

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

CONTRÔLE LINÉAIRE ET NON-LINÉAIRE
D'UN ROBOT À UN BRAS FLEXIBLE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR

MAYEZ DANDACHLI

Mai 2019



BIBLIOTHÈQUE

Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue obtained the permission of the author to use a copy of this document for non-profit purposes in order to put it in the open archives Depositum, which is free and accessible to all.

The author retains ownership of the copyright on this document. Neither the whole document, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

Remerciement

Avant tout, je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon conseiller, le professeur Mohamad Saad, pour son soutien et ses conseils continus pendant la durée de ma maîtrise, ce fut un grand plaisir de travailler avec vous. Je tiens aussi à remercier mon co-directeur Prof. Walid Ghié pour sa gentillesse et sa compréhension et pour son soutien sans fin. Je n'aurais pas pu imaginer avoir un meilleur codirecteur pour mon étude de maîtrise. Je voudrais spécialement remercier ma famille et mes amis d'être toujours à côté de moi et de m'encourager durant la période de mes études. En particulier, je voudrais remercier ma mère, Faika El-Mourad et mon père Imad Dandachli pour être les personnes les plus solidaires, aimant et motivant que je n'ai jamais connu. Ils poussent vraiment au-delà de toutes les limites que je pensais ne jamais pouvoir atteindre. Je voudrais aussi remercier mon oncle Prof. Walid EL-Mourad pour ses conseils et son aide non limités, je ne pouvais certainement pas faire cela sans toi.

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction et revue de la littérature	1
1.1. Introduction	1
1.2. Revue de la littérature.....	3
1.2.1. Modélisation du système	3
1.2.2. Observateur d'états non mesurables.....	4
1.2.3. Contrôle	5
1.3. Problématique.....	7
1.4. Objectifs	7
1.5. Organisation.....	8
Chapitre 2 : Modélisation du système	9
2.1. Description du système	9
2.2. Modélisation du servomoteur.....	12
2.3. Modélisation du bras flexible	16
2.3.1. Fonction de transfert	24
2.3.2. Zéros et pôles.....	24
2.4. Modèle non-linéaire.....	25
2.5. Conclusion.....	26
Chapitre 3 : Observateur à gain élevé.....	27
3.1. L'observateur à gain élevé.....	29
3.2. Conclusion.....	36

Chapitre 4: CONTRÔLEUR LINÉAIRE.....	38
4.1. Commande optimale (contrôle linéaire-quadratique)	38
4.2. Simulation	43
4.3. Expérimentation	48
4.4. Conclusion.....	51
Chapitre 5 : CONTRÔLEUR NON-LINÉAIRE	52
5.1. Commande par mode de glissement	52
5.2. Simulation	59
5.3. Expérimentation	65
5.4. Conclusion.....	68
CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES.....	68

LISTE DES FIGURES

Figure 1: Montage du bras flexible	10
Figure 2: Description du montage.....	10
Figure 3: Configurations du servomoteur	11
Figure 4: Circuit d'induit du moteur.....	12
Figure 5: Schéma block du servomoteur SRV02.....	15
Figure 6: Schéma du bras flexible en rotation dans le plan horizontal	17
Figure 7: Schéma block du système contrôlé.....	43
Figure 8: Implémentation du modèle en boucle fermée dans Matlab/Simulink.	44
Figure 9: Vue détaillé du ‘High-Gain-Observer’	45
Figure 10: Position du bras flexible contrôlé par LQR-Simulation	46
Figure 11: Les résultats de l’observateur à gain élevé-Simulation.	47
Figure 12: Montage pratique-LQR	48
Figure 13: Position de l’extrémité du bras-Pratique	49
Figure 14: Les résultats de l’observateur à gain élevé-Pratique	50
Figure 15: Surface de glissement	53
Figure 16: Les différentes phases de la commande par mode de glissement.....	57
Figure 17: Schéma bloc du système contrôlé.....	59
Figure 18: Implémentation du modèle contrôlé dans Matlab/Simulink.....	60
Figure 19: Vue détaillé du ‘Modèle non-linéaire’.....	61
Figure 20: Vue détaillé du contrôleur ‘SLD’	62
Figure 21: Position de l’extrémité du bras contrôlé par mode glissante-Simulation	63
Figure 22: Les paramètres d’état et leurs estimés-simulation.....	64
Figure 23: Montage pratique-SLD.....	65
Figure 24: Position de l’extrémité du bras-Pratique	66
Figure 25: Les résultats de l’observateur à gain élevé-Pratique	67

LISTES DES TABLEAUX

Tableau 1 : Les valeurs numériques des paramètres du bras	18
Tableau 2 : Paramètres du robot flexible	23

RÉSUMÉ

L'utilisation progressive des manipulateurs robotiques dans diverses applications durant ces dernières années a été motivée par les exigences de l'automatisation industrielle. Ces manipulateurs peuvent être classés en deux types : rigides et flexibles, mais l'attention est portée sur les manipulateurs flexibles. Cela est dû aux divers avantages que ces manipulateurs offrent par rapport à leurs homologues rigides, par exemple leurs poids légers, leurs grandes vitesses ainsi que leurs précisions. Mais au contraire des manipulateurs rigides, là où la connaissance de l'angle du moteur permet de savoir la position de l'extrémité du bras, la flexibilité de la membrure flexible provoque des oscillations lors de la rotation de la base ce qui rend le contrôle de son extrémité plus difficile que celui des robots rigides. D'où l'importance de développer une loi de commande qui permet à l'extrémité du bras d'atteindre son angle désiré tout en réduisant les oscillations. Ceci constitue l'objectif global de notre travail. Pour atteindre notre objectif, il faut commencer tout d'abord par modéliser le système du manipulateur flexible qui est constitué d'un bras flexible alimenté par un moteur à courant continu. Ensuite il s'agit de développer des lois de contrôle qui permettent de contrôler l'extrémité du bras en minimisant sa déformation. Enfin, ces lois de contrôle sont testées sur le montage physique.

ABSTRACT

The progressive use of robotic manipulators in various applications in recent years has been driven by the demands of industrial automation. These manipulators can be classified into two types: rigid and flexible, but attention is focused on flexible manipulators. This is due to the various advantages that these manipulators offer compared to their rigid counterparts, for example their light weights, their high speeds as well as their accuracy. Unlike rigid manipulators, where the knowledge of the motor angle allows to know the position of the end of the arm, the flexibility of the flexible arm causes oscillations during the rotation of the base which makes the control of its end more difficult than that of rigid robots. Hence the importance of developing a control law that allows the end effector to reach its desired angle while minimizing the oscillations. This is the overall goal of our work. To mitigate our objective, we must first begin to model the flexible manipulator system which consists of a flexible arm driven by a DC motor. Then, develop control laws that control the end of the arm by minimizing its deformation. Finally, these control laws are tested on the physical assembly.

Chapitre 1

Introduction et revue de la littérature

1.1. Introduction

Les robots sont utilisés pour aider dans les tâches dangereuses, monotone, et répétitifs d'emplois. La majorité des bras robotisés sont fabriqués de manière à maximiser la rigidité pour essayer de réduire la vibration dans le but d'obtenir une bonne précision du positionnement. Cette haute rigidité existe à cause de l'utilisation du matériel lourd ou d'un gros design. Par conséquent, les robots rigides ont montré une inefficacité en termes de consommation d'énergie ou de la vitesse, ce qui affecte les dépenses d'exploitation. En outre, le processus d'utilisation de robots de haute précision est très limité en raison du délai qui prend avant d'effectuer la prochaine tâche. Le temps requis pour les vibrations restantes retarde les processus suivants, cela va à l'encontre de la demande pour une productivité accrue. Ces exigences contradictoires entre haute vitesse et haute précision ont rendu la recherche d'un assemblage automatique difficile. En outre, de nombreux robots industriels rencontrent le problème de la vibration des bras pendant la grande vitesse. Afin d'améliorer la productivité industrielle, il est nécessaire de réduire le poids des bras et/ou d'augmenter leur vitesse de fonctionnement. À ces fins, il est extrêmement souhaitable de construire des manipulateurs robotisés flexibles car ils présentent des avantages potentiels de réduire les coûts, d'augmenter la charge de travail, d'augmenter la vitesse de fonctionnement, de réduire la consommation d'énergie, d'améliorer la maniabilité, meilleure mobilité et utilisation plus sécuritaire grâce à la faible inertie [1].

La plupart des travaux réalisés par ce genre des robots sont définis dans l'espace cartésien tels que la peinture, le soudage, l'assemblage, etc., ce qui fait que la

commande des robots dans l'espace cartésien est assez importante. Dans le cas des robots rigides, l'étude de la cinématique, directe et inverse, assure le passage de l'espace de travail à l'espace articulaire et vice versa. Une fois l'angle du moteur est connu on peut directement trouver la position de l'extrémité. Ce qui n'est pas évident pour les robots à bras flexible à cause de la flexibilité qui est considérée comme un phénomène très important qu'on ne peut pas la négligée. Le contrôle direct de l'extrémité du bras rend le système à non-minimum de phase, ce qui rend la cinématique inverse insuffisante pour transférer les trajectoires désirées de l'espace de travail vers l'espace articulaire. En fait, ces deux cas sont reliés par une relation cinématique et dynamique.

Durant les dernières années, le contrôle des robots à bras flexibles a attiré l'attention des plusieurs chercheurs en raison des performances requises dans le domaine des robots et des applications spatiales nécessitant des structures souples et légères. Compte tenu du grand nombre de publications sur ce sujet, qui varient d'un robot à un seul bras flexible tournant autour d'un axe fixe, jusqu'aux robot à trois dimensions formés de plusieurs liens flexibles, beaucoup des recherches sont faites jusqu'à présent ce qui rend cette étude semble être très épuisant.

La recherche sur les robots flexibles peut être divisée en deux parties principales: la modélisation et le contrôle de la position de l'extrémité du bras. Diverse méthodes de modélisation et plusieurs algorithmes de contrôle ont été développés jusqu'à aujourd'hui.

1.2.Revue de la littérature

1.2.1. Modélisation du système

Afin de développer des lois de contrôle efficaces et atteindre la précision requise, il faut commencer par construire des modèles mathématiques précis.

Le modèle du bras flexible a été conçu dans [2] en manipulant la base rotative comme un corps solide et le bras flexible comme un corps flexible avec un degré de liberté de rigidité constante.

La déformation du bras flexible a été représentée dans [3] par une somme pondérée de fonctions de forme, c'est-à-dire cette méthode consiste en approximation de la solution du problème aux valeurs propres par une série limitée de fonctions supposées multipliées par des coefficients indéterminés où seulement les fonctions propres d'une poutre encastree sans charge sont utilisées. Deux types de fonctions de forme sont présentés dans [15], soient les fonctions polynomiales et les fonctions propres de poutres.

Le modèle dynamique a été dérivé dans [4] en se basant sur la méthode des modes supposés basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Le modèle est ensuite linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Ceci est réalisé grâce à l'utilisation de configurations flottantes de référence par rapport auxquelles les déformations des liens sont évaluées. Les modèles numériques ou symboliques qui en résultent sont bien adaptés aux applications et au contrôle de la robotique.

En général, l'approche par cadres flottants utilise des expansions modales [9] des élasticités alors que la méthode globale a lieu dans le domaine des méthodes d'éléments finis non linéaires. En ce qui concerne les hypothèses cinématiques sur les poutres, quelle que soit l'approche retenue (cadre global ou flottant), la plupart des modèles proposés sont du premier ordre par rapport aux dimensions transversales du

matériau [10; 11]. Ceci conduit notamment à forcer les sections à rester planes lors des déformations. A ce stade, différents modèles de poutres peuvent être suivis selon qu'on néglige le cisaillement transversal (poutres d'Euler-Bernoulli) [5; 12], ou qu'on le considère (faisceaux de Timochenko) [6], ou qu'on néglige l'étirement (poutres non extensibles) [12], ou qu'on prend en compte l'inertie rotative des sections transversales (poutres de Rayleigh).

La cinématique planaire non-linéaire en déformations infinies a été initialement proposée par Reissner [29] et appliquée au problème de simulation tridimensionnelle avec des références galiléennes par Simo et Vu-Quoc [30], Cardona et Gérard [31] et Ibrahimbegovitch [32]. Dans ce cas, les champs de déplacement et de rotation sont considérés comme indépendants et finis, le champ de déplacement étant interpolé dans un espace linéaire (vectoriel), tandis que la rotation nécessite d'invoquer la géométrie différentielle du groupe de Lie (un groupe muni d'une structure de variété différentiable) SO_3 (matrice antisymétrique carrée réelle) [37]. Dans le même contexte, Garcia de Jalon et al. [33] ont proposé de remplacer la dynamique dans SO_3 par l'utilisation de certaines coordonnées cartésiennes redondantes et de traiter les contraintes par la formulation de pénalité proposée par Serna et Bayo [34].

1.2.2. Observateur d'états non mesurables

Dans le but de bien percevoir comment l'état réagisse lors de la simulation de lois de contrôle développées, il est mieux de créer un observateur qui peut estimer les variables d'état non mesurables du système en se basant sur les états mesurables.

Les observateurs à gain élevé ont évolué au cours des deux dernières décennies en tant qu'un mécanisme important pour la conception du contrôle de retour de sortie des systèmes non linéaires. Ils sont utilisés par Doyle and Stein [14] dans la conception d'observateurs robustes dont les systèmes utilisés sont linéaires. En 1980, F. Esfandiari and H.K. Khalil [15] ont commencé à utiliser les observateurs à gain

élevé pour les systèmes non-linéaires. Durant le temps, cette technique a été développée indépendamment par deux écoles de recherches :

1. L'école française dirigée par Gauthier et Hammouri [16] qui se sont concentrés sur la dérivation des résultats globaux dans des conditions globales de Lipschitz.
2. L'école américaine dirigée par Khalil à la Michigan State University qui a démontré que dans l'absence des conditions globales de Lipschitz, les observateurs à gain élevé pourraient déstabiliser le système en boucle fermée car le gain de l'observateur est suffisamment élevé.

Un nouvel observateur d'ordre réduit exponentiel pour une classe de système non-linéaire a été proposé dans [5] dont la conception est simple et qui n'a pas besoin du changement des coordonnées non-linéaires.

Un observateur asymptotique simple a été développé dans [6] pour estimer les vitesses des manipulateurs robotiques dont les non-linéarités caractérisant le comportement dynamique de robots sont annulées en utilisant des gains élevés.

Un observateur pour des systèmes non linéaires a été créé dans [7] sous la condition que certaines fonctions soient entièrement Lipschitz. Cet observateur fonctionne sur les systèmes autonomes et sur les systèmes non-linéaires observables pour n'importe quelle entrée.

1.2.3. Contrôle

Le contrôle des robots à bras flexibles, dans le but d'atteindre et de maintenir précisément une position souhaitée, est un défi. Ils existent plusieurs méthodes de contrôle avec lesquels de bons contrôleurs peuvent être créés si les paramètres sont fixes et connus, mais la variation des paramètres du système due aux changements

dans les conditions de travail demande des lois de contrôles qui utilisent des gains variables.

Un contrôleur qui est divisé en deux parties, une partie d'observateur linéaire qui procède un état d'erreur estimé en se basant sur l'erreur de la position du bras et une partie de rétroaction linéaire qui utilise cet état estimé, a été développé dans [9]. Ce contrôleur a montré un résultat efficace en donnant une limite semi-globale uniforme de l'erreur de suivi.

Une stratégie de contrôle basée sur le concept de contrôleur de type Lyapunov non linéaire pour négliger les oscillations du bras et réguler l'extrémité du robot flexible a été utilisée dans [10].

Deux contrôleurs ont été proposés dans [11] pour minimiser les vibrations dues à la flexibilité du bras d'un robot Quanser, un contrôle par retour d'état et un autre optimal, en utilisant le retour de l'extrémité du bras mesuré par une jauge.

Un système de détection optique composé d'une diode laser et d'un détecteur sensible à la position pour mesurer en temps réel la déflexion dynamique et un contrôleur de type Lyapunov basé sur la rétroaction du système de détection est développé pour un modèle de système dynamique non linéaire, pour minimiser les oscillations du bras et réguler l'extrémité du robot flexible ont été développés dans [12].

Un schéma de control de commutation pour les robots à bras flexible qui n'utilise pas la mesure de l'accélération, ni la dérivée supérieure a été décrit dans [13]. Dans ce schéma de commande on n'a pas besoin de calculer la dérivée de la vitesse ou d'inverser la matrice de masses-inerties.

Une comparaison entre deux lois de contrôle a été faite dans [35], la première loi est la commande par mode de glissement non-linéaire (SMC) et la deuxième c'est le régulateur linéaire quadratique (LQR). Les résultats ont montré que les performances de suivi garantissent l'efficacité des lois de contrôle proposées. De plus, la méthode

SMC a assuré un avantage comparatif par rapport à la contrepartie linéaire, offrant des performances de suivi significatives.

1.3. Problématique

Le sujet proposé étudie un robot à un bras flexible développé par la compagnie Quanser. Dans ce système, on traite la contrainte de poids en se basant sur la flexibilité des membrures ce qui est similaire au cas des grandes structures spatiales. Ce système expérimental est parfait pour modéliser une membrure flexible qui peut être utilisé sur un robot rigide ou dans les structures spatiales légères. La flexibilité de la membrure provoque la déformation du bras lors de la rotation de la base ce qui déclenche des problèmes qui rendent le travail plus difficile.

Les défis sont les suivants :

- La difficulté de trouver le modèle idéal qui peut représenter le système réel aussi précisément que possible ;
- La difficulté de trouver un capteur idéal qui peut mesurer la déformation du bras ;
- La difficulté d'assurer le positionnement exact de l'extrémité du bras.

1.4. Objectifs

L'objectif global de ce projet est de développer un algorithme de contrôle permettant à l'extrémité du bras flexible d'atteindre la position souhaitée. Afin d'atteindre spécifiquement le point désiré, un algorithme puissant est développé pour assurer la stabilité et minimiser les oscillations qui se propagent tout au long du bras lors de la rotation de la base. Pour atteindre cet objectif global, des objectifs spécifiques sont visés :

1. Obtenir un modèle qui peut représenter le système réel aussi précisément que possible ;
2. Faire la conception d'un observateur d'état qui observe les états non-mesurable du système ;
3. Réaliser une simulation numérique des commandes développées dans l'environnement Matlab/Simulink ;
4. Tester les résultats obtenus par la simulation en appliquant les lois de contrôle développées sur le système réel.

1.5. Organisation

Au chapitre 2, nous développons les deux modèles : linéaire et non-linéaire du manipulateur flexible. Pour ceci, on a utilisé la méthode de modes supposés.

La conception d'un observateur d'état non-mesurable est présentée dans le chapitre 3, dont l'observateur utilisé est celui à gain élevé.

Le chapitre 4, présente une loi de contrôle classique : la commande optimale (contrôle linéaire-quadratique) qui est appliquée sur le modèle linéaire. Les résultats des simulations ainsi que celles de l'expérimentation obtenus suite à l'application de cette loi de contrôle sont encore exposés et analysés.

La commande par mode de glissement est appliquée sur le modèle non-linéaire au chapitre 5. Les résultats des simulations et de l'expérimentation sont présentés et analysés.

Enfin une conclusion générale qui résume les travaux déjà effectués est présentée.

Chapitre 2

Modélisation du système

Dans ce chapitre, les deux modèles linéaire et non-linéaire du montage seront développés. La méthode de modélisation utilisée dans ce travail est celle des modes supposés qui considère la déformation de la membrure sur toute sa longueur et que son poids est réparti linéairement tout le long du bras. Le développement de ces deux modèles sont bien détaillés dans ce chapitre.

Avant de développer les méthodes de modélisation, il est très important de faire une description du montage physique sur lequel va être réaliser les applications expérimentales.

2.1. Description du système

Le montage représenté dans la figure 1 est un bras flexible rotatif fabriqué par la compagnie Quanser. Il comporte une jauge qui est montée à la base du bras flexible en acier inoxydable mince. Cette jauge est calibrée pour détecter la déflexion de l'extrémité. Le système est fabriqué pour être monté sur un montage Quanser SRV02, ce qui permet d'obtenir un bras flexible rotatif horizontal qui peut être utiliser pour appliquer les expériences de contrôle du bras flexible. Pour faire tourner le bras flexible dans le plan horizontal, un moteur à courant continu est utilisé. La sortie finale du système est un signal analogique proportionnel à la déviation du bras. Ce montage expérimental est parfait pour modéliser un bras flexible qui sera utilisé dans des structures spatiales légères ou installé sur un robot rigide. Cette expérience est très utile pour l'étude de l'analyse des vibrations et de la résonance.

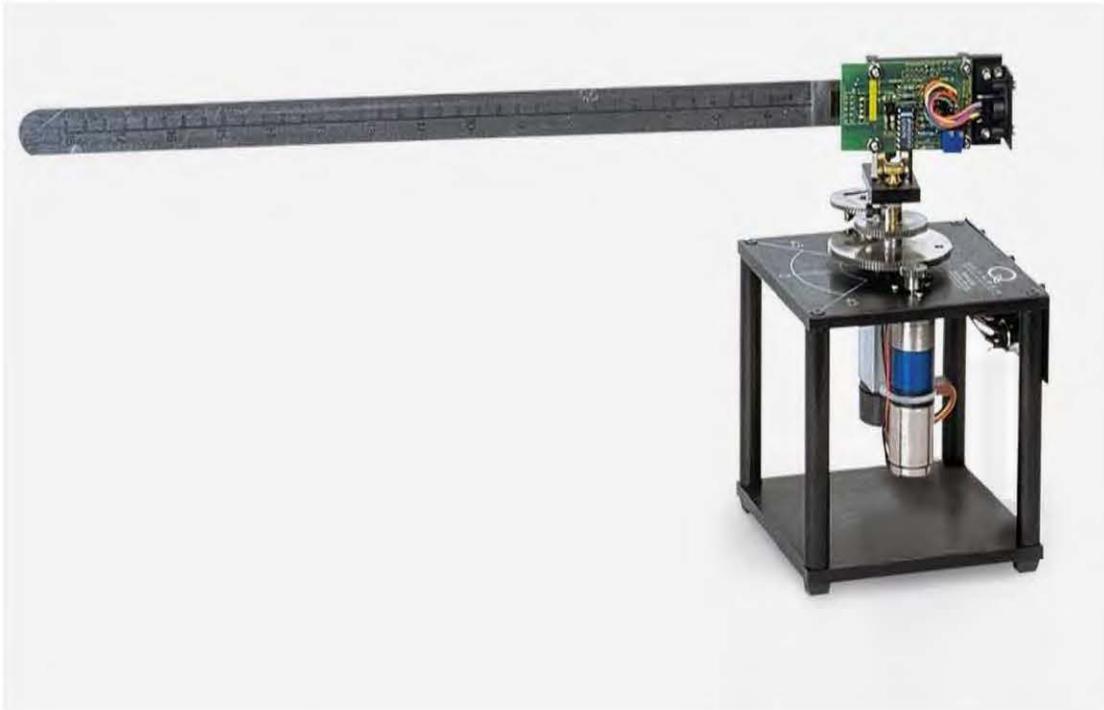


Figure 1: Montage du bras flexible

Les composants de la membrure flexible sont illustrés dans la Figure 2 et énumérés dans le Tableau 1 [17].

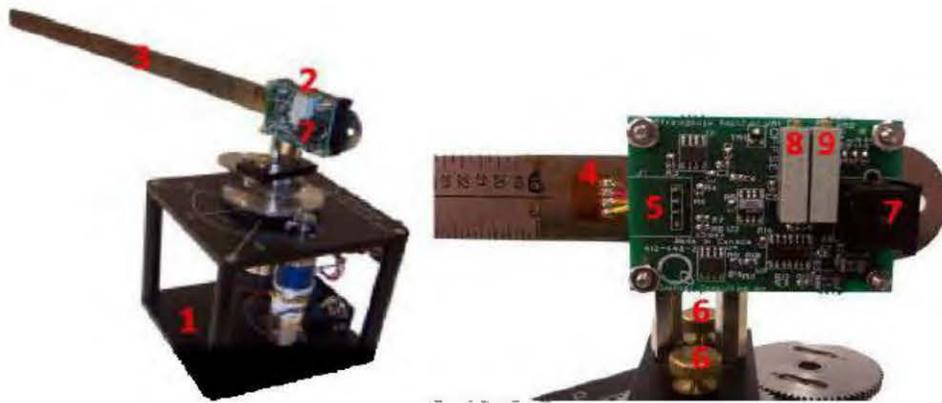


Figure 2: Description du montage

Le composant numéro 1 est un servomoteur qui est alimenté par un signal parvenant de la carte d'acquisition. Le deuxième composant est le module de flexgauge qui transforme le signal de déformation envoyé par la jauge avant qu'il le renvoie à la carte d'acquisition par le port numéro 7. Le composant 3 est le bras flexible. Le quatrième composant est le capteur de jauge qui produit un signal analogique proportionnel à la déviation de l'extrémité. Le composant 5 est le circuit de la jauge. Les composants 6 sont les vis qui attachent le bras flexible et le servomoteur sur les engrenages d'un réducteur de vitesse. Les composants 8 et 9 sont des potentiomètres qui servent à régler le bras avant de commencer la pratique.



(a) Configuration "Low-Gear Ratio"

(b) Configuration "High-Gear Ratio"

Figure 3: Configurations du servomoteur

Le servomoteur peut être monté en deux configurations, les figures (3.a) et (3.b) représentent ces deux configurations :

(a) La configuration "Low-Gear Ratio" est montée lors de la modélisation du moteur, le contrôle de la position et le contrôle de la vitesse et ceux avec ou sans charges.

(b) La configuration "High-Gear Ratio" est demandée lors de l'utilisation d'un module additionnel, c'est donc le cas du bras flexible.

2.2. Modélisation du servomoteur

Le montage expérimental est constitué de deux sous-systèmes : un mécanique et un électrique. La modélisation du sous-système mécanique nous permet de décrire la déviation du bras et la dynamique de rotation de la base. Alors que le sous-système électrique implique la modélisation du servomoteur qui relie dynamiquement la tension appliquée à l'entrée du moteur au couple produite par ce dernier.

Cette modélisation est réalisée strictement sur le servomoteur c'est-à-dire que seulement les paramètres de la base doivent être tenus en considération.

La figure 4 montre le circuit d'induit du moteur :

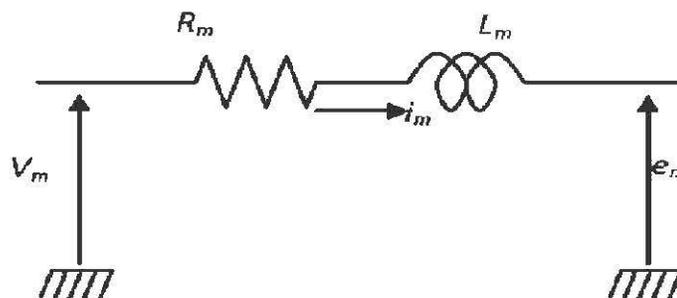


Figure 4: Circuit d'induit du moteur

avec :

V_m : la tension appliquée aux bornes du moteur

i_m : le courant

e_m : la force contre électromotrice du moteur

R_m : la résistance interne du moteur

L_m : l'inductance interne du moteur

L'équation électrique qui décrit le système s'exprime sous la forme suivante :

$$v_m - e_m = R_m i_m + L_m \frac{di_m}{dt} \quad (2.1)$$

En appliquant la transformation de Laplace sur l'équation (2.1), tout en considérant que le système est initialement au repos, l'équation électrique du système dans le domaine de Laplace est de la forme suivante :

$$V_m - E_m = (R_m + sL_m) I_m \quad (2.2)$$

avec $E_m = K_m \Omega_m$

où K_m : la constante de la force électromotrice;

Ω_m : la vitesse de rotation de moteur.

Les expressions définissant le couple du moteur τ_m et celui du côté de la charge τ_L sont les suivantes :

$$\tau_m = \eta_m K_T I_m \quad (2.3)$$

$$\tau_L = \eta_g K_g \tau_m \quad (2.4)$$

avec :

K_T : constante du couple moteur qui est égale à K_m dans le cas du moteur à courant continu

K_g : facteur du réducteur de vitesse

η_m : rendement du moteur

η_g : rendement des engrenages

L'expression suivante montre l'équation mécanique du moteur qui relie le couple produit à la vitesse de rotation.

$$\tau_L = B_{eq} \omega_L + J_{eq} \frac{d\omega_L}{dt} \quad (2.5)$$

avec :

ω_L : vitesse de rotation de moteur donc, $\omega_L = \dot{\theta}$.

En appliquant la transformation de Laplace, l'équation précédente est exprimée sous la forme suivante :

$$\tau_L = (B_{eq} + sJ_{eq}) \Omega_L \quad (2.6)$$

Le schéma bloc qui correspond au servomoteur peut être décrit en se référant aux équations (2.1) à (2.6), et peut être illustré par la figure 5.

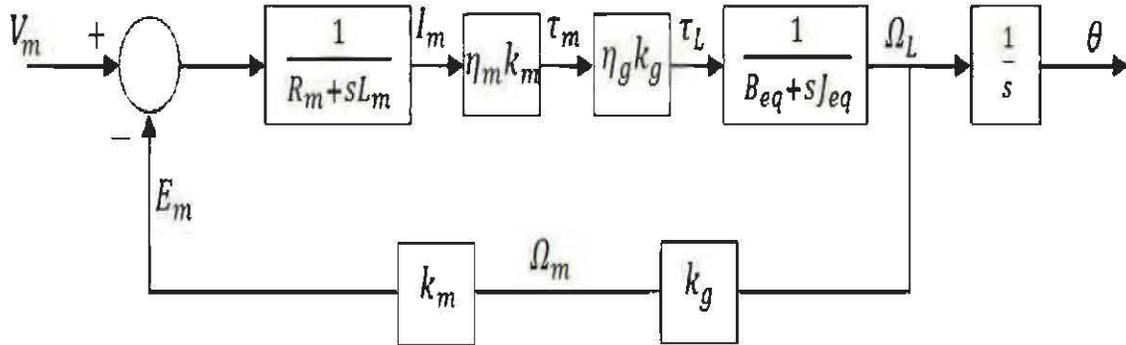


Figure 5: Schéma bloc du servomoteur SRV02

À partir de ce schéma bloc on peut déduire la fonction de transfert qui décrit le comportement du servomoteur tout en négligeant l'inductance du circuit d'armature ($L_m = 0$). D'où la fonction de transfert suivante :

$$\frac{\theta(s)}{V_m(s)} = \frac{A_m}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} \quad (2.7)$$

avec :

θ : l'angle généré par le servomoteur

V_m : la tension d'entrée

A_m : le gain du moteur donné par la relation suivante : $A_m = \frac{\eta_m \eta_g K_m K_g}{R_m J_{eq}}$

$$\tau : \text{la constante de temps définie par : } \frac{1}{\tau} = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} + \frac{\eta_m \eta_g K_m^2 K_g^2}{R_m J_{eq}}$$

D'où l'expression qui relie τ_L à la tension d'entrée du moteur est la suivante :

$$\tau_L = \frac{\eta_m \eta_g K_m K_g}{R_m J_{eq}} (V_m - K_m K_g \Omega_L) \quad (2.8)$$

Une fois l'équation qui relie τ_L à la tension d'entrée du moteur est calculée, il faut développer le modèle d'état du bras flexible.

2.3. Modélisation du bras flexible

La méthode retenue pour la modélisation du bras est celle des modes supposés qui considère la déformation de la membrure sur toute sa longueur et que son poids est réparti linéairement tout le long du bras [18].

Lors de la modélisation du bras, il y en a des hypothèses qui doivent être tenues en considération :

- a) Le bras est représenté sous forme d'un modèle de poutre d'Euler-Bernouilli, alors :
 1. L'inertie de rotation d'un élément est négligée.
 2. En plus le cisaillement dû à l'effort tranchant est négligé.
- b) Les déformations de la membrure sont considérées petites.
- c) L'amortissement du bras est négligé.
- d) La vitesse de rotation est assez petite.

Dans cette partie on présente la modélisation du bras flexible qui est en rotation dans le plan horizontal, alors on considère seulement la déformation produit dans le plan de rotation. Le modèle linéaire est obtenu tout en considérant que la

vitesse de rotation de la base est assez petite. La figure 6 montre le schéma du bras flexible.

1. le premier repère XOY est le plan fixe où la membrure tourne
2. X_1OY_1 est le plan qui est lié à la membrure.
3. θ est l'angle de rotation de la base qui est provoqué par le couple τ_L généré par le moteur.
4. $v(x,t)$ est la déformation d'une section de la membrure qui dépend à la fois de la position selon l'axe longitudinale du bras et du temps t .
5. $y_L(t)$ est l'angle total de l'extrémité du bras qui est la somme de l'angle de rotation du moteur θ et de la déviation angulaire α de l'extrémité par rapport à la membrure non déformé.

On suppose que le bras est uniforme de longueur L , de masse M , de densité ρ et de rigidité EI_z où E est le module de Young et I_z est le moment d'aire selon l'axe Z . A est la section du bras.

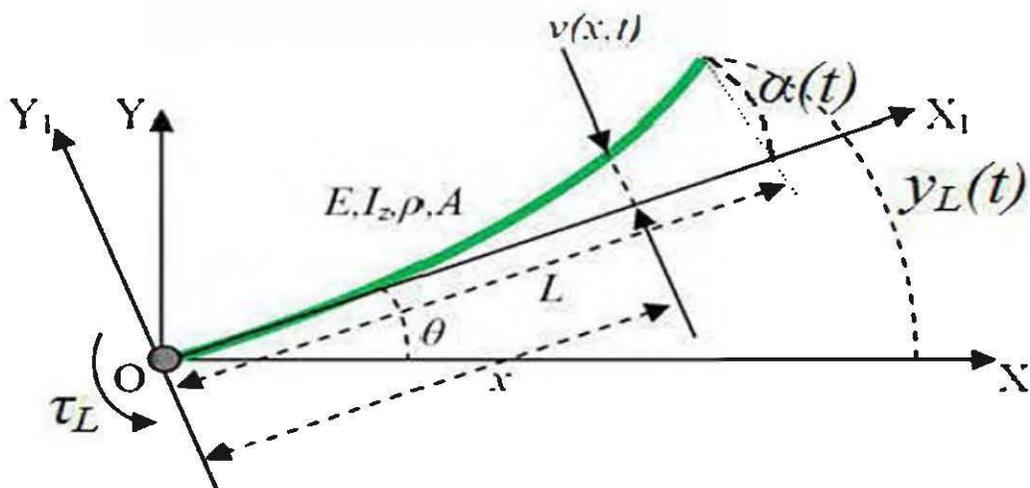


Figure 6 : Schéma du bras flexible en rotation dans le plan horizontal

Les différentes valeurs numériques des paramètres qui caractérisent la membrure flexible sont présentées dans le Tableau (1).

Tableau 1 : Valeurs numériques des paramètres du bras

Paramètre	Valeur	Unité
Masse (M)	41.9	cm
Longueur (L)	0.065	Kg
Module de Young (E)	193	GPa
Moment d'air (I_z)	1.67e-12	m^4
Section (A)	20×1	$mm \times mm$
Moment d'inertie (J_L)	0.004	$Kg.m^2$
Constante d'élasticité (K_{stiff})	1.66	N / m

Dans le but de déterminer le modèle dynamique du système à un bras flexible il faut calculer le Lagrangien du système, $L = T - V$. Il faut donc déterminer à priori les énergies potentielle et cinétique.

L'énergie cinétique est due à la rotation de la base et à la rotation de la membrure. Cette énergie peut s'exprimer en additionnant l'énergie cinétique du moteur T_M à celle de chaque section de la membrure T_{dm} dont son expression est la suivante :

$$T = T_M + \int_0^L T_{dm} \quad (2.9)$$

où :

$$T_M = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2$$

$$T_{dm} = \frac{1}{2} \rho (\dot{v}^2 + x^2 \dot{\theta}^2 + 2x\dot{\theta}\dot{v})$$

\dot{v} : est la dérivée par rapport au temps de v (vitesse de chaque section de la membrure)

L'énergie potentielle totale du système est due seulement à l'élasticité du bras flexible dont l'expression est la suivante :

$$V = \frac{1}{2} EI_z \int_0^L v''^2 dx \quad (2.10)$$

où :

E : le module de Young

I_z : l'inertie selon l'axe Z du bras

v : le déplacement de l'élément dm par rapport à son axe neutre

v'' : la dérivée seconde par rapport à la variable spatiale x

L'amortissement, provenant du moteur et de la poutre, est traduite par la fonction de dissipation de Rayleigh :

$$R = \frac{1}{2} B_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} EI_z K_e \int_0^L \dot{v}''^2 dx \quad (2.11)$$

avec :

B_{eq} : le coefficient d'amortissement visqueux du moteur à la base

K_e : le coefficient d'amortissement interne du bras qui est assez faible.

\dot{v}'' : la dérivée par rapport au temps de v''

La seule force externe appliquée au système correspond au couple τ_L produit par le moteur.

Alors le vecteur de la force généralisée est :

$$F = \begin{bmatrix} \tau_L \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Maintenant on cherche à effectuer la discrétisation de la déformation $v(x, t)$ pour pouvoir maintenir un nombre fini de modes. L'équation de la déformation s'écrit de la forme suivante :

$$v(x, t) = \phi^T(x) q_f(t) \quad (2.13)$$

avec :

$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$: le vecteur des fonctions de formes;

$q_f = [q_{f1}, q_{f2}, \dots, q_{fn}]^T$: le vecteur des coordonnées généralisées relatives aux modes flexibles, et n est le nombre de modes retenu.

Dans ce travail, les fonctions de forme choisies sont les fonctions polynomiales suivantes :

$$\phi^T(x) = \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad \dots \quad \left(\frac{x}{L}\right)^{n+1} \right] \quad (2.14)$$

En introduisant l'équation de la déformation dans (2.9) et (2.10), les expressions de l'énergie cinétique et potentiel deviennent, sous forme matricielle :

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{q}_f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta & q_f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q_f \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

avec :

$$I_t = I_m + \frac{\rho L^3}{3} \quad (1 \times 1)$$

$$M_{rf} = \rho \int_0^L x \phi dx \quad (n \times 1)$$

$$M_{ff} = \rho \int_0^L \phi \phi^T dx \quad (n \times n)$$

$$K_{ff} = EI_z \int_0^L \phi' \phi'^T dx \quad (n \times n)$$

Pour obtenir le modèle d'état, il faut appliquer les équations de Lagrange suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i=1,2,\dots,n+1 \quad (2.12)$$

avec :

$L = T - V$: le Lagrangien

$q = [\theta \quad \alpha]^T$: sont les coordonnées généralisées

Q_i : les forces non conservatives

R : la dissipation de Rayleigh

D'où le modèle d'état du bras flexible est le suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}U \end{bmatrix} \tau_L \quad (2.18)$$

Maintenant, pour obtenir le modèle d'état du système au complet, il suffit de remplacer l'équation de couple τ_L dans (18) d'où le modèle est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec :

$$x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{240EI_z}{L^2(\rho L^3 + 48I_m)} & -\frac{48(B_{eq} + K_g^2 K_m^2 \eta_g \eta_m / R_m)}{\rho L^3 + 48I_m} & 0 \\ 0 & -\frac{320EI_z(\rho L^3 + 48I_m)}{\rho L^4(\rho L^3 + 48I_m)} & \frac{60L(B_{eq} + K_g^2 K_m^2 \eta_g \eta_m / R_m)}{\rho L^3 + 48I_m} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{48(K_g K_m \eta_g \eta_m)}{R_m(\rho L^3 + 48I_m)} \\ -\frac{60L(K_g K_m \eta_g \eta_m)}{R_m(\rho L^3 + 48I_m)} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 1/L \quad 0 \quad 0]$$

Les valeurs des paramètres des matrices A et B sont données dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Paramètres du robot flexible

Description	Symbole	Valeur
Résistance du moteur	R_m	2.6 Ω
Inductance du moteur	L_m	0.18 mH
Gain du moteur	K_m	7.68e-03 $V*s/rad$
Facteur de réduction de vitesse	K_g	70
Rendement du moteur	η_m	0.69
Rendement du réduction du moteur	η_g	0.90
Moment d'inertie équivalent	J_{eq}	2.08e-03 $Kg*m^2$
Coefficient d'amortissement	B_{eq}	4.00e-03 $N*m*s/rad$

Finalement, on trouve les valeurs numériques des matrices A, B et C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1876 & -31.5 & 0 \\ 0 & -1621 & 16.5 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 55.4 \\ -29 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.39 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3.1. Fonction de transfert

A partir du modèle d'état déjà développé on peut trouver la fonction de transfert du système :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.20)$$

En remplaçant les valeurs numériques des matrices A, B et C par leurs valeurs on obtient la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-13.82s^2 + 1.432s + 3540}{s(s^3 + 31.5s^2 + 1621s + 2011)} \quad (2.21)$$

2.3.2. Zéros et pôles

Une fois la fonction de transfert du système est déjà développée on peut trouver les zéros et les pôles.

Les zéros de ce système sont les racines du numérateur de la fonction de transfert, d'où :

$$z_1 = 16.05, \quad z_2 = -15.953$$

Les pôles du modèle, sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert, d'où :

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -8.43 \pm 36.10i, \quad p_4 = -14.63$$

Ce modèle contient un zéro positif ce qui montre que ce système est à non minimum de phase. Concernant les pôles, on a un pôle qui est à l'origine, deux pôles complexes conjugués qui ont la partie réelle négative et un pôle réelle négative.

2.4. Modèle non-linéaire

Dans le but d'obtenir le modèle non-linéaire du système, on va ajouter le terme d'ordre 2 qui a été négligé durant le développement du modèle par modes supposés.

Le terme d'ordre 2 est le suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}[C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Avec :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} 2\dot{q}_r q_f^T C_{rr} \dot{q}_f \\ -\dot{q}_r^2 C_{rr} q_f \end{bmatrix} \quad \text{où } C_{rr} = \rho \int_0^L \phi \phi^T dx - \rho \int_0^L x \int_0^x \phi' \phi'^T ds$$

Après que les fonctions de formes sont remplacées et les intégrales sont évaluées, on obtient le terme d'ordre 2 [26] :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.98x_2x_3^2 + 3.74x_2x_3x_4 \\ -0.85x_2x_3^2 - 1.96x_2x_3x_4 \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état du système au complet devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1876 & -31.5 & 0 \\ 0 & -1621 & 16.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 55.4 \\ -29 \end{bmatrix} V_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.98x_3 + 3.74x_4 \\ -0.85x_3 - 1.96x_4 \end{bmatrix} x_2x_3 \quad (2.23)$$

2.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé deux modèles, un linéaire et un autre non-linéaire. Pour le modèle linéaire on a trouvé la fonction de transfert, les zéros et les pôles. Le modèle non-linéaire est développé en ajoutant le terme du second ordre négligé durant l'étude du modèle linéaire.

Une fois le modèle du robot est développé, il est possible de continuer notre travail afin d'atteindre nos objectifs désirés. L'étape suivante consiste à développer un observateur pour estimer les états non mesurables.

Chapitre 3

Observateur à gain élevé

La plupart des contrôleurs ordinairement utilisés pour les manipulateurs robotiques ont besoin de la connaissance des deux paramètres : Positions et vitesses. Les systèmes robotiques sont souvent équipés de codeurs de précision ou résolveurs pour les mesures de position. Par conséquent, la position des joints peut être mesurée exactement. Cependant, il est difficile d'obtenir des mesures précises des vitesses. Un capteur de vitesse, si disponible, est souvent affecté par un bruit considérable, qui peut détériorer considérablement les performances du contrôleur. En pratique, un encodeur optique peut être utilisé pour mesurer la vitesse en comptant le nombre d'impulsions par unité de temps. Une autre approche pour déterminer la vitesse est de mesurer le temps entre les impulsions adjacentes, ou encore de mesurer le temps que va prendre le nombre d'impulsions pour se produire. Dans les deux cas, les mesures peuvent être assez incertaines pour les faibles vitesses, auquel cas les impulsions se produisent à un taux très petit. Un générateur de courant continu spécial, appelé tachymètre, peut également être utilisé pour mesurer la vitesse. Une autre procédure pour l'obtention de la vitesse consiste à mesurer la position puis à différencier cette mesure. La simplicité de cette technique le rend attrayant à appliquer à la mise en œuvre en temps réel, mais malheureusement, l'approximation pour obtenir la vitesse n'est pas toujours adéquate à des fins de contrôle. Si un bruit à haute fréquence affecte la mesure de position, la différenciation augmente l'amplitude de ce bruit puisque la sortie du différentiateur est égale au taux de changement de l'amplitude du signal. En outre, des indésirables oscillations dans la réponse du manipulateur peuvent se produire à cause des effets de quantification. Si possible, la vitesse devrait toujours être mesurée, plutôt qu'être obtenue en différenciant le signal de position. Cependant, les capteurs de vitesse ne sont en fait souvent pas utilisés dans la pratique en raison de facteurs tels que le coût et le poids.

Un observateur qui est basé sur le modèle a été présenté pour estimer l'état dans les systèmes linéaires et non linéaires. La conception d'observateurs linéaires est un domaine plus mature que celui de la conception d'observateur non-linéaire. Une revue simple sur les observateurs linéaires conçu pour les manipulateurs de robot est donnée par Bona et Indri [21]. Ils traitent l'observateur à gain élevé avec des stratégies combinées contrôleur-observateur et filtre de degré relatif zéro. Ils ont encore signalé que certains observateurs linéaires puissent rétablir asymptotiquement l'état d'un système non-linéaire, mais ils ne garantissent pas forcément qu'un certain contrôle par retour d'état restera stable quand les valeurs réelles seront remplacées par les états estimés dans la boucle de retour parce que le principe de séparation n'est pas valable en général pour un système non-linéaire.

Une conception générale des observateurs non linéaires est proposée par Misawa et Hedrick [22]. Ils ont discuté le filtre étendu de Kalman, le filtre de Kalman étendue, le filtre statistiquement linéarisé, les observateurs conçus avec soit une linéarisation globale ou pseudo linéarisation, les observateurs basés sur la linéarisation étendue, les observateurs conçus selon la méthode de Thau, les observateurs adaptatifs et des « observateurs coulissants ».

Pour la conception de l'observateur non linéaire, il n'y a aucune théorie prête avec des étapes à suivre. Les chercheurs construisent toujours des observateurs tout d'abord, puis ils vérifient leurs propriétés de convergence pour les états à estimer. À cet effet, la théorie de stabilité de Lyapunov est fréquemment utilisée.

Pour notre système, les différentes variables d'état ne sont pas toutes mesurables et accessibles, c'est pour cela que nous avons développé un observateur de type gain élevé (High Gain Observer, HGO, en anglais), qui est utilisé sur les deux modèles, linéaire et non-linéaire, déjà développés. Les analyses et une bref explication du développement de cet observateur sont bien détaillées dans ce chapitre.

3.1. L'observateur à gain élevé

Au début, les “ High-Gain-Observer (HGO) ” ont été utilisés dans la conception d'observateurs robustes pour les systèmes linéaires [14], et à la fin des années 1980 les chercheurs ont commencé à les utiliser dans les systèmes non linéaires [15]. L'observateur à gain élevé [23] assure la récupération de la performance d'un contrôleur de retour d'état comme la récupération de la stabilité asymptotique de l'origine, de la région d'attraction et des trajectoires.

Au cours des dernières années, les observateurs à gain élevé ont joué un rôle important dans la conception de boucles de contrôle des systèmes non linéaires. Ils sont essentiellement utilisés pour estimer la dérivée de la sortie. Dans cette section, un simple observateur asymptotique est développé pour l'estimation de la vitesse et de la déformation généralisées durant le mouvement du bras flexible. Des gains importants sont appliqués pour atténuer les non-linéarités qui caractérisent le comportement dynamique du robot. La convergence de l'observateur proposé est prouvée par la théorie de la stabilité de Lyapunov.

Tout d'abord les variables d'état de notre système sont définies comme suit :

$$x_1 = q = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}; x_2 = \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y = x_1 = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

En introduisant (3.1) dans (2.23), le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \phi(x_1, x_2) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \phi(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} f_1(x) + g_1(x) + b_1.u \\ f_2(x) + g_2(x) + b_2.u \end{pmatrix} \\
 f_1(x) &= 187,5x_2 - 31,5x_3 \\
 f_2(x) &= -1621x_2 + 16,5x_3 \\
 g_1(x) &= x_2x_3(0,98x_3 + 3,78x_4) \\
 g_2(x) &= x_2x_3(-0,85x_3 - 1,96x_4) \\
 b_1 &= 55,4 \\
 b_2 &= -29
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Soit un observateur à gain élevé dont la structure correspond à l'équation suivante [16] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \frac{1}{\xi} H_p(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \frac{1}{\xi^2} H_v(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \tag{3.4}$$

Avec \hat{x}_1, \hat{x}_2 désignant respectivement les estimations dynamiques des coordonnées généralisées et des vitesses, c.-à-d., \hat{x}_1 est l'estimation de la position angulaire et de la déviation du bras flexible (θ, α) , et \hat{x}_2 est l'estimation de leurs dérivées $(\dot{\theta}, \dot{\alpha})$ et ξ est un paramètre scalaire, H_p et H_v sont les matrices de gain de l'observateur qui ont les formes suivantes :

$$H_p = \begin{pmatrix} h_{p1} & 0 \\ 0 & h_{p2} \end{pmatrix}; H_v = \begin{pmatrix} hv_1 & 0 \\ 0 & hv_2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Ces deux paramètres vont affecter la performance de l'observateur.

Il est nécessaire de démontrer que le système (3.4) représente un observateur du système (3.2), et établir la condition dans laquelle cet observateur va retrouver les états avec précision.

Tout d'abord on cherche la dynamique de l'erreur entre le système et l'observateur à gain élevé :

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_i &= \dot{x}_i - \dot{\hat{x}}_i; \quad i = 1, 2 \\
\dot{\tilde{x}}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 \\
&= x_2 - \left(\hat{x}_2 + \frac{1}{\xi} H_p (x_1 - \hat{x}_1) \right) \\
&= x_2 - \hat{x}_2 - \frac{1}{\xi} H_p (x_1 - \hat{x}_1) \\
&= \tilde{x}_2 - \frac{1}{\xi} H_p \tilde{x}_1 \\
\dot{\tilde{x}}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 \\
&= \phi(x_1, x_2) - \frac{1}{\xi^2} H_v (x_1 - \hat{x}_1) \\
&= \phi(x_1, x_2) - \frac{1}{\xi^2} H_v \tilde{x}_1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Alors l'équation de la dynamique de l'erreur prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \frac{1}{\xi} H_p \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \phi(x_1, x_2) - \frac{1}{\xi^2} H_v \tilde{x}_1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Afin de mettre la dynamique de l'erreur sous une forme simple pour une analyse ultérieure, la transformation suivante est introduite :

$$\tilde{z}_1 = \tilde{x}_1, \quad \tilde{z}_2 = \xi \tilde{x}_2, \quad \tilde{Z} = \left(\tilde{z}_1^T, \tilde{z}_2^T \right)^T$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{z}}_1 &= \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \frac{1}{\xi} H_p \tilde{x}_1 \\
&= \frac{1}{\xi} \tilde{z}_2 - \frac{1}{\xi} H_p \tilde{z}_1 \\
&= \frac{1}{\xi} [\tilde{z}_2 - H_p \tilde{z}_1] \\
\xi \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 - H_p \tilde{z}_1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{z}}_2 &= \xi \dot{\tilde{x}}_2 = \xi \left[-\frac{1}{\xi^2} H_v \tilde{z}_1 + \phi(x_1, x_2) \right] \\
&= -\frac{1}{\xi} H_v \tilde{z}_1 + \xi \phi(x_1, x_2) \\
\xi \dot{\tilde{z}}_2 &= -H_v \tilde{z}_1 + \xi^2 \phi(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Alors l'équation (3.7) devient :

$$\begin{cases} \xi \dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2 - H_p \tilde{z}_1 \\ \xi \dot{\tilde{z}}_2 = -H_v \tilde{z}_1 + \xi^2 \phi(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.10}$$

L'équation de l'erreur dynamique sera de la forme suivante :

$$\xi \dot{\tilde{Z}} = A \tilde{Z} + \xi^2 b \phi(x_1, x_2) \tag{3.11}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -H_p & I_{2 \times 2} \\ -H_v & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Pour garantir la convergence de l'équation différentielle ci-dessus il faut que les valeurs propres de la matrice A soient situées dans le demi-plan gauche. Nous pouvons obtenir cette exigence tout en choisissant les meilleures valeurs des éléments de A. Comme c'est déjà décrit dans l'équation (3.5), les deux matrices H_p

et H_v sont composées de H_{p1} , H_{p2} , H_{v1} et H_{v2} . Par conséquent, on peut exprimer la matrice A en utilisant ces quatre paramètres, et le polynôme caractéristique est le suivant :

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -H_{p1} - \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -H_{p2} - \lambda & 0 & 1 \\ -H_{v1} & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -H_{v2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-H_{p1} - \lambda) \begin{vmatrix} -H_{p2} - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -H_{v2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -H_{p2} - \lambda & 1 \\ -H_{v1} & 0 & 0 \\ 0 & -H_{v2} & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (H_{p1}\lambda + \lambda^2) \begin{vmatrix} -H_{p2} - \lambda & 1 \\ -H_{v2} & -\lambda \end{vmatrix} + H_{v1} \begin{vmatrix} -H_{p2} - \lambda & 1 \\ -H_{v2} & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda^2 + H_{p1}\lambda + H_{v1})(\lambda^2 + H_{p2}\lambda + H_{v2}) \\
P_1 &= \lambda^2 + H_{p1}\lambda + H_{v1} \\
P_2 &= \lambda^2 + H_{p2}\lambda + H_{v2}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour que les valeurs de H_{p1} , H_{p2} , H_{v1} et H_{v2} deviennent les spectres des deux polynômes de l'équation (3.13) ci-dessus, elles doivent être situées dans le demi-plan gauche, ce qui peut être réalisé en choisissant des valeurs positives à ces quatre paramètres, alors les valeurs propres de la matrice A seront toutes situées dans le demi-plan gauche. Ce qui garantit la stabilité de la matrice A et selon la théorie de Lyapunov, il doit y avoir existé une matrice définie positive P qui est indépendante de ξ , pour être une solution de l'équation matricielle suivante :

$$A^T P + P A = -I \tag{3.14}$$

Pour le cas linéaire, c.-à-d. là où il n'y a pas un terme de second ordre dans la dynamique de l'erreur (3.11), en choisissant la matrice A stable, on peut garantir la convergence de l'erreur vers zéro.

Par contre, pour le cas non linéaire, le second terme doit également être pris en considération. Ici, la théorie de la stabilité de Lyapunov sera utilisée pour trouver la condition sous laquelle l'erreur pourrait converger vers zéro. Maintenant, utilisons la fonction quadratique $W(\tilde{X}) = \tilde{Z}^T P \tilde{Z}$ où la matrice P est la solution de l'équation de Lyapunov (3.14), en tant que candidat de la fonction Lyapunov, pour calculer la dérivée de $W(\tilde{X})$ le long des solutions de l'équation de l'erreur dynamique (3.11), la dérivée peut être obtenue :

$$\begin{aligned}
W(\tilde{X}) &= \tilde{Z}^T P \tilde{Z} \\
\frac{dW}{dt} &= \dot{\tilde{Z}}^T P \tilde{Z} + \tilde{Z}^T P \dot{\tilde{Z}} \\
&= \left[\frac{1}{\xi} (A\tilde{Z} + \xi^2 b\phi)^T \right] P \tilde{Z} + \tilde{Z}^T P \left[\frac{1}{\xi} (A\tilde{Z} + \xi^2 b\phi) \right] \\
&= \left(\frac{1}{\xi} A\tilde{Z} + \xi b\phi \right)^T P \tilde{Z} + \tilde{Z}^T P \left(\frac{1}{\xi} A\tilde{Z} + \xi b\phi \right) \\
&= \frac{1}{\xi} \tilde{Z}^T A^T P \tilde{Z} + \xi \phi^T b^T P \tilde{Z} + \frac{1}{\xi} \tilde{Z}^T P A \tilde{Z} + \xi \tilde{Z}^T P b \phi \\
&= \frac{1}{\xi} \tilde{Z}^T (A^T P + P A) \tilde{Z} + 2\xi \phi^T b^T P \tilde{Z}
\end{aligned}$$

Or, $A^T P + P A = -I$, alors :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\xi} \|\tilde{Z}\|^2 + 2\xi \phi^T b^T P \tilde{Z} \tag{3.15}$$

L'inégalité suivante est obtenue :

$$\frac{dW}{dt} \leq -\frac{1}{\xi} \|\tilde{Z}\|^2 + 2\xi \|Pb\phi(x_1, x_2)\| \|\tilde{Z}\| \quad (3.16)$$

On définit :

$$\gamma = \|Pb\phi\|; \quad c_T = \sup_{t \in [0, T]} \gamma \quad (3.17)$$

P et b sont deux matrices constantes et $\phi(x_1, x_2)$ est borné, alors γ est borné ce qui implique que c_T est borné pour tout $t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq -\frac{1}{\xi} \|\tilde{Z}\|^2 + \frac{1}{\xi} K_z \|\tilde{Z}\|, \forall t \in [0, T] \\ &= \frac{1}{\xi} (K_z(\xi, c_T) - \|\tilde{Z}\|) \|\tilde{Z}\| \end{aligned} \quad (3.18)$$

Avec $K_z(\xi, c_T) = 2\xi^2 c_T$ qui est un nombre défini, déterminé par des valeurs choisies de ξ et c_T , c'est-à-dire une fois l'observateur est créé la valeur de K_z restera inchangée.

D'après l'équation (3.16), $\frac{dW}{dt} < 0$ si $\|\tilde{Z}\| > K_z(\xi, c_T)$.

Maintenant, la discussion de la condition sous laquelle l'erreur va converger vers zéro est présentée. D'après la valeur de c_T , différents cas peuvent exister [36].

1. Sous l'hypothèse que $c_T < \infty$, et si la valeur initiale de la norme des erreurs est inférieure à la valeur de la fonction K_z , c'est-à-dire $\|\tilde{Z}(t_0)\| \leq K_z(\xi, c_T)$, alors à n'importe quel moment t toutes les normes de l'erreur vont garder des valeurs moins que la valeur de K_z , c'est-à-dire $\|\tilde{Z}\| \leq K_z(\xi, c_T), \forall t \in [0, T]$.

La raison est qu'une fois la norme des erreurs a une valeur plus grande que la valeur de la fonction K_z , à un moment donné t_1 , c'est-à-dire $\|\tilde{X}(t_1)\| > K_z(\xi, c_T)$, la dérivée de la fonction de Lyapunov, $\frac{dW}{dt}$ sera négative, ce qui diminuera $\|\tilde{Z}\|$ en tant qu'états du théorème de stabilité de Lyapunov. De plus, pour tout T fini, la valeur liée $K_z(\xi, c_T)$ de $\|\tilde{Z}\|$ peut être rendue arbitrairement petite en choisissant des valeurs suffisamment petites de ξ . Par conséquent, les erreurs entre les variables d'état et l'estimation observée pourraient être conservés dans une petite région en fonction de la valeur du paramètre ξ .

2. Sous l'hypothèse que la fonction $\gamma(t)$ est bornée entre $[0, \infty]$, c'est-à-dire $c = \sup_{t \in [0, \infty]} \gamma(t) < \infty$, comme l'analyse dans la condition ci-dessus, on peut conclure que si $\|\tilde{Z}(t_0)\| > K_z(\xi, c_T)$, alors $\|\tilde{Z}(t)\| \leq K_z(\xi, c_T), \forall t \in [0, \infty]$. Autrement, si $\|\tilde{Z}(t_0)\| > K_z(\xi, c_T)$, ce qui rend la valeur de $\frac{dW}{dt}$ négative et diminue la valeur de $\|Z(t)\|$, alors il doit exister un $t_\xi > 0$ tel que $\|\tilde{Z}(t)\| \leq K_z(\xi, c_T), \forall t > t_\xi$.

Donc pour que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit strictement négative il faut que $K_z(\xi, c_T)$ soit petit et cela peut avoir lieu en choisissant une valeur très petite de ξ .

3.2. Conclusion

Dans ce chapitre, un observateur à gain-élevé a été développé, l'étude de la convergence de l'erreur vers zéro a été démontrée en utilisant le théorème de stabilité de Lyapunov. Après avoir démontré la convergence, nous passons à l'étape la plus importante de notre étude, qui consiste à mettre en œuvre nos lois de contrôle. Le chapitre suivant, présente la conception d'une loi de contrôle linéaire, soit la commande Linéaire-Quadratique.

Chapitre 4

CONTRÔLEUR LINÉAIRE

Jusqu'à présent le développement des deux modèles de la membrure flexible ainsi que la conception de l'observateur d'états sont présentés. Maintenant il faut commencer par l'étape suivante, le développement des lois de contrôle.

Dans ce chapitre, une loi de contrôle classique est développée, soit le contrôleur Linéaire-Quadratique (LQR) qui sera appliqué sur le modèle linéaire. Les études et les analyses de cette technique de contrôle sont bien détaillées dans ce qui suit. Les simulations de la loi sont réalisées avec le logiciel MATLAB/SIMULINK, avant de commencer par l'application de cette technique sur le montage physique fabriqué par la compagnie QUANSER. Enfin, une discussion des résultats est présentée.

4.1. Commande optimale (contrôle linéaire-quadratique)

La commande optimale a attiré l'attention de plusieurs chercheurs depuis nombreuses années. Le contrôle linéaire-quadratique, ou encore le gain de Kalman, est une commande par retour d'état optimale qui génère une réponse optimale tout en minimisant une fonction de coût quadratique qui est basée sur les énergies de commande et de sortie.

Cette fonction de coût est de la forme suivante [24] :

$$J = \frac{1}{2} \int (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.1)$$

On suppose habituellement que les matrices de pondération Q et R sont constantes et diagonales et que la matrice Q doit être une matrice semi-définie positive et la matrice R soit une matrice définie positive.

L'objectif de ce contrôleur est de créer une commande pour satisfaire les critères de performance et d'atteindre les performances désirées en réduisant l'effort de contrôle.

Le contrôleur LQR présente plusieurs avantages tels que [25] :

- Il est défini d'une manière à fournir la plus petite erreur possible à son entrée, c'est-à-dire une ou plusieurs sorties du système contrôlé, associé à une minimisation de la sortie de contrôle.
- Le contrôleur génère simplement un système stable, sans optimisation explicite.
- La commande optimale LQR peut être utilisée pour les systèmes à plusieurs variables; la procédure de conception est la même que pour les systèmes à entrée unique, sortie unique.
- Il offre un système robuste.
- Il peut prendre en charge les perturbations présentes dans le système.

Malgré ces avantages la commande optimale présente encore des désavantages :

- En cas de déséquilibre dû à une incertitude des paramètres du modèle linéaire, des modifications de l'installation (modifications de la vitesse du véhicule ou de la machine ou du niveau de puissance d'une centrale) ou des non-linéarités, le contrôleur résultant se dégrade et le système peut même devenir instable.
- Le LQR est un contrôleur de retour d'état. Les états d'un système peuvent avoir une signification physique (par exemple, vitesse, accélération), mais ils n'ont parfois aucune interprétation physique. Par conséquent, il peut être difficile d'obtenir les états à utiliser pour le retour d'information. Pour contourner ce problème, une autre fonction, appelée observateur, est

nécessaire pour estimer les valeurs de l'état. Cela rend le système encore plus complexe.

Pour résoudre ce problème de commande optimale il faut définir le Hamiltonien de la fonction de coût qui est de la forme suivante [24] :

$$H = \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru) + \lambda^T (Ax + Bu) \quad (4.2)$$

où λ^T est choisi de façon à avoir : $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$.

Les conditions d'optimalité sont présentées comme suit :

1. La première condition donne les équations d'états du système :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + Bu \quad (4.3)$$

2. La deuxième condition donne les équations d'états adjointe :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(Qx + A^T \lambda) \quad (4.4)$$

3. La troisième condition est appelée la condition de stationnarité :

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda \quad (4.5)$$

On peut déterminer l'expression de la loi de commande en se basant sur l'équation (4.5) :

$$u(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t) \quad (4.6)$$

En remplaçant l'équation de la loi de contrôle dans (4.3) on obtient :

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T \lambda \quad (4.7)$$

Le système Hamiltonien homogène est construit à partir des deux équations (4.4) et (4.7) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

À n'importe quel instant t , on a :

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \quad (4.9)$$

où P est une matrice semi-définie positive qui est la solution de l'équation de Riccati.

L'expression de Riccati est calculée en dérivant l'équation (4.9) et en utilisant (4.4) :

$$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (4.10)$$

En régime permanent cette équation devient :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.11)$$

D'habitude on suppose que les matrices de pondération Q et R sont constantes et diagonales. Dans le but de conserver l'intégrale des expressions $x^T Q x$ dans la fonction de coût minimum et non-négative, la matrice Q doit être une matrice semi-définie positive. Pour garder l'intégrale dans la fonction de coût petite, il faut augmenter les coefficients de la matrice Q qui diminue la valeur maximale des états. De même, à partir du terme $u^T R u$ on comprend aisément que l'on doit payer un coût plus élevé pour un effort de contrôle plus important. Puisque le coût du contrôle doit être une quantité positive, la matrice R doit être définie positive.

Ces deux matrices peuvent être considérées comme étant les paramètres de réglage du contrôleur, en observant Q comme une erreur de pénalité d'état et R la pénalité d'entrée de la commande. Pour réduire l'amplitude du contrôle u , il suffit de minimiser l'amplitude de la matrice Q , mais il faut prendre en considération que cela

va diminuer la vitesse de réponse du système. On peut constater que pour avoir une réponse rapide avec un effort de contrôle réduit, il faut que les matrices de pondération Q et R soient bien ajustées [25].

Maintenant on peut calculer la matrice de Riccati P à partir de l'équation (4.11). Pour calculer la loi de contrôle, il suffit d'utiliser la matrice P dans l'expression (4.9) et la remplacer dans (4.6) :

$$u(t) = -R^{-1}B^T P x(t) \quad (5.12)$$

ou d'une façon générale :

$$u(t) = K_{opt} x(t) \quad (4.13)$$

avec : $K_{opt} = -R^{-1}B^T P$.

La procédure de conception LQR garantit une boucle de retour qui stabilise le système et se caractérise par:

1. Choix de matrices de conception Q et R liées aux performances souhaitées en boucle fermée.
2. Introduire une matrice de Riccati P.
3. Résoudre l'équation de Riccati.
4. Obtenir une solution qui garantit la stabilisation du système.

La conception du contrôleur LQR peut être résumée en deux étapes :

- La première : la résolution de l'équation de Riccati (4.11) pour une matrice P définie positive.
- La deuxième : Remplacer la matrice P obtenue dans (4.12) et l'équation qu'on obtient donne la loi de contrôle optimale.

4.2. Simulation

Le schéma bloc du système contrôlé par le contrôleur optimal en intégrant l'observateur à gain élevé (H-G-O) déjà développé dans le Chapitre 3 est illustré à la Figure 7 et l'implémentation du modèle dans Matlab/Simulink est présentée à la Figure 8. Concernant les valeurs des deux matrices de pondérations Q et R , plusieurs simulations sont déjà faites afin de trouver les meilleures valeurs :

$$Q = \text{diag}[24, 24, 0, 0] \text{ et } R = 5$$

D'où les valeurs de gain K sont les suivants :

$$K = [2.1909 \quad 0.2236 \quad 0.1548 \quad 0.1764]$$

Pour le modèle en boucle fermée, les valeurs propres qu'on obtient sont les suivantes :

$$\{-8.52 + 36.07i, -8.52 - 36.07i, -4.077, -13.8441\}$$

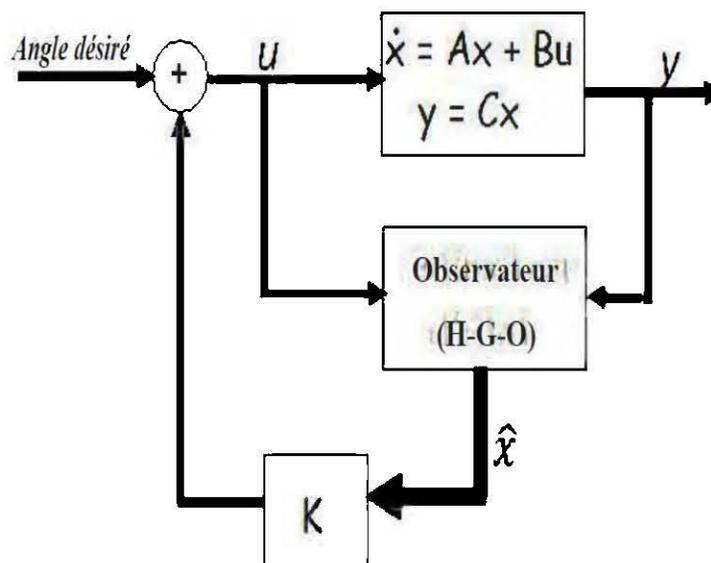


Figure 7: Schéma bloc du système contrôlé

La Figure 8 présente l'implémentation du contrôleur optimal et de l'observateur dans le logiciel Matlab/Simulink en utilisant comme entrée une courbe polynomiale d'ordre 3 avec un temps de 2 s pour atteindre la valeur finale.

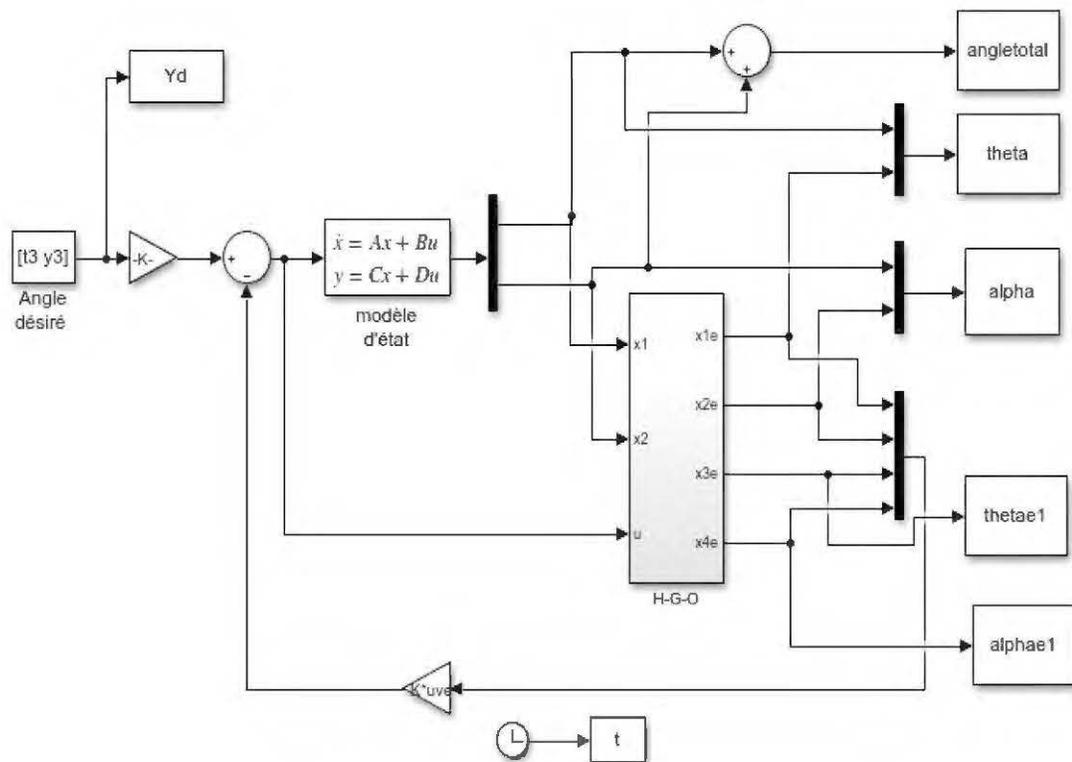


Figure 8: Implémentation du modèle en boucle fermée dans Matlab/Simulink.

Le bloc « modèle d'état » représente le modèle linéaire de notre système développé au Chapitre 2, alors que le bloc « H-G-O » est l'estimateur d'état à gain élevé dont la conception de cet estimateur dans Simulink est illustrée dans la Figure (9).

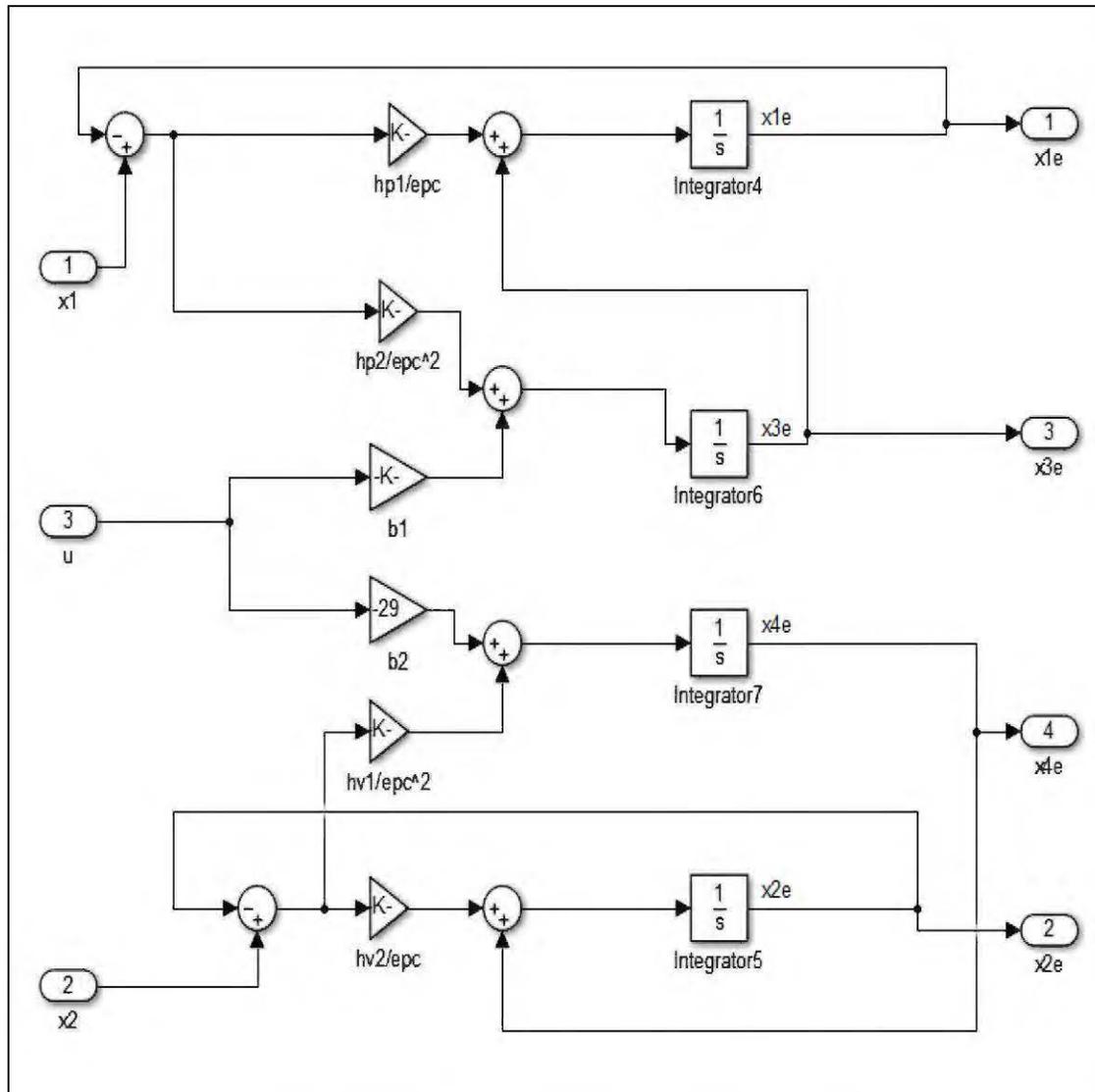


Figure 9 : Vue détaillé du 'High-Gain-Observer'

D'où α_1 , α_2 , α_3 , α_4 et $\text{epc} = \xi$ sont les paramètres de l'estimateur dont leurs valeurs sont les suivantes :

$$epc = 0.1$$

$$hp_1 = \alpha_1 = 45$$

$$hp_2 = \alpha_2 = 45$$

$$hv_1 = \alpha_3 = 10$$

$$hv_2 = \alpha_4 = 10$$

Les résultats de la commande optimale ainsi que celle de l'observateur sont illustrés aux figures 10 et 11.

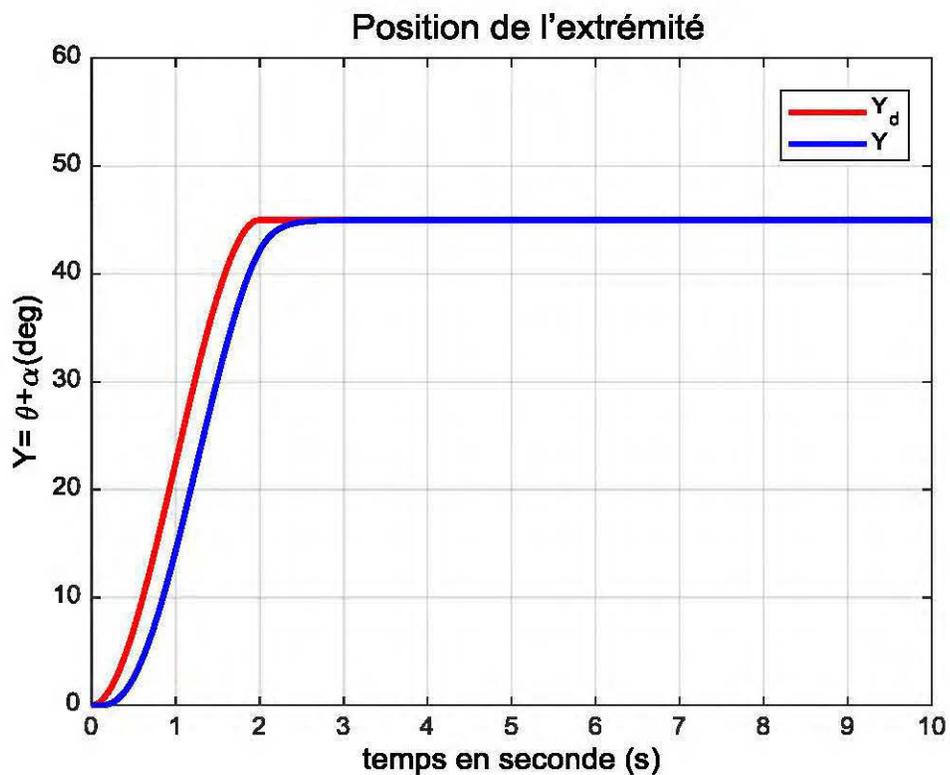


Figure 10: Position du bras flexible contrôlé par LQR-Simulation

À partir de la figure 10, on remarque que les oscillations sont éliminées, la position désirée est atteinte après 2.5 s avec une erreur statique nulle en régime permanent.

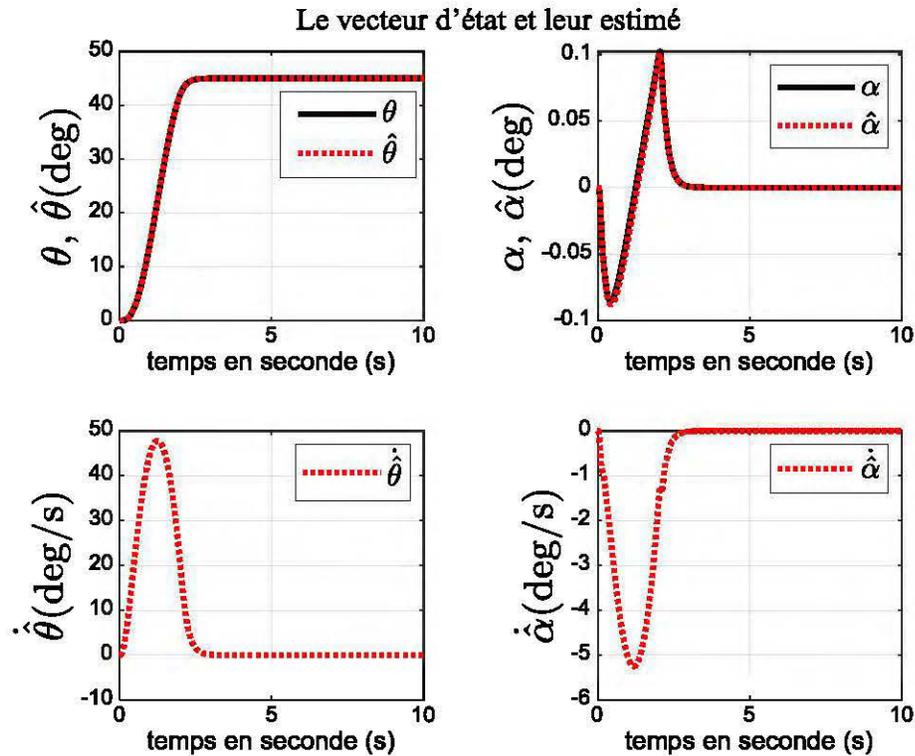


Figure 11: Les résultats de l'observateur à gain élevé-Simulation.

Concernant les résultats de l'observateur, on peut remarquer facilement, en se référant à la figure 11, que l'estimateur joue son rôle d'une façon satisfaisante avec un temps de réponse très rapide et que l'erreur en régime permanent est nulle.

Les résultats obtenus en simulation montrent l'efficacité et la performance du contrôleur et de l'estimateur sur la membrure flexible. Il reste alors à les tester sur le montage réel. L'implémentation et les résultats de la technique de contrôle et de l'observateur sont présentés dans la partie suivante.

Les résultats de la commande ainsi que ceux de l'estimateur d'état sont illustrés aux figures 13 et 14.

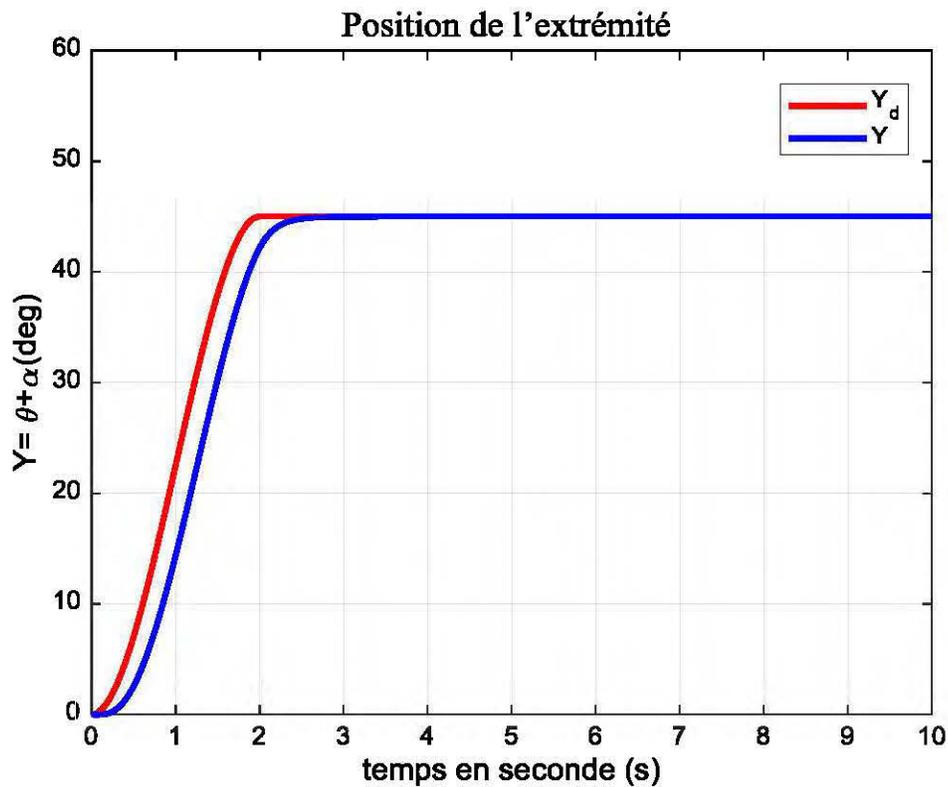


Figure 13: Position de l'extrémité du bras- expérimental

D'après la figure 13, on remarque que contrairement aux résultats de la simulation, la sortie dépasse la position désirée et des oscillations d'amplitude de 0.15 degré se propagent jusqu'à la fin de la simulation. Ces oscillations peuvent-être due à plusieurs facteurs, soient les erreurs de mesure, les frottements secs, imperfections du système et du calibrage, aux bruits de mesure supposés négligeables et aux modes élevés qui ont été négligés.

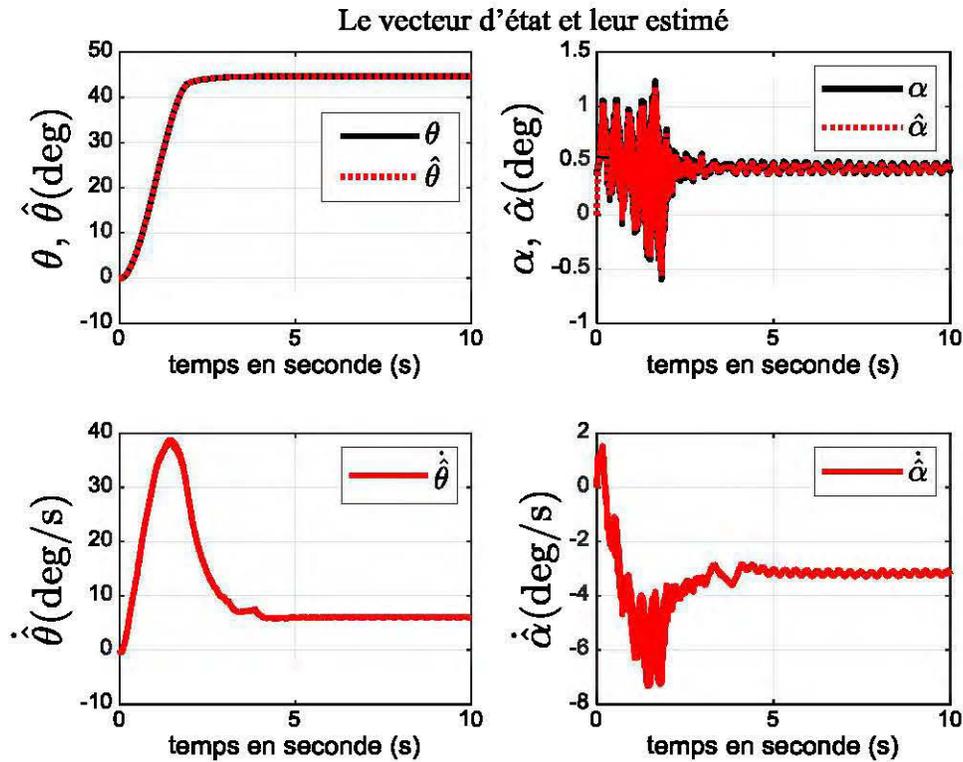


Figure 14: Les résultats de l'observateur à gain élevé-expérimental

À partir de la figure 14, on remarque que les résultats de l'observateur en simulation et en pratique sont identiques, le temps de réponse est très rapide et l'erreur en régime permanent est nulle. Cet estimateur d'état peut être utilisé plus tard pour le contrôle par mode de glissement qui nécessite de connaître les quatre états de notre système.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, une loi de contrôle optimale est développée, soit le contrôleur linéaire quadratique. La conception de ce contrôleur est faite en se basant sur le modèle linéaire de la membrure flexible par la méthode des modes supposés. Cette technique suppose que les quatre états du modèle soient mesurables ce qui n'est pas le cas, pour cela l'estimateur d'état à gain élevé développé au Chapitre 2, a été utilisé pour estimer les valeurs de ces quatre états dans le but de réaliser ce contrôleur.

Les simulations de ce contrôleur sont réalisées en utilisant le logiciel Matlab/Simulink et les travaux expérimentaux sont réalisés sur le système à une membrure flexible de la compagnie Quanser.

Dans le but d'avoir une réponse sans oscillations et avec un erreur statique nulle, le chapitre suivant présente le développement d'une loi de contrôle non-linéaire qui est la méthode de mode de glissement.

Chapitre 5

CONTRÔLEUR NON-LINÉAIRE

5.1. Commande par mode de glissement

Dans le cas des systèmes linéaires la loi de contrôle classique LQR, déjà développée dans la section précédente, à montrer une efficacité très importante. Mais dans le cas des systèmes non-linéaires où les conditions sur la précision et autres caractéristiques dynamiques du système sont précises, ce genre de contrôleur peut se révéler très peu efficace. Dans ce cas il faut développer des lois de contrôle qui sont insensibles aux perturbations et aux non linéarités. Les lois de commande non-linéaires constituent une solution à ces problèmes [27].

Dans ce travail, on a utilisé la commande par mode de glissement qui est basée sur la commutation de fonctions des variables d'état dans le but de les utiliser pour créer un hyperplan de glissement ou bien une surface de glissement afin d'obliger la dynamique du système à coïncider avec celle définie par l'équation de l'hyperplan. Une fois l'état se trouve sur la surface de glissement, le système se trouve en régime glissant et il devient insensible aux perturbations tant que les exigences du régime glissant sont assurées.

Alors on peut constater que cette technique est devisée en deux phases : la première consiste à guider le vecteur d'état vers la surface de glissement, la deuxième, ce vecteur doit glisser cet hyperplan jusqu' à atteindre le point d'équilibre. Cette surface de glissement est représentée à la figure 15.

Donc la conception de la commande par mode de glissement est constituée de deux étapes [28] :

- Premièrement : bien choisir la surface de glissement pour garantir la convergence du vecteur d'état vers le point d'équilibre désiré.
- Deuxièmement : développer une loi de commande qui assure que le vecteur d'état atteigne la surface de glissement.

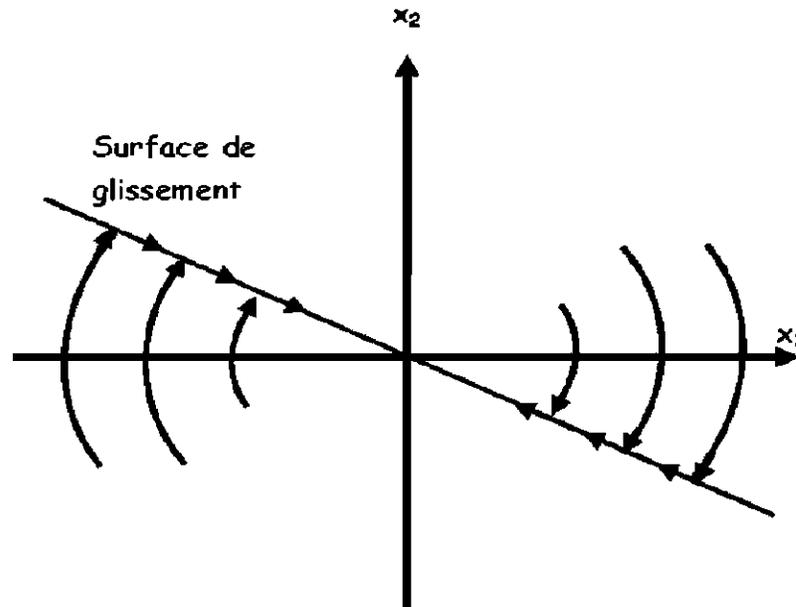


Figure 15: Surface de glissement.

Considérons le modèle non-linéaire du bras flexible dont la dynamique est donnée par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= 1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4*u \\
 \dot{x}_4 &= -1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29*u
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

L'équation de sortie est :

$$Y = \theta + \alpha = x_1 + x_2$$

Tout d'abord, il faut choisir la fonction de la surface de glissement d'où l'expression de cette équation est la suivante [29] :

$$S = \dot{e} + c e \tag{5.2}$$

où c est un coefficient positif, e est l'erreur de suivi définie par $e = y - y_d$ et y_d est l'angle désiré.

Lorsque le vecteur d'état atteint la surface de glissement $S = 0$, alors le système vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e} + c e = 0 \tag{5.3}$$

Une fois l'équation de la surface de glissement est choisie on peut passer à l'étape suivante qui consiste à faire la conception de la commande qui puisse guider le vecteur d'état vers la surface de glissement tout en vérifiant l'équation suivante :

$$S \cdot \dot{S} < 0, \forall t \tag{5.4}$$

Si cette condition est vérifiée, alors l'équation de la surface de glissement et sa dérivée ont de signes contraires à n'importe quel temps t . Ce qui signifie que $x = 0$

est le centre d'attraction de S . Alors la vérification de l'équation (5.4) garanti la convergence de S vers 0. Le temps durant lequel la surface de glissement S va converger vers 0, ou le temps d'atteinte dépend toujours du choix de \dot{S} pour cela on choisit \dot{S} sous la forme suivante :

$$\dot{S} = -K \cdot \text{sign}(S) \quad \forall t \quad (5.5)$$

avec $K > 0$

et $\text{sign}(s)$ est la fonction sign définit par :

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

Cette équation peut vérifier la condition (5.4) en tout temps, maintenant il faut choisir notre commande. Ceci implique d'exprimer \dot{S} en fonction de la commande u .

Dérivant l'équation (5.2) on obtient :

$$\dot{S} = \ddot{e} + c\dot{e} \quad (5.6)$$

Où :

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= \ddot{y} - \ddot{y}_d \\ &= \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - \ddot{y}_d \\ &= 1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4u \\ &\quad - 1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29u - \ddot{y}_d \\ &= 254.7x_2 - 15x_3 + 0.98x_2x_3^2 + 3.74x_2x_3x_4 + 26.4u - 0.85x_2x_3^2 \\ &\quad - 1.96x_2x_3x_4 - \ddot{y}_d \\ &= 254.7x_2 - 15x_3 + 0.13x_2x_3^2 + 1.78x_2x_3x_4 + 26.4u - \ddot{y}_d \end{aligned} \quad (5.7)$$

Alors :

$$\dot{S} = 254.7x_2 - 15x_3 + 0.13x_2x_3^2 + 1.78x_2x_3x_4 + 26.4u - \ddot{y}_d + c\dot{e} = -Ksign(S) \quad (5.8)$$

Pour que l'équation (5.5) soit vérifiée, il faudrait que :

$$254.7x_2 - 15x_3 + 0.13x_2x_3^2 + 1.78x_2x_3x_4 + 26.4u - \ddot{y}_d + c\dot{e} = -Ksign(S) \quad (5.9)$$

Pour trouver la loi de commande qui permet au vecteur d'état d'accéder la surface de glissement et de converger vers l'angle désirée, il faut isoler la commande dans (5.9), on obtient alors la loi suivante :

$$u = \frac{1}{26.4} [\ddot{y}_d - 254.7x_2 + 15x_3 - x_2x_3(0.13x_3 + 1.78x_4) - c\dot{e}] - \frac{1}{26.4} K.sign(S) \quad (5.10)$$

D'après cette équation on peut constater que la loi de commande est constituée de deux parties, la première est appelée commande équivalente qui est de nature continu :

$$u_{eq} = \frac{1}{26.4} [\ddot{y}_d - 254.7x_2 + 15x_3 - x_2x_3(0.13x_3 + 1.78x_4) - c\dot{e}] \quad (5.11)$$

La deuxième partie est appelée commande discontinue qui est de nature discontinu :

$$u_{disc} = -\frac{1}{26.4} K.sign(S) \quad (5.12)$$

Chacun de ces deux termes a son rôle. Une fois la surface de glissement $S = 0$ est atteinte, la commande discontinue s'annule et seulement le terme de la commande équivalente va subsister. Cela veut dire que la commande discontinue a pour rôle de guider le vecteur d'état vers la surface de glissement. Alors que le rôle de la commande équivalente est de maintenir le vecteur d'état sur la surface de glissement. Nous déduisons alors que la commande a un rôle double, guider le vecteur d'état sur

la surface de glissement et le garder sur cette surface pour qu'il converge vers le point d'équilibre. La figure 16 illustre le fonctionnement de la commande.

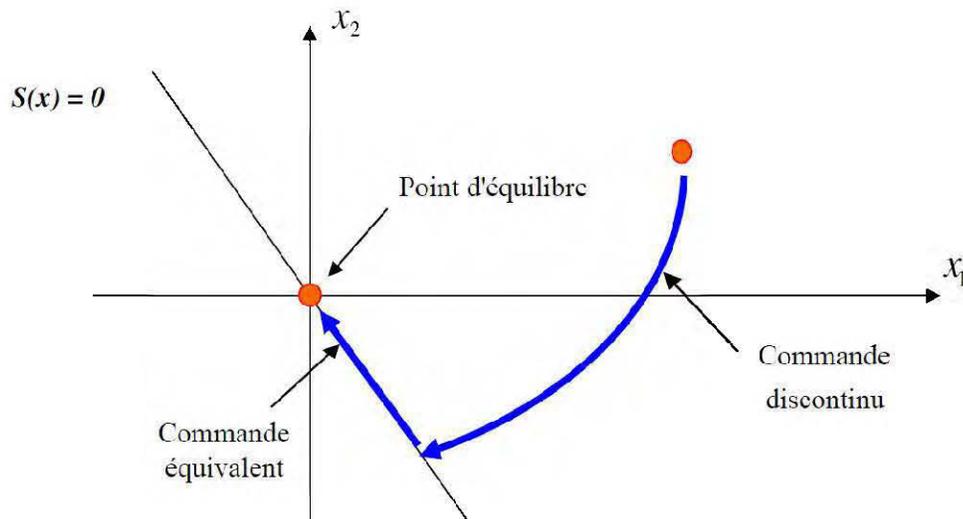


Figure 16: Les différentes phases de la commande par mode de glissement

Dans le but de déterminer la stabilité du contrôleur, on introduit l'équation de la loi de commande (5.10) dans celle de la dérivée de la surface de glissement (5.8) :

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= 254.7x_2 - 15x_3 + 0.13x_2x_3^2 + 1.78x_2x_3x_4 + 26.4u - \ddot{y}_d + \dot{c}\dot{e} \\
 &= 254.7x_2 - 15x_3 + 0.13x_2x_3^2 + 1.78x_2x_3x_4 + 26.4 \left[-\frac{1}{26.4} (254.7x_2 \right. \\
 &\quad \left. - 15x_3 + 0.13x_2x_3^2 + 1.78x_2x_3x_4 - \ddot{y}_d + \dot{c}\dot{e} + K\text{sign}(S)) \right] - \ddot{y}_d + \dot{c}\dot{e} \\
 &= 254.7x_2 - 15x_3 + 0.13x_2x_3^2 + 1.78x_2x_3x_4 - 254.7x_2 + 15x_3 \\
 &\quad - 0.13x_2x_3^2 - 1.78x_2x_3x_4 + \ddot{y}_d - \dot{c}\dot{e} - K\text{sign}(S) - \ddot{y}_d + \dot{c}\dot{e} \\
 &= -K\text{sign}(S)
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\dot{S} = -K \text{sign}(S) \quad (5.13)$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov de la forme suivante :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (5.14)$$

Dérivant cette fonction :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S\dot{S} \\ &= S(-K \text{sign}(S)) \end{aligned} \quad (5.15)$$

D'après l'équation (5.15) on peut constater que la dérivée de la fonction de Lyapunov est toujours négative alors le contrôleur est stable.

5.2. Simulation

La loi de commande est développée, maintenant il faut l'appliquer pour savoir comment le système va réagir. La simulation est faite en utilisant le logiciel MATLAB/SIMULINK[®]. Cette simulation est réalisée en se basant sur le modèle non-linéaire en utilisant un échelon de 45° comme entrée et un gain $K = 18$ de la commande discontinue. La figure 17 montre une présentation en schéma bloc du système en boucle fermée et l'implémentation du contrôleur dans le logiciel Matlab est présentée à la figure 18.

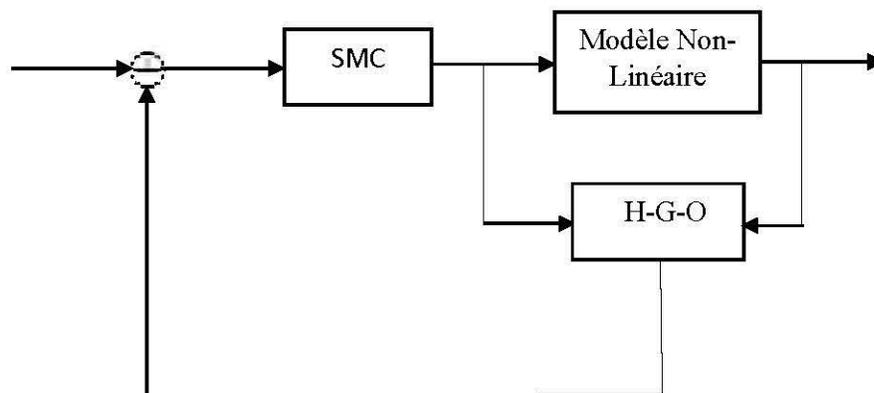


Figure 17: Schéma bloc du système contrôlé

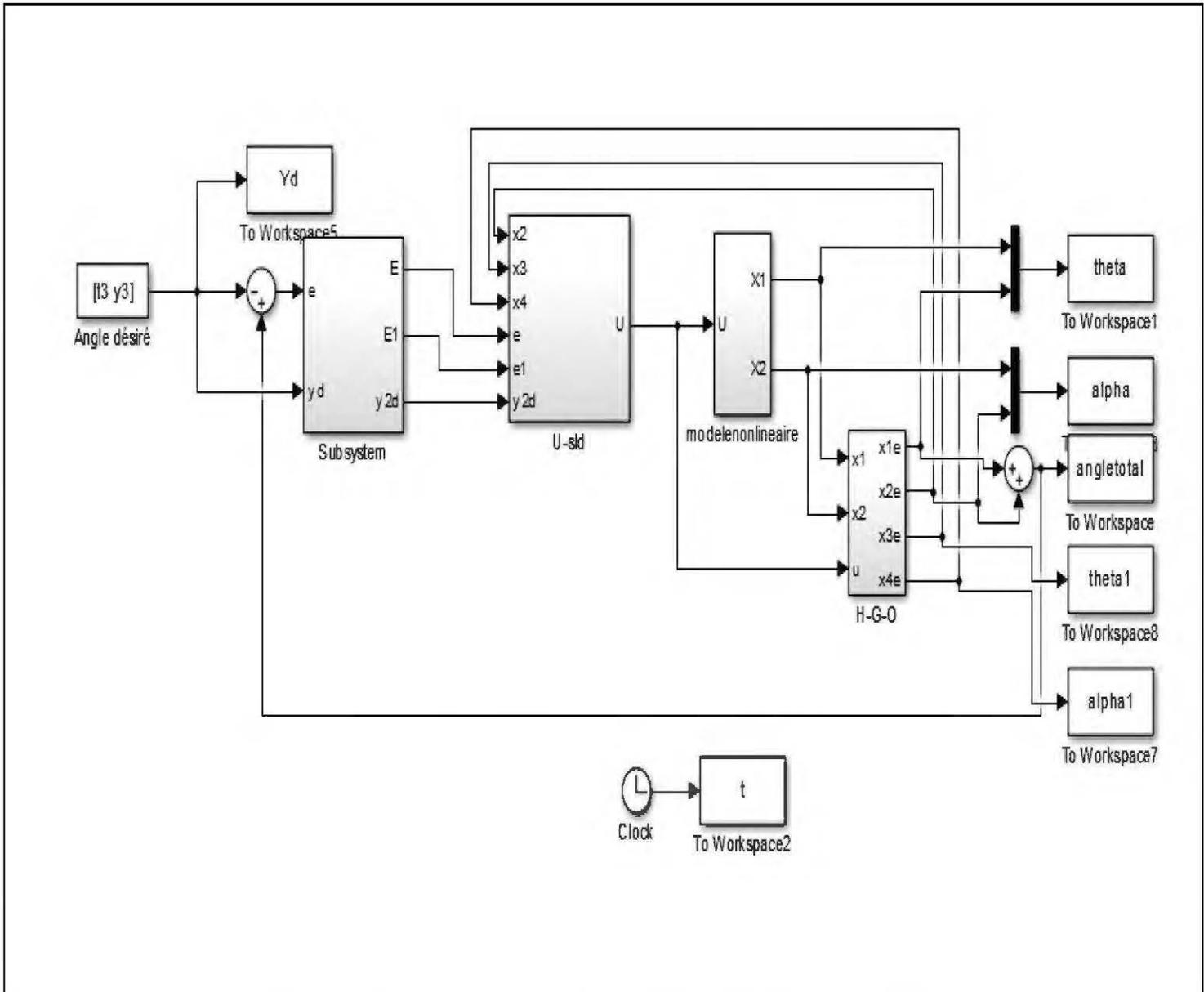


Figure 18: Implémentation du modèle contrôlé dans Matlab/Simulink.

Le bloc 'H-G-O' présente l'estimateur d'état à gain élevé qui est pareil à celui qu'on a utilisé dans la simulation de la commande optimale. Le bloc 'modèle non-linéaire' présente le modèle non-linéaire du système et les deux blocs 'Subsystem' et 'U-sld' constituent la loi de commande. Les blocs 'modèle non-linéaire', 'Subsystem' et 'U-sld' sont illustrés aux figures 19 et 20.

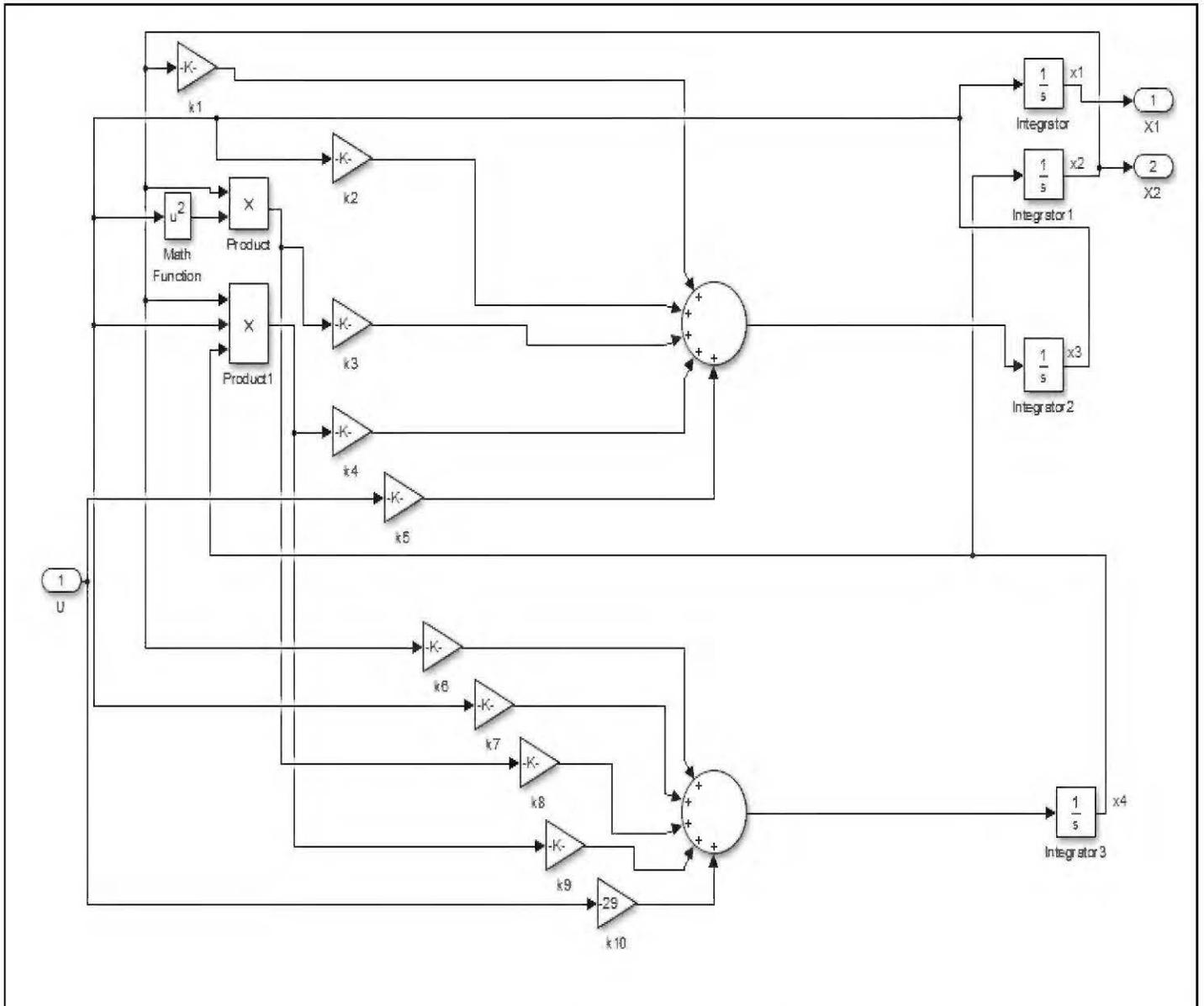


Figure 19 : Vue détaillé du 'Modèle non-linéaire'

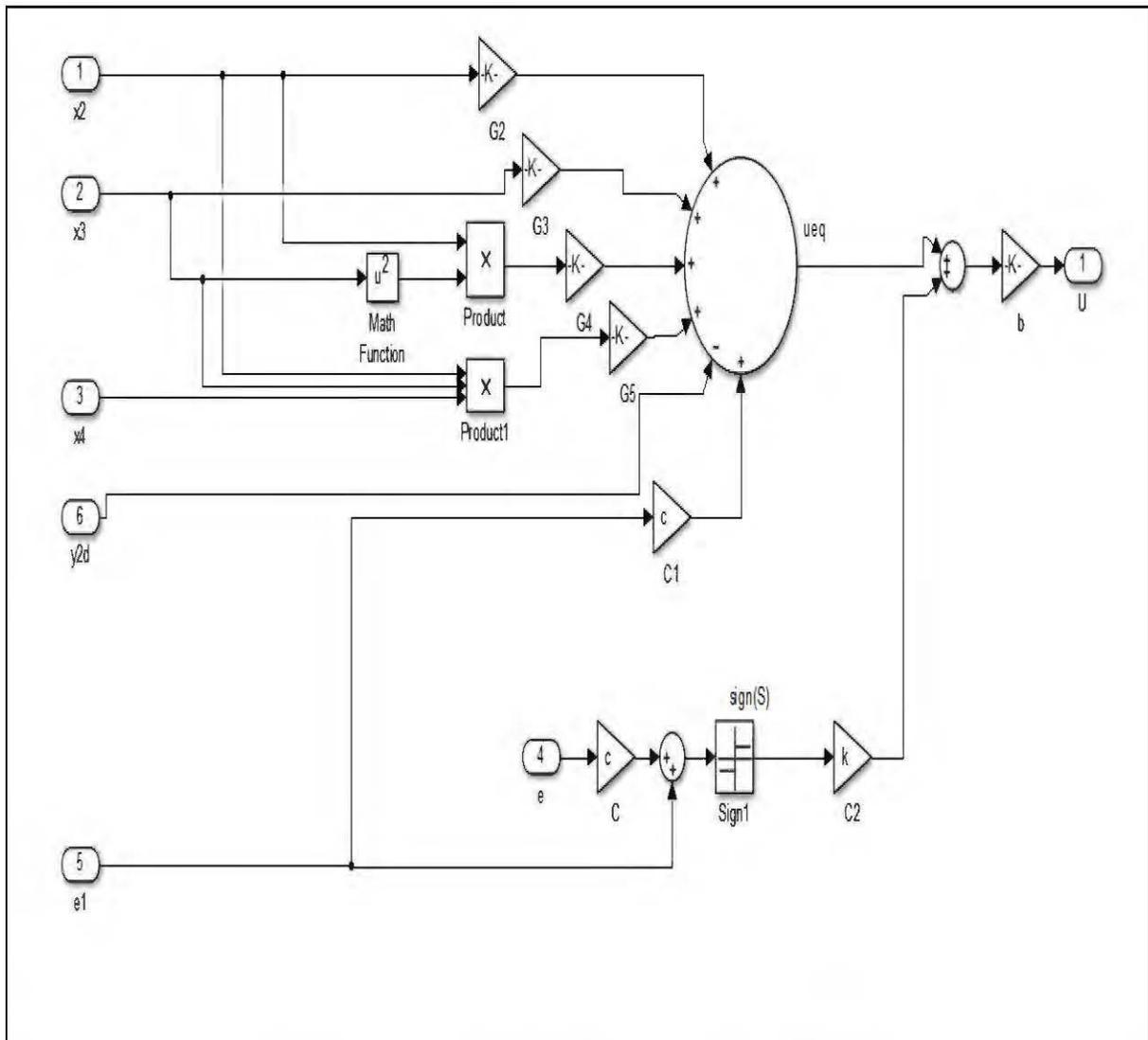


Figure 20 : Vue détaillé du contrôleur 'SLD'

Les résultats de la simulation de ce schéma bloc sont illustrés aux figures 21 et 22.

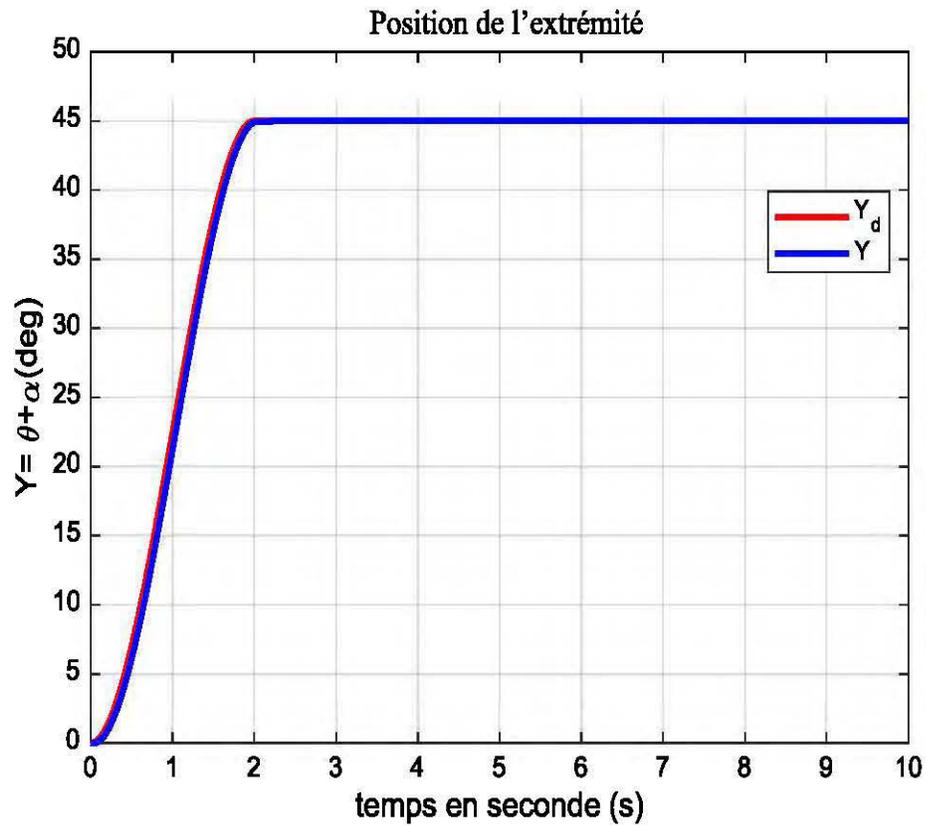


Figure 21: Position de l'extrémité du bras contrôlé par mode glissant-Simulation

En se référant à la figure 21, on peut bien remarquer que la réponse du système suit l'angle désiré et que l'erreur en régime permanent est nulle.

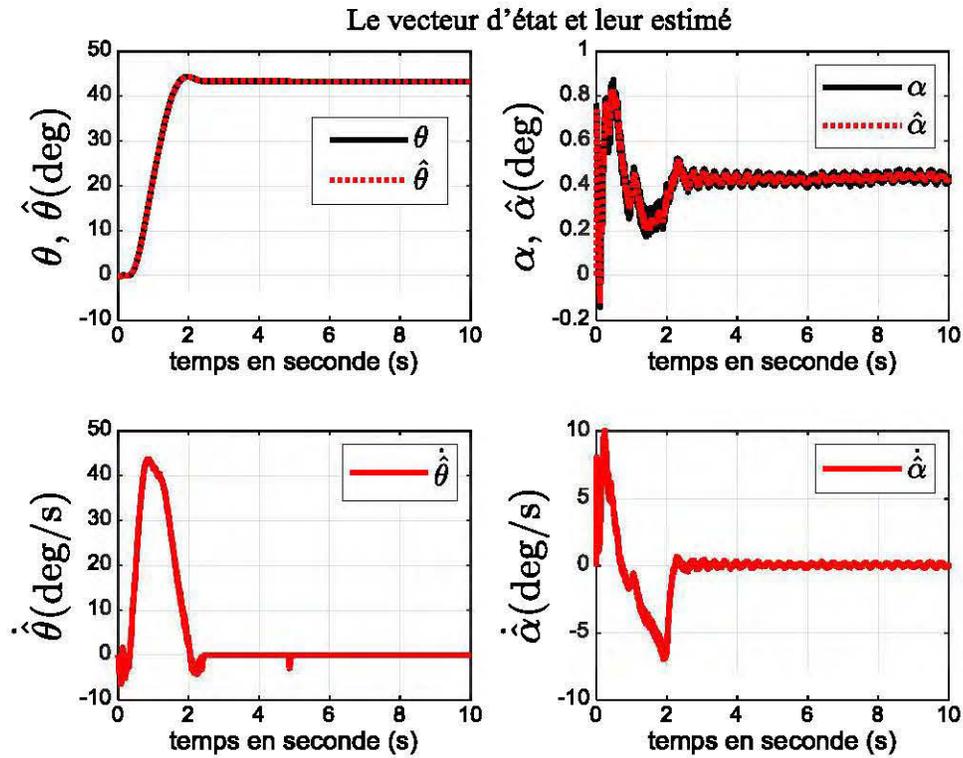


Figure 22 : Les paramètres d'état et leurs estimés-simulation.

Tout d'abord commençant par la figure 22, on remarque que les variables d'état et leurs estimés se superposent dans chacun des quatre graphiques ci-dessus, c'est-à-dire que l'erreur en régime permanent est nulle. Alors l'observateur joue bien son rôle.

5.3. Expérimentation

Dans le but de tester l'efficacité du contrôleur sur le montage physique, la loi de commande ainsi que l'estimateur sont appliqués sur le système à un bras flexible de Quanser. La figure 23 montre l'implémentation du système de commande en temps réel.

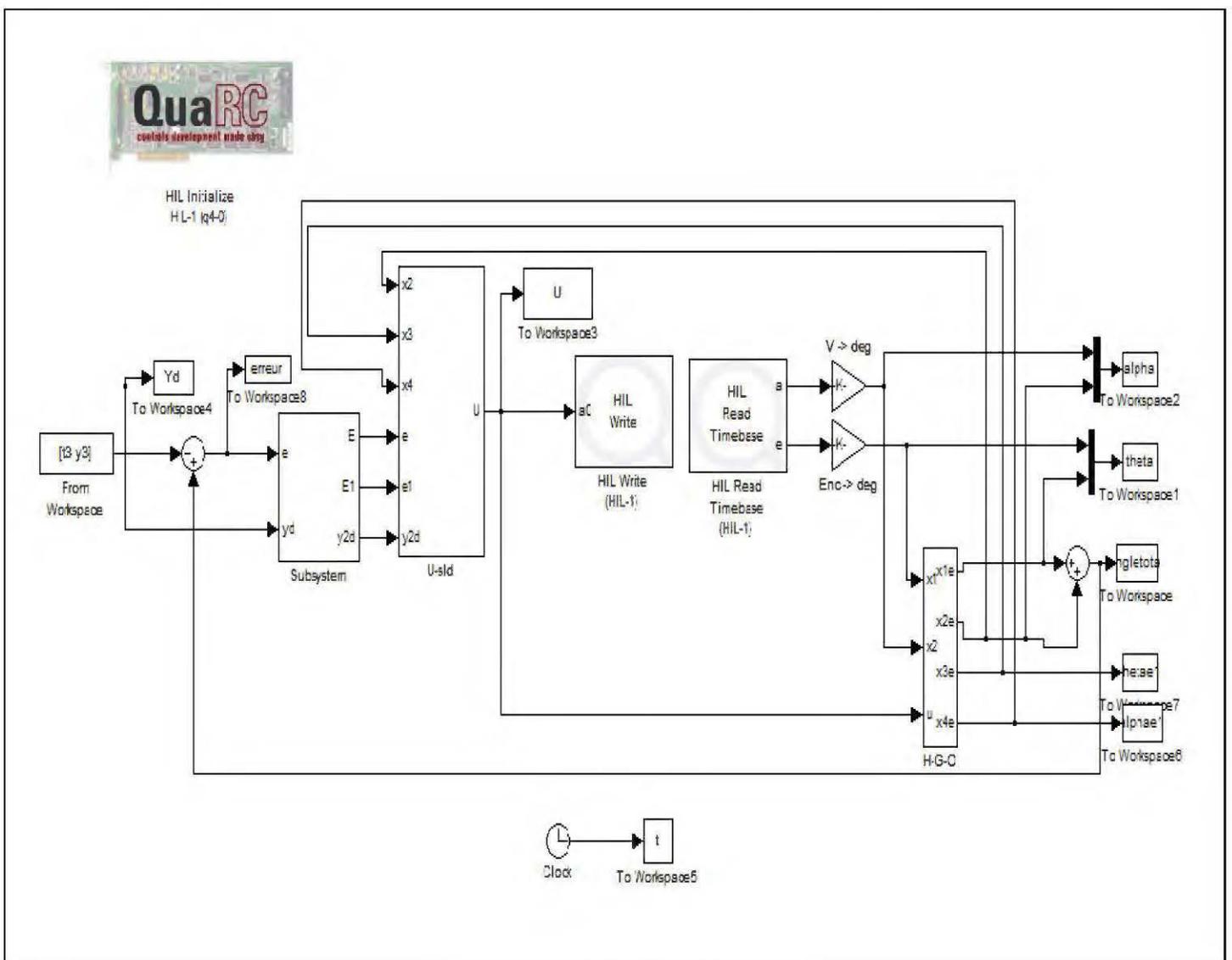


Figure 23 : Montage pratique-SLD

Les résultats de la loi de commande ainsi que ceux de l'estimateur d'état sont illustrés aux figures 24 et 25.

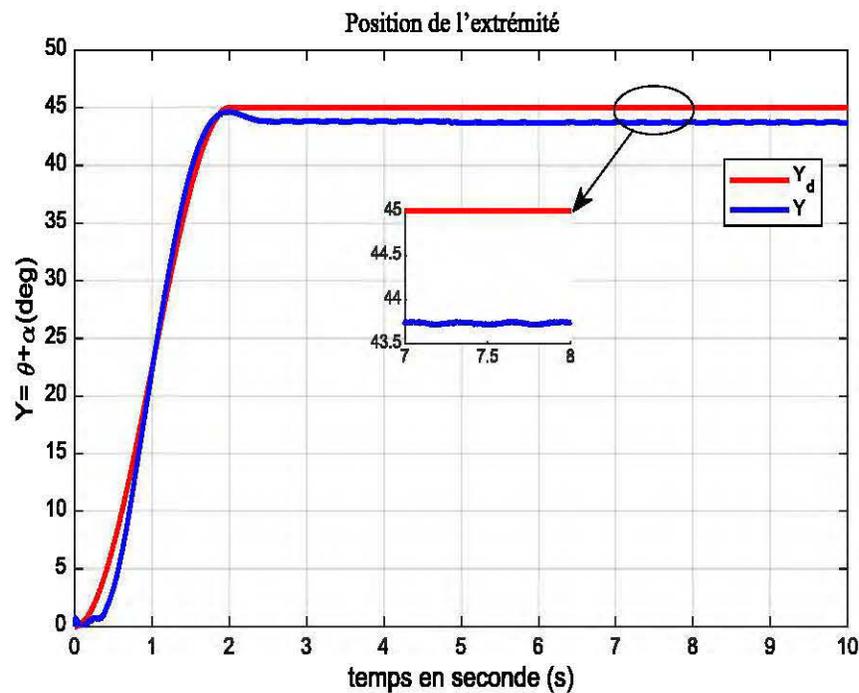


Figure 24 : Position de l'extrémité du bras-expérimental

En se référant à la figure 24, on peut bien remarquer que l'erreur en régime permanent ne s'annule pas ainsi que des petites oscillations se propagent jusqu'à la fin de la simulation. La cause de ces oscillations est le phénomène de broutement ou « chattering » en anglais qui est présent lors de la phase de glissement ce qui provoque des oscillations de la trajectoire le long de la surface de glissement.

Les larges vibrations et l'erreur en régime permanent peuvent aussi être due aux termes non-linéaire qu'on a rajouté.

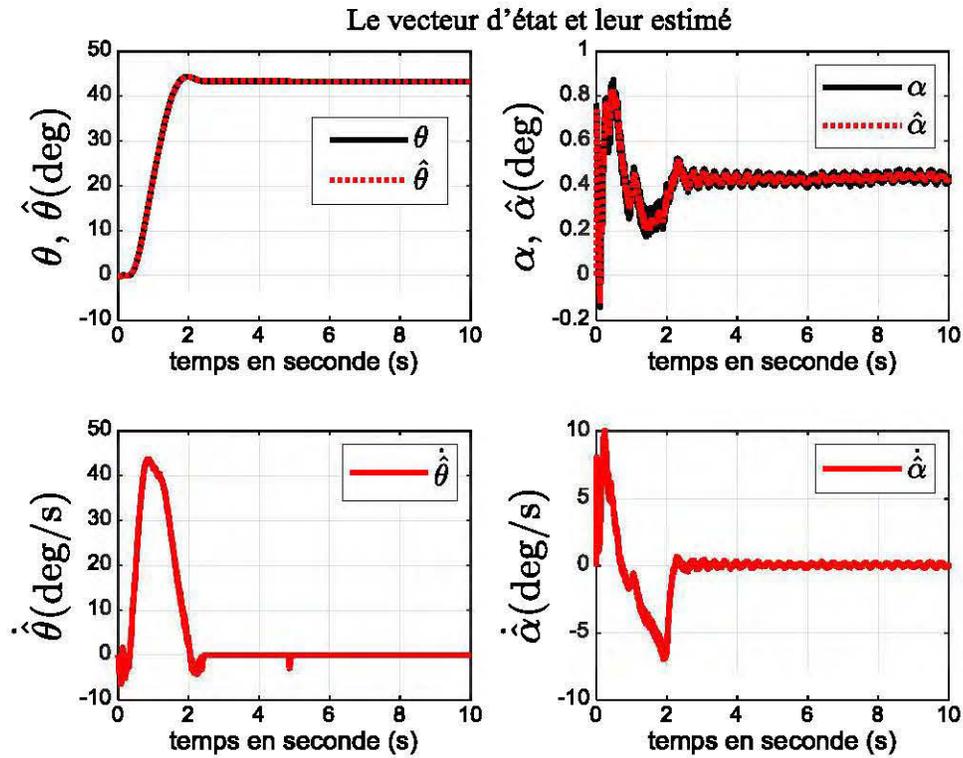


Figure 25 : Les résultats de l'observateur à gain élevé-expérimental

La figure 25 montre que, identiquement aux résultats qu'on a eu dans la simulation de la loi de commande par mode glissant et aux résultats de la commande optimale, l'observateur à gain élevé joue son rôle d'une façon satisfaisante et l'erreur de l'estimation des deux états θ et α est nulle en régime permanent.

5.4. Conclusion

Dans ce chapitre, une loi de commande moderne a été appliquée (commande par mode de glissement). Ce contrôleur est développé en se basant sur le modèle non-linéaire de la membrure flexible.

Identique à la commande optimale, cette technique estime que les états du système sont tous mesurables, alors que ce n'est pas le cas. Pour cela on a utilisé l'observateur à gain élevé développé au Chapitre 2 pour estimer les valeurs des états non mesurables dans le but de réaliser ce contrôleur.

Les simulations de cette loi de commande sont réalisées en utilisant le logiciel Matlab/Simulink et les travaux pratiques sont réalisées sur le système à une membrure flexible de la compagnie Quanser.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Vue la grande demande et l'émergence d'utilisation des bras robotisés dans le but de faciliter le travail et d'améliorer la productivité industrielle, les chercheurs ont développé un nouveau domaine de recherche qui est la modélisation et le contrôle des manipulateurs robotisés flexibles. Concernant le contrôle, les chercheurs se sont divisés entre deux écoles, la première qui utilise les techniques classiques et la deuxième qui utilise les techniques modernes.

Dans le but de faire une comparaison entre ces deux techniques de contrôle, nous avons développé les deux modèles linéaire et non-linéaire du robot à un bras flexible en se basant sur la méthode des modes supposés en considérant la déformation de la membrure sur toute sa longueur et que son poids est réparti linéairement tout le long du bras.

Comme les états du modèle ne sont pas tous mesurables, on a choisi un estimateur d'état qui peut être appliqué sur les deux modèles déjà développés. Un observateur à gain élevé est étudié et l'analyse de la convergence de l'erreur de l'estimation vers zéro, en utilisant la stabilité de Lyapunov, est bien détaillée pour les deux modèles.

Un contrôleur linéaire quadratique, contrôleur classé parmi les techniques classiques de contrôle, et une autre commande par mode de glissement, qui est un contrôleur classé parmi les techniques modernes, ont été développés. Puisque ces deux contrôleurs utilisent les valeurs des quatre états du système, on a utilisé l'estimateur d'état à gain élevé. La technique classique est appliquée sur le modèle linéaire alors que la deuxième sur le modèle non-linéaire. Les simulations des deux techniques sont faites dans Matlab/Simulink puis tester pratiquement sur un système à une membrure flexible de la compagnie Quanser.

Comme futur travail, on propose :

- Améliorer les résultats de la commande par mode de glissement en utilisant le mode glissant d'ordre supérieur. Cette méthode utilise l'esprit de contrôle en mode glissant avec l'entrée de contrôle filtrée avant son envoi. Le but principal de cette méthode est de gérer la fréquence de l'entrée de contrôle et de ralentir sa variation.
- Appliquer une nouvelle loi de contrôle qui est l'ADRC ou « Active Disturbance Rejection Control » en anglais. Ce contrôleur est divisé en deux parties : la loi de contrôle, et l'observateur étendue qui estime les états et la perturbation externe inconnue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. K. Dwivedy et P. Eberhard, "Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review," *Mechanism and machine theory*, vol. 41, pp. 749-777, 2006.
- [2] D. Popescu, D. Sendrescu et E. Bobasu, "Modelling and robust control of a flexible beam Quanser experiment," *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 13, pp. 127-135, 2008.
- [3] J.-C. Piedboeuf, *Introduction à la modélisation des robots flexibles*: Dép. de génie électrique et de génie informatique, Section Automatique, École polytechnique de Montréal, 1992.
- [4] H. Geniele, R. V. Patel et K. Khorasani, "End-point control of a flexible-link manipulator: theory and experiments," *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 5, pp. 556-570, 1997.
- [5] M. F. Khelfi, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, E. Richard et M. Darouach, "Reduced-order observer-based point-to-point and trajectory controllers for robot manipulators," *Control Engineering Practice*, vol. 4, pp. 991-1000, 1996.
- [6] S. Nicosia, A. Tornambe et P. Valigi, "Experimental validation of asymptotic observers for robotic manipulators," dans *Robotics and Automation, 1990. Proceedings., 1990 IEEE International Conference on*, 1990, pp. 1423-1430.
- [7] J. P. Gauthier, H. Hammouri et S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [8] M. Hou et P. Muller, "Design of observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 37, pp. 871-875, 1992.
- [9] H. Berghuis et H. Nijmeijer, "Robust control of robots via linear estimated state feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 2159-2162, 1994.

- [10] A. Shariati, A. Ghaffari et A. H. Shamekhi, "Control of a Flexible Laboratory Manipulator Using a Non-linear Lyapunov-type Controller."
- [11] M. Baroudi, M. Saad et W. Ghie, "State-feedback and linear quadratic regulator applied to a single-link flexible manipulator," dans *Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2009 IEEE International Conference on*, 2009, pp. 1381-1386.
- [12] S. Tso, T. Yang, W. Xu et Z. Sun, "Vibration control for a flexible-link robot arm with deflection feedback," *International journal of non-linear mechanics*, vol. 38, pp. 51-62, 2003.
- [13] F. Mrad et S. Ahmad, "Control of flexible joint robots," dans *Robotics and Automation, 1991. Proceedings., 1991 IEEE International Conference on*, 1991, pp. 2832-2837.
- [14] J. Doyle et G. Stein, "Robustness with observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, pp. 607-611, 1979.
- [15] F. Esfandiari et H. K. Khalil, "Observer-based design of uncertain systems: recovering state feedback robustness under matching conditions," dans *Proc. Allerton Conf*, 1987, pp. 97-106.
- [16] J. P. Gauthier, H. Hammouri et S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [17] Quanser (2008). Rotary Motion Servo Plant SRV02 Flexible Link – User Manual (Revision 1.0).
- [18] J.-C. Piedboeuf, *Introduction à la modélisation des robots flexibles*: Dép. de génie électrique et de génie informatique, Section Automatique, École polytechnique de Montréal, 1992.
- [19] D. Popescu, D. Sendrescu et E. Bobasu, "Modelling and robust control of a flexible beam Quanser experiment," *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 13, pp. 127-135, 2008.
- [20] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*: Oxford University Press, Inc., 1998.

- [21] B. Bona et M. Indri, "Analysis and implementation of observers for robotic manipulators," dans *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, 1998, pp. 3006-3011.
- [22] E. Misawa et J. Hedrick, "Nonlinear observers—a state-of-the-art survey," *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 111, pp. 344-352, 1989.
- [23] A. N. Atassi et H. K. Khalil, "A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 1672-1687, 1999.
- [24] D. Kirk, "An introduction to optimal control theory," *Englewood Cliffs, NJ Prentice Hall*, 1970.
- [25] EV. Kumar, "Linear quadratic optimal control For trajectory tracking Applications of under actuated System", thèse, Anna University, 2014.
- [26] P. Jodouin, "Contrôle linéaire et non-linéaire d'un bras flexible," Mémoire de maîtrise, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, 2014.
- [27] T. Amieur, "Commande des Systèmes Non Linéaires par Mode Glissant Flou," thèse, Université Mohamed Khider-Biskra, 2009.
- [28] C. Fallaha, "Étude de la commande par mode de glissement sur les systèmes mono et multi variables," "Mémoire de maîtrise" École de technologie supérieure, 2007.
- [29] J.-J. E. Slotine et W. Li, *Applied nonlinear control* vol. 199: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [29] Reissner E. On a one-dimensional large displacement finite-strain beam theory. *Studies in Applied Mathematics* 1973; 52:87-95.

- [30] J. C. Simo et L. Vu-Quoc, "On the dynamics in space of rods undergoing large motions—a geometrically exact approach," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 66, pp. 125-161, 1988.
- [31] A. Cardona et M. Géradin, "A beam finite element non-linear theory with finite rotations," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 26, pp. 2403-2438, 1988.
- [32] A. Ibrahimbegović et M. A. Mikdad, "Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41, pp. 781-814, 1998.
- [33] J. G. De Jalon, J. Cuadrado, A. Avello et J. Jimenez, "Kinematic and dynamic simulation of rigid and flexible systems with fully cartesian coordinates," dans *Computer-aided analysis of rigid and flexible mechanical systems*, ed: Springer, 1994, pp. 285-323.
- [34] M. A. Serna et E. Bayo, "A simple and efficient computational approach for the forward dynamics of elastic robots," *Journal of robotic systems*, vol. 6, pp. 363-382, 1989.
- [35] O. Khan, A. U. Rehman et M. Pervaiz, "Beyond linear control approaches-sliding mode control of flexible robotic manipulator," dans *2016 International Conference on Frontiers of Information Technology (FIT)*, 2016, pp. 1-6.
- [36] G. Wang, "Observer-based feedback control methods for an underactuated robot system," *Theses (School of Engineering Science)/Simon Fraser University*, 2003.
- [37] T. Masson. *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibres et connexions*. LPT, 2001

