas d'un contour ou approximation de contour rectiligne) :

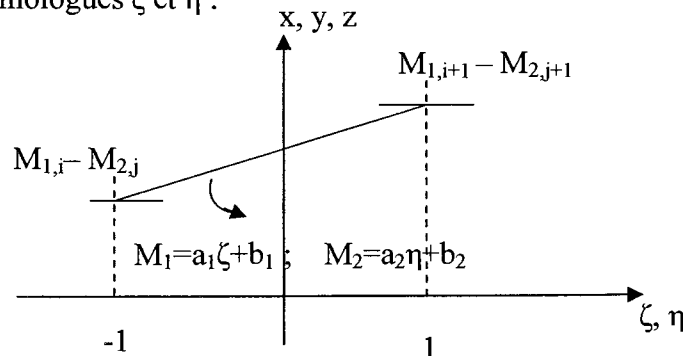
$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \int_{x_{1i}}^{x_{1,i+1}} \int_{x_{2j}}^{x_{2,j+1}} \ln d \cdot d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \int_{y_{1i}}^{y_{1,i+1}} \int_{y_{2j}}^{y_{2,j+1}} \ln d \cdot d\vec{y}_1 d\vec{y}_2 + \dots \right\} \quad (2c)$$

avec  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$N_1$  et  $N_2$  : représentent respectivement les nombres de segments avec lesquels on décompose les contours  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$ .

À partir de la succession de chaque couple de point pour la totalité des deux contours, on exprime dans un premier temps les coordonnées globales des points  $M_{1,i}$  ( $x_{1,i}$ ,  $y_{1,i}$ ,  $z_{1,i}$ ) dans un repère local  $\zeta$ ,  $\eta$ , afin de faire apparaître le formalisme relatif à la méthode de Gauss (Chung et Kim, 1982), dans lequel les variables  $\zeta$  et  $\eta$  représentent une description paramétrique des contours de chaque surface.

Cette transformation est définie par une transformation linéaire à partir de l'identification des coefficients  $a$  et  $b$  déterminés en fonction des coordonnées de chaque point et de leurs homologues  $\zeta$  et  $\eta$  :



**Figure 2aC** : Représentation de la transformation des coordonnées des contours des éléments pour les calculs des facteurs de forme

Ceci permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_{1,i+1} - x_{1,i}}{2} \zeta + \frac{x_{1,i+1} + x_{1,i}}{2} = a_{x1,i} \zeta + b_{x1,i} & x_2 &= \frac{x_{2,j+1} - x_{2,j}}{2} \eta + \frac{x_{2,j+1} + x_{2,j}}{2} = a_{x2,j} \eta + b_{x2,j} \\ y_1 &= \frac{y_{1,i+1} - y_{1,i}}{2} \zeta + \frac{y_{1,i+1} + y_{1,i}}{2} = a_{y1,i} \zeta + b_{y1,i} & y_2 &= \frac{y_{2,j+1} - y_{2,j}}{2} \eta + \frac{y_{2,j+1} + y_{2,j}}{2} = a_{y2,j} \eta + b_{y2,j} \\ z_1 &= \frac{z_{1,i+1} - z_{1,i}}{2} \zeta + \frac{z_{1,i+1} + z_{1,i}}{2} = a_{z1,i} \zeta + b_{z1,i} & z_2 &= \frac{z_{2,j+1} - z_{2,j}}{2} \eta + \frac{z_{2,j+1} + z_{2,j}}{2} = a_{z2,j} \eta + b_{z2,j} \end{aligned}$$

L'expression du calcul de facteur de forme devient:

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (a_{x1,i} \cdot a_{x2,j}) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln d(\xi, \eta) \cdot d\xi d\eta + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (a_{y1,i} \cdot a_{y2,j}) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln d(\xi, \eta) \cdot d\xi d\eta + \dots \right\} (3c)$$

avec

$$d = \sqrt{[(a_{x2,j} \eta + b_{x2,j}) - (a_{x1,i} \zeta + b_{x1,i})]^2 + [(a_{y2,j} \eta + b_{y2,j}) - (a_{y1,i} \zeta + b_{y1,i})]^2 + \dots}$$

La résolution numérique des intégrations par la méthode de Gauss permet d'écrire finalement l'équation (3c) sous la forme :

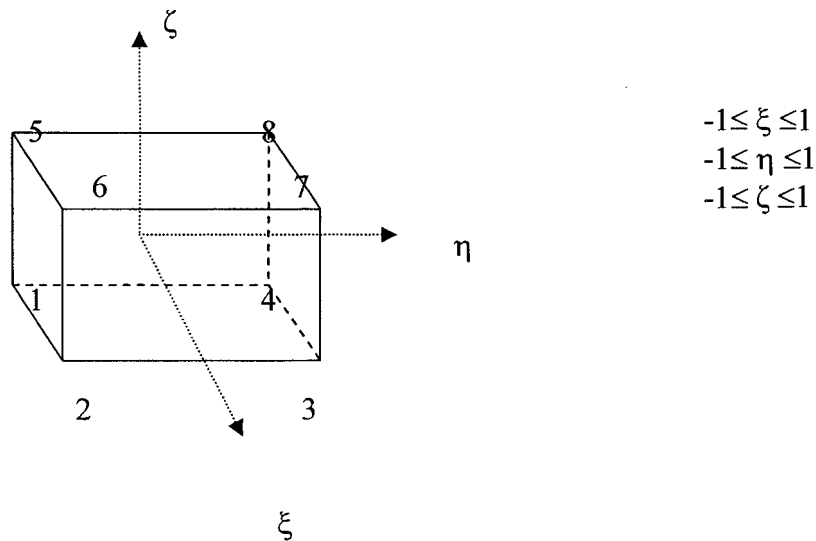
$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (a_{x1,i} \cdot a_{x2,j} + a_{y1,i} \cdot a_{y2,j} + a_{z1,i} \cdot a_{z2,j}) \right\} \left\{ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q W^k W^l \ln(d(\xi, \eta)) \right\} (4c)$$

Les coefficients  $a_{1,i-2,j}$  expriment les transformations spatiales des coordonnées globales des points des contours  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  vers les coordonnées locales de Gauss et les coefficients  $W$  les poids de Gauss compris entre  $p$  et  $q$ .

### Annexe 4 : Caractéristiques du maillage par éléments finis 3D

La première étape d'une analyse par éléments finis consiste à définir un maillage du domaine en éléments finis. À chaque élément fini est associé un certain nombre de nœuds. Le choix du nombre de nœuds de chaque élément est lié au choix d'un schéma d'interpolation.

On adopte, dans notre mise en œuvre, des éléments finis hexaédriques à huit nœuds. L'élément de référence est donné par le schéma suivant :



**Figure 1aD** : Schématisation d'un élément de référence

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta)
 \end{aligned}$$

Ou bien par  $\langle N \rangle = \left\langle \frac{1}{8}(1-\xi\xi_i) \cdot (1-\eta\eta_i) \cdot (1-\zeta\zeta_i) \quad i=1,8 \right\rangle$

Où  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  sont les coordonnées du nœud  $i$  dans l'élément de référence.

Par contre les éléments réels sont schématisés dans la figure 1aD. Et leurs coordonnées nodales sont données par une interpolation isoparamétrique :

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{j=1}^8 x_j N_j(\xi, \eta, \zeta) \\
 y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{j=1}^8 y_j N_j(\xi, \eta, \zeta) \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{j=1}^8 z_j N_j(\xi, \eta, \zeta)
 \end{aligned}$$

## Annexe 5 : Transformation des intégrales dans l'élément de référence

### Transformation de l'intégrale sur le volume

On fait intervenir la transformation bijective de l'espace réel à l'espace de référence en 3D écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} = [J]^T \cdot \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix}$$

Avec  $[J]$  est la matrice jacobienne de transformation donnée pour notre cas par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} A_i x_i & A_i y_i & A_i z_i \\ B_i x_i & B_i y_i & B_i z_i \\ C_i x_i & C_i y_i & C_i z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_i = \xi_i \cdot (1 + \eta \eta_i) \cdot (1 + \zeta \zeta_i) ; \quad B_i = \eta_i \cdot (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 + \zeta \zeta_i) ; \quad C_i = \zeta_i \cdot (1 + \eta \eta_i) \cdot (1 + \xi \xi_i)$$

Ce qui permet de résoudre aisément les intégrales de la forme :

$$\int_{\Omega} (\dots) dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\dots) J \, d\xi d\eta d\zeta \quad \text{avec } J = |\det[J]|$$

$$J = J_{11} (J_{22} J_{33} - J_{32} J_{23}) + J_{21} (J_{31} J_{13} - J_{11} J_{33}) + J_{31} (J_{12} J_{23} - J_{22} J_{13})$$

### Transformation de l'intégrale sur le bord du domaine

Supposons que l'on impose une température  $T_0$  à la surface du haut de l'élément de référence et un échange convectif avec le milieu ambiant sur la surface du bas. Ces surfaces correspondent respectivement aux valeurs  $\zeta = +1$  et  $\zeta = -1$  dans l'élément de référence. Ce qui permet de transformer les intégrales de surface de l'élément réel à l'élément de référence par :

$$\int_{\Gamma_e} (\dots) ds = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\dots) J(\xi, \eta, \zeta = \pm 1) \, d\xi d\eta \quad \text{avec } J = |\det[J]|$$



**Annexe 6 : Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D  
transitoire à travers une plaque plane infinie**  
(Léontiev, 1985)

Considérons l'équation unidimensionnelle de la conduction thermique d'une plaque indéfinie d'épaisseur  $2\delta$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1f)$$

Où

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C} \quad (2f)$$

Avec :

T : la température

t : le temps

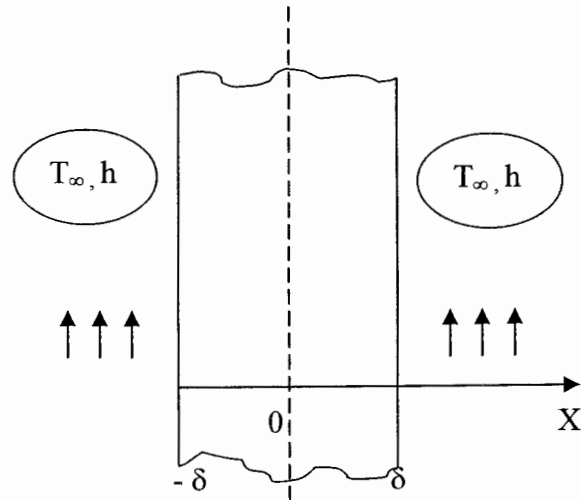
x : paramètre d'espace suivant l'axe X

$\alpha$  : la diffusivité du matériau

$\lambda$  : la conductivité

$\rho$  : la densité

C : la chaleur spécifique



**Figure 1aF:** Chauffage d'une plaque plane infinie

Avec les conditions aux limites de Newton (conditions aux limites de troisième genre) qui traduisent l'échange de chaleur par convection sur les surfaces exposées données par :

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right| = -h(T - T_\infty) \quad (3f)$$

Avec :

$\lambda$  : la conductivité.

$h$  : le coefficient de convection associé aux pertes de chaleur avec le milieu ambiant.

$T_\infty$  : la température ambiante.

La plaque à l'instant initial ayant une température uniforme  $T_0$  est plongée dans un courant de fluide à la température  $T_f \neq T_0$ .

On pose :

$$\theta(x,t) = T_f - T \quad (4f)$$

En utilisant le changement de variable de (4f), l'équation (1f) peut s'écrire:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5f)$$

Les conditions aux initiales s'écriront alors :

$$\begin{cases} A & t = 0, & \theta = \theta_0 = T_f - T_0 \\ A & t = \infty, & \theta = T_f - T_f = 0 \end{cases} \quad (6f)$$

Sachant que dans le courant de fluide;  $T_\infty = T_f$  et en tenant compte de la symétrie de la plaque, on tiendra compte également de la symétrie du champ thermique qui se traduit par le flux nul au centre de la plaque. On étudie donc notre domaine de  $x=0$  à  $x=\delta$ .

Les conditions aux limites s'écriront alors :

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = -h\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (7f)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables on a :

$$\theta(x,t) = F(x) \cdot G(t) \quad (8f)$$

En remplaçant  $\theta$  par son expression de (8f) dans (5f) on a :

$$F(x) \cdot \frac{\partial G(t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \cdot G(t) \quad (9f)$$

En séparant les variables, on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{G'}{G} = \frac{F''}{F} \quad (10f)$$

$$\text{Avec : } F'' = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \dot{G} = \frac{\partial G(t)}{\partial t}$$

Sachant que  $\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\dot{G}}{G}$  ne dépend pas de  $x$  et  $\frac{F''}{F}$  ne dépend pas de  $t$ , on en déduit que leur valeur totale ne dépend ni de  $x$  ni de  $t$ . Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\dot{G}}{G} = \text{constante} \\ \text{et} \\ \frac{F''}{F} = \text{constante} \end{cases} \quad (11f)$$

Les conditions initiales (6f) entraînent que lors de l'échauffement de la plaque,  $\frac{\partial \theta}{\partial t} < 0$  et

donc également  $\dot{G} < 0$  par conséquent la constante dans (11f) est négative.

Dans le cas du refroidissement de la plaque :  $T_f > T_0$ , le signe de la constante est la même.

On la pose:

$$\text{Constante} = -k^2 \quad (12f)$$

L'équation (11f) se traduit par deux équations différentielles qui se résolvent tenant compte des conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{G} + \alpha \cdot k^2 \cdot G = 0 \quad \Rightarrow G(t) = C_{00} e^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} \\ \text{et} \\ F'' + k^2 \cdot F = 0 \quad \Rightarrow F(x) = C_{01} \sin(k \cdot x) + C_{02} \cos(k \cdot x) \end{array} \right. \quad (13f)$$

Avec  $C_{00}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{02}$  les constantes d'intégrations.

D'où la forme générale de la solution :

$$\theta(x, t) = C_0 e^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} [C_{01} \sin(k \cdot x) + C_{02} \cos(k \cdot x)]$$

Ou en réunissant les constantes :

$$\theta(x, t) = e^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} [C_1 \sin(k \cdot x) + C_2 \cos(k \cdot x)] \quad (14f)$$

Les conditions aux limites (7f) donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = k \cdot C_1 \cdot \exp^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\delta} = [-k \cdot C_2 \cdot \sin(k \cdot \delta)] \cdot \exp^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} = -\frac{h}{\lambda} \theta_\delta = -\frac{h}{\lambda} \cdot [C_2 \cdot \cos(k \cdot \delta)] \cdot \exp^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} \end{array} \right. \quad (15f)$$

En réduisant les deux membres de l'égalité par  $B \cdot e^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t}$ , on aboutit à l'équation transcendante ou caractéristique de la détermination de la constante k :

$$\cot g(k \cdot \delta) = \frac{\lambda \cdot k}{h} = \frac{k \cdot \delta}{Bi} \quad (16f)$$

Avec  $Bi = \frac{h \cdot \delta}{\lambda}$  le nombre de Biot (17f)

On pose :

$$n = k \cdot \delta \quad (18f)$$

Ce qui permet de réécrire l'équation transcendante :

$$\cot g(n) = \frac{n}{Bi} \quad (19f)$$

Cette équation transcendante régit les valeurs propres admissibles pour n et se résout graphiquement en cherchant les points d'intersection de la droite  $y_1 = \frac{n}{Bi}$  et la droite  $y_2 = \cot g(n)$ .

- Pour  $Bi \rightarrow 0$  la droite  $y_1 = \frac{n}{Bi}$  coïncide avec l'axe des abscisses, et les racines de l'équation (19f) ont les valeurs :

$$n_i = (i-1) \pi. \quad (20f)$$

(avec i : un entier)

- Pour  $Bi \rightarrow \infty$  la droite  $y_1 = \frac{n}{Bi}$  coïncide avec l'axe des ordonnées et les valeurs propres deviennent :

$$n_i = (2i-1) \pi/2. \quad (21f)$$

$C_2=0$  est une solution triviale pour l'équation (14f).

Donc l'expression du champ de la température excédentaire est de la forme :

$$\theta(x,t) = C_2 \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \exp^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} \quad (22f)$$

Partant de l'équation (22f), chaque valeur du nombre propre  $n_i$  conduit aux solutions partielles.

La solution générale de l'équation différentielle (5f) se calcule comme la somme des solutions partielles.

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \exp^{-\alpha \cdot k^2 \cdot t} \quad (23f)$$

En utilisant la relation de (18f) :  $n = k \cdot \delta$  on a :

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp^{-\alpha \cdot \frac{n_i^2}{\delta^2} \cdot t} \quad (24f)$$

On pose:  $Fo = \frac{\alpha \cdot t}{\delta^2}$  le nombre de Fourier.

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp^{-n_i^2 Fo} \quad (25f)$$

Les constantes  $C_i$  sont obtenues à partir de la condition initiale :

$$\theta(x,0) = \theta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \quad (26f)$$

Soit de manière équivalente :

$$\underbrace{\int_0^\delta \theta_0 \cos\left(n_j \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx}_{\theta_0 \cdot \delta \cdot \frac{\sin(n_j)}{n_j}} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \underbrace{\int_0^\delta \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(n_j \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx}_{\begin{cases} =0 & \text{si } j \neq i \text{ entiers} \\ =\frac{1}{2} \delta \left[1 + \frac{\sin(2n_j)}{2n_j}\right] & \text{si } j=i \end{cases}} \quad (27f)$$

$$\Rightarrow C_i = \frac{2\theta_0 \sin(n_i)}{n_i + \sin(n_i)\cos(n_i)} \quad (28f)$$

En portant (28f) dans (25f), on obtient l'expression définitive pour le champ thermique de la plaque homogène chauffée symétriquement :

$$\theta = \theta_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\sin(n_i)}{n_i + \sin(n_i)\cos(n_i)} \cdot \cos\left(n_i \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp^{-n_i^2 Fo} \quad (29f)$$

**Annexe 7 : Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D  
appliquée au cas du solide semi-infini diathermane  
(Monteix et al, 2001)**

Il s'agit de résoudre l'équation de la chaleur sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Aq_o^n e^{-Az}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$T(z, t = 0) = T_{ini}; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = 0; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(z, t) = T_{ini}$$

On adopte le changement de variable :

$$\theta(z, t) = T(z, t) - T(z, t = 0) + \frac{q_o^n e^{-Az}}{k \cdot A}$$

Ce qui donne l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Que l'on peut résoudre en utilisant les transformées de Laplace sur la variable temporelle;

$$L[\theta(z, t)] = \bar{\theta}(z, p)$$

Dans l'espace de Laplace l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{\theta} = -\frac{q_o^n e^{-Az}}{\alpha k A}$$



La solution est de la forme :

$$\bar{\theta}(z, p) = \bar{\theta}_1(z, p) + \beta e^{-AZ}$$

La substitution de cette solution dans l'équation précédente fait apparaître une équation en  $\bar{\theta}_1$ .

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_1}{dz^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{\theta}_1 = -e^{-AZ} \left[ \frac{q_o''}{\alpha k A} + \beta \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) \right]$$

La condition pour laquelle cette équation admet une solution sans second membre permet d'identifier la variable  $\beta$  par

$$\beta = - \left[ \frac{q_o''}{\alpha k A \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} \right]$$

Et de disposer d'une équation en  $\bar{\theta}_1$  sans second membre qui admet une solution triviale et permet finalement d'obtenir une solution pour  $\bar{\theta}$  :

$$\bar{\theta}(z, p) = K e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} z} + \beta e^{-AZ}$$

Les conditions aux limites par rapport à  $\theta$  :

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{q_o''}{k}$$

sont exprimées dans l'espace de Laplace par :

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{q_o''}{kp} = -k\sqrt{\frac{p}{\alpha}} - \beta A$$

Cette égalité permet d'identifier l'expression de la constante d'intégration K, et de formuler la solution en  $\bar{\theta}$  par :

$$\bar{\theta}_1(z, p) = \frac{q_o''}{kpq} e^{-qz} + \frac{q_o''}{k\alpha \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right) q} e^{-qz} - \frac{q_o''}{k\alpha A \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right)} e^{-AZ} \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{\frac{p}{\alpha}} z$$

La solution finale de l'équation exprimée dans l'espace (z, t) est obtenue par transformée inverse de ces trois termes qui sont traités séparément :

- L'identification de la transformée inverse du deuxième terme n'est pas apparente sous cette forme et il est nécessaire de la décomposer en fraction rationnelle selon :

$$\frac{q_o''}{k\alpha \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right) q} e^{-qz} = -\frac{q_o'' e^{-AZ}}{k\alpha} \left[ \frac{A}{(A+q)q} + \frac{B}{(A-q)q} \right]$$

$$\text{Par identification on obtient : } A = B = \frac{1}{2A}$$

Finalement pour identifier la transformée inverse, on écrit ce terme de la façon suivante :

$$\frac{q_o''}{k\alpha \left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right) q} e^{-qz} = \frac{q_o'' e^{-\sqrt{p}\frac{z}{\alpha}}}{2k\alpha (A\sqrt{\alpha} + \sqrt{p})\sqrt{p}} - \frac{q_o'' e^{-\sqrt{p}\frac{z}{\alpha}}}{2k\alpha (A\sqrt{\alpha} - \sqrt{p})\sqrt{p}}$$

En identifiant  $a = \pm A\sqrt{\alpha}$  et  $k' = \frac{z}{\sqrt{\alpha}}$  cette expression admet une transformée

(DeVriendt, 1984) donné par :

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0''}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = e^{ak'} e^{a^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right)$$

- Les premiers et derniers termes exprimant la solution  $\bar{\theta}$  sont plus simples à inverser puisque directement identifiables par une transformée classique par :

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0''}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = e^{ak'} e^{a^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right)$$

$$L^{-1} \left[ \frac{-q_0'' e^{-AZ}}{k\alpha A \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} \right] = \frac{q_0'' e^{-\alpha A^2 t} e^{-AZ}}{kA}$$

$$L^{-1} \left[ \frac{-q_0'' e^{-AZ}}{k} \frac{1}{pq} \right] = \left( \frac{q_0''}{k} \right) 2\sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

En utilisant les propriétés des fonctions erf tel que :

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad \text{et} \quad -\operatorname{erf}(z) = 1 - \operatorname{erf}(-z)$$

On obtient finalement l'expression de  $\theta$ , en fonction de  $z$  et de  $t$  par :

$$\begin{aligned} \theta(z,t) = T(z,t) - T_{mi} + \frac{q_0'' e^{-Az}}{kA} &= Aq_0'' \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \\ &+ \frac{q_0''}{2k} e^{A^2 \alpha t + Az} \operatorname{erfc} \left( A\sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \\ &+ \frac{q_0''}{2k} e^{A^2 \alpha t - Az} \operatorname{erfc} \left( A\sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(z, t) = & T_{mi} - \frac{q_o''}{kA} e^{-Az} + Aq_o'' \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ & + \frac{q_o''}{2k} e^{A^2 \alpha t + Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ & + \frac{q_o''}{2k} e^{A^2 \alpha t - Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \end{aligned}$$

## Annexe 8 : Équation de transfert radiative (ETR)

(Modest, 2003)

### 1- Intensité radiative pour un milieu absorbant la radiation

$$(dI)_{abs} = -A I dr \quad (1h)$$

$$\Rightarrow I(r) = I(0) \exp\left(-\int_0^r A dr\right)$$

$$\Rightarrow I(r) = I(0) e^{-\tau} \quad (2h)$$

A : Coefficient d'absorption

r : trajectoire parcourue par la radiation dans le milieu considéré

$\tau$  : Épaisseur optique pour l'absorption s'exprime par :

$$\tau = \int_0^r A dr \quad (3h)$$

On définit également l'absorptivité par :

$$\alpha_{abs} \equiv \frac{I(0) - I(r)}{I(0)} = 1 - e^{-\tau} \quad (4h)$$

Si le coefficient d'absorption A est constant le long de la trajectoire r alors :

$$\tau = A \cdot r \quad (5h)$$

$$\Rightarrow I(r) = I(0) e^{-Ar} \quad (6h)$$

## 2- Intensité radiative pour un milieu émettant la radiation

$$(dI)_{em} = A I_b dr \quad (7h)$$

$I_b$  : intensité radiative d'un corps noir

$$I_b = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (8h)$$

Pour un corps émettant et absorbant :

$$\frac{dI}{dr} = A(I_b - I) \quad (9h)$$

$$\Rightarrow I(r) = I(0) e^{-\tau} + I_b(1 - e^{-\tau}) \quad (10h)$$

Le premier terme caractérise l'atténuation de l'intensité radiative due à l'absorption dans le milieu traversé et le second terme l'augmentation de l'intensité radiative due à l'émission radiative.

Si seule l'émission est considérée alors  $I(0) = 0$ . Dans ce cas :

$$I(r) = I_b(1 - e^{-\tau}) \quad (11h)$$

On en déduit l'émissivité par :

$$\varepsilon = \frac{I(r)}{I_b} = 1 - e^{-\tau} \quad (12h)$$

### 3- Intensité radiative pour un milieu dissipant la radiation

On distingue deux types de dispersion d'énergie radiative :

- l'atténuation par dispersion externe et
- l'augmentation par dispersion interne

L'atténuation de l'intensité radiative par dispersion externe s'exprime par :

$$(dI)_{disp-ext} = -\sigma_s I dr \quad (13h)$$

$\sigma_s$  : Coefficient de dispersion

L'atténuation totale de l'intensité radiative moyenne due à l'absorption et la dispersion dans le milieu est appelée extinction

$$\beta = A + \sigma_s \quad \text{Coefficient d'extinction} \quad (14h)$$

L'augmentation de la radiation due à la dispersion (interne) s'exprime par :

$$(dI)_{disp-int}(\hat{r}) = dr \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{r}_i) \Phi(\hat{r}_i, \hat{r}) d\Omega_i \quad (15h)$$

Cette équation exprime l'intensité radiative dans la direction  $\hat{r}$  de toutes les radiations issues des directions  $\hat{r}_i$ .

Avec

$\Phi(\hat{r}_i, \hat{r})$  : La fonction phase de dispersion. Elle décrit la probabilité que la radiation provenant de la direction  $\hat{r}_i$  soit dispersée dans une autre direction  $\hat{r}$ .

#### 4- Équation de transfert radiative (ETR)

La variation de l'intensité radiative dans un milieu est la somme de la contribution issue de l'émission, l'absorption et la dispersion à partir d'une direction  $\hat{r}$  et de la dispersion vers une direction  $\hat{r}$  (1h), (7h), (13h), (15h)

$$I(r + dr, \hat{r}, t + dt) - I(r, \hat{r}, t) = AI_b(r, t) dr - AI(r, \hat{r}, t) dr - \sigma_s I(r, \hat{r}, t) dr + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{r}_i) \Phi(\hat{r}_i, \hat{r}) d\Omega_i dr \quad (16h)$$

En effectuant un développement en série de Taylor on a :

$$I(r + dr, \hat{r}, t + dt) = I(r, \hat{r}, t) + dt \frac{\partial I}{\partial t} + dr \frac{\partial I}{\partial r} \quad (17h)$$

L'équation (16h) s'écrira alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial r} = AI_b - AI - \sigma_s I + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{r}_i) \Phi(\hat{r}_i, \hat{r}) d\Omega_i \quad (18h)$$

Avec  $c = \frac{dr}{dt}$  : la vitesse avec laquelle l'intensité radiative se propage.

En négligeant le terme transitoire, on suppose le régime permanent, l'équation (18h) devient :

$$\frac{dI}{dr} = \hat{r} \cdot \nabla I = AI_b - AI - \sigma_s I + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{r}_i) \Phi(\hat{r}_i, \hat{r}) d\Omega_i \quad (19h)$$

Cette équation représente l'équation de transfert radiative.

Elle est souvent donnée sous la forme adimensionnelle en fonction des coordonnées optiques :



$$\tau = \int_0^r (A + \sigma) dr = \int_0^r \beta dr \quad (20h)$$

On définit la dispersion simple Albédo par :

$$\omega \equiv \frac{\sigma}{A + \sigma} = \frac{\sigma}{\beta} \quad (21h)$$

L'équation (19h) devient :

$$\frac{dI}{d\tau} + I = (1 - \omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{r}_i) \Phi(\hat{r}_i, \hat{r}) d\Omega_i \quad (22h)$$

Ou

$$\frac{1}{\beta} \nabla \cdot I + I = (1 - \omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{r}_i) \Phi(\hat{r}_i, \hat{r}) d\Omega_i \quad (23h)$$